Г. С. Бараненков, Б. П. Демидович,
В. А. Ефименко, С. М. Коган, Г. Л. Лунц,
Е. Ф. Поршнева, Е. П. Сычева, С. В. Фролов,
Р. Я. Шостак, А. Р. Янпольский

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Издательство «НАУКА»
Москва

G. Baranenkov, B. Demidovitch,
V. Efimenko, S. Frolov, S. Kogan,
G. Luntz, E. Porshneva, R. Shostak,
E. Sitcheva, A. Yanpolski

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS DE ANÁLISE MATEMÁTICA

Sob a redação de

B. DEMIDOVITCH

6ª edição

EDITORA MIR ✽ MOSCOU

ÍNDICE

PREFÁCIO DA EDIÇÃO EM PORTUGUÊS

Este Compêndio contém mais de 3000 problemas escolhidos sistematicamente de análise matemática e foi escrito para os estudantes das escolas técnicas superiores da URSS, para o curso normal de matemática superior. Dedica-se especial atenção aos capítulos do curso que exigem maior prática (determinação de limites, técnica de diferenciação de funções, construção de gráficos das funções, integração das funções, resolução de equações diferenciais, etc.). Foram dadas as bases importantes para a prática dos cálculos aproximados.

Os parágrafos do Compêndio contêm pequenas introduções teóricas e explanação das fórmulas. No entanto, pressupõe-se que estudante tenha assistido às aulas correspondentes do curso de análise matemática e, assim, as formulações apresentadas dos teoremas têm apenas caráter de trabalho. Por isso, em muitos casos, as condições de demonstração não são apresentadas por completo.

No Compêndio são dados exemplos de soluções de problemas típicos. Esta circunstância permite que os estudantes de cursos noturnos ou de cursos vagos, bem como pessoas que estudam independentemente, utilizam mais plenamente o presente Compêndio.

Todos os problemas têm respostas; aqueles que são marcadas por asterisco (*) ou duplo asterisco(**) possuem, na parte das respostas, breves indicações para a sua solução ou a sua solução. Para ilustração, parte dos problemas possuem gráficos ou figuras.

Este Compêndio foi composto por um grupo de professores e catedráticos de escolas técnicas superiores de Moscovo e é o resultado dos cursos de matemática superior por eles ministrados. Na União Soviética o Compêndio já viu sua 9ª edição e foi traduzido para varias linguas (inglês, francês, espanhol, italiano, etc.).

Vamos esperar que a tradução para o português do presente Compêndio permita a seus leitores terem uma idéia sobre o curso de análise matemática nas Escolas Técnicas Superiores da União Soviética.

Os autores

Moscovo, 14 de Abril de 1975

Capítulo I
INTRODUÇÃO À ANÁLISE

§ 1. Noção de função

1°. **Números reais.** Os números racionais e irracionais levam o nome de *reais* Chama-se *grandeza absoluta* do número real a o número não negativo $|a|$, determinado pelas condições: $|a| = a$, se $a \geqslant 0$, e $|a| = -a$, se $a < 0$. Para quaisquer números reais a e b é justa a desigualdade

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|.$$

2°. **Determinação da função.** Se a cada valor*) da grandeza variável x, pertencente a um certo conjunto E, corresponde um e somente um valor final da grandeza y, então y é chamado de *função* (uniforme) de x, ou de *variável dependente*, determinada no conjunto E; x chama-se argumento, ou *variável independente*. A circunstância de que y é função de x, é expressa abreviadamente pelas fórmulas $y = f(x)$ ou $y = F(x)$, etc.

Se a cada valor de x, pertencente a um certo conjunto E, corresponde um ou vários valores da grandeza variável y, então y é chamada de *função múltipla* de x, determinada no conjunto E. Daqui para diante por „funcão" entenderemos apenas funções **uniformes**, caso não se mencione o contrário.

3°. **Campo de existência da função.** O conjunto de valores de x, para os quais dada função é determinada, chama-se *campo de existência* ou *campo de definição* desta função.

Em casos muito simples, o campo de existência da função é: ou o *segmento* $[a, b]$, isto é, o conjunto de números reais x, que satisfazem as desigualdades $a \leqslant x \leqslant b$, ou o *intervalo* (a, b), isto é, o conjunto de números reais x, que satisfazem as desigualdades $a < x < b$. Porém é possível, também, uma estrutura mais complexa no campo de existência da função (ver, por ex., o problema 21).

Exemplo 1. Determinar o campo de existência da função

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Solução. A função será definida, se

$$x^2 - 1 > 0,$$

isto é, se $|x| > 1$. Desta forma, o campo de existência da função é o conjunto de dois intervalos: $-\infty < x < -1$ e $1 < x < +\infty$.

4°. **Funções inversas.** Se para todos os y que são valores da função $f(x)$, a equação $y = f(x)$ tem resolução única em relação à variável x, isto é, se existe uma fun-

*) Daqui para diante todos os valores estimados das grandezas serão tidos como reais, caso não se mencione o contrário.

ção $x = g(y)$ tal, que $y \equiv f[g(y)]$, então, a função $x = g(y)$, ou nas indicações usuais $y = g(x)$, chama-se *inversa* em relação a $y = f(x)$. É evidente, que $g[f(x)] \equiv x$, isto é, as funções $f(x)$ e $g(x)$ são *reciprocamente inversas*.

No geral, a equação $y = f(x)$ determina a função múltipla inversa $x = f^{-1}(y)$, tal que $y \equiv f(f^{-1}(y))$ para todos os y que são valores da função $f(x)$.

Exemplo 2. Determinar a inversa da função

$$y = 1 - 2^{-x}. \tag{1}$$

Solução. Resolvendo a equação (1) em relação a (x), teremos:

$$x = -\frac{\lg(1 - y)^{*})}{\lg 2}. \tag{2}$$

O campo de determinação da função (2) será, evidentemente, o seguinte: $-\infty < y < 1$.

5°. **Funções compostas e implícitas.** A função y de x, dada por uma cadeia de igualdades $y = f(u)$, onde $u = \varphi(x)$ ($f(u)$ é determinada para todos os valores u que são valores de $\varphi(x)$), etc., chama-se *composta* ou *função da função*.

A função dada por uma equação, que não é resolvida em relação a uma variável dependente, é chamada de *implícita*. Por exemplo, a equação $x^3 + y^3 = 1$ determina y como função implícita de x.

6°. **Representação gráfica da função.** O conjunto de pontos (x, y) de um plano XOY, cujas coordenadas estão ligadas à equação $y = f(x)$, é chamado de *gráfico* de dada função.

1.** Demonstrar que se a e b são números reais, então

$$||a| - |b|| \leqslant |a - b| \leqslant |a| + |b|.$$

2. Demonstrar as seguintes igualdades:

a) $|ab| = |a| \cdot |b|$; c) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$;

b) $|a|^2 = a^2$; d) $\sqrt{a^2} = |a|$.

3. Resolver as desigualdades:

a) $|x - 1| < 3$; c) $|2x + 1| < 1$;

b) $|x + 1| > 2$; d) $|x - 1| < |x + 1|$.

4. Achar $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, se $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

5. Achar $f(0)$, $f\left(-\frac{3}{4}\right)$, $f(-x)$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{f(x)}$, se $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$.

6. Seja $f(x) = \arccos(\lg x)$. Achar $f\left(\frac{1}{10}\right)$, $f(1)$, $f(10)$.

7. A função $f(x)$ é linear. Achar esta função, se $f(-1) = 2$ e $f(2) = -3$.

8. Achar uma função racional inteira $f(x)$ de segundo grau, se $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ e $f(3) = 5$.

9. Sabe-se que $f(4) = -2$, $f(5) = 6$. Achar o valor aproximado de $f(4{,}3)$, considerando que a função $f(x)$ no segmento $4 \leqslant x \leqslant 5$ é linear *(interpolação linear da função)*.

---

*) $\lg x = \log_{10} x$, como sempre, significa o logaritmo decimal do número x.

10. Escrever a função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leqslant 0, \\ x, & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

através de uma fórmula, utilizando o sinal de grandeza absoluta.

Determinar o campo de existência das funções:

11. a) $y = \sqrt{x+1}$; b) $y = \sqrt[3]{x+1}$.

12. $y = \dfrac{1}{4-x^2}$.

13. a) $y = \sqrt{x^2-2}$; b) $y = x\sqrt{x^2-2}$.

14.** $y = \sqrt{2+x-x^2}$.

15. $y = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$.

16. $y = \sqrt{x-x^3}$.

17. $y = \lg \dfrac{2+x}{2-x}$.

18. $y = \lg \dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$.

19. $y = \arccos \dfrac{2x}{1+x}$.

20. $y = \operatorname{arcsen}\left(\lg \dfrac{x}{10}\right)$.

21. $y = \sqrt{\operatorname{sen} 2x}$.

22. Seja $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 6x - 10$. Achar

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \text{ e } \psi(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)].$$

23. A função $f(x)$, determinada no campo simétrico $-l < x < l$, chama-se *par*, se $f(-x) = f(x)$, e *ímpar*, se $f(-x) = -f(x)$.

Verificar quais das funções dadas são pares e quais são ímpares:

a) $f(x) = \dfrac{1}{2}(a^x + a^{-x})$;

b) $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$;

c) $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$;

d) $f(x) = \lg \dfrac{1+x}{1-x}$;

e) $f(x) = \lg(x + \sqrt{1+x^2})$.

24*. Demonstrar que qualquer função $f(x)$, determinada no intervalo $-l < x < l$, pode ser apresentada como a soma de funções par e ímpar.

25. Demonstrar que o produto de duas funções pares ou duas funções ímpares é igual a uma função par e o produto de uma função par por uma função ímpar é igual a uma função ímpar.

26. A função $f(x)$ é *periódica* se existir um número T positivo *(período da função)* tal, que $f(x+T) \equiv f(x)$ para todos os valores de x, pertencentes ao campo de existência da função $f(x)$.

Determinar quais das funções abaixo enumeradas são periódicas e achar, para as funções periódicas, o período mínimo de seus T:

a) $f(x) = 10 \operatorname{sen} 3x$;

b) $f(x) = a \operatorname{sen} \lambda x + b \cos \lambda x$;

c) $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$;

d) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$;

e) $f(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{x})$.

27. Exprimir o comprimento do segmento $y = MN$ e a área S da figura AMN como função de $x = AM$ (fig. 1). Construir o gráfico destas funções.

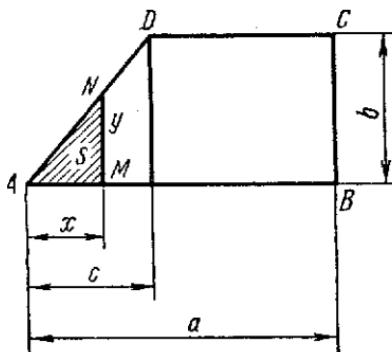



FIG. 1

28. A densidade linear (isto é, a massa da unidade de comprimento) da barra $AB = l$ (fig. 2) nos intervalos $AC = l_1$, $CD = l_2$ e $DB = l_3 (l_1 + l_2 + l_3 = l)$ é igual, correspondentemente, a q_1, q_2, q_3. Exprimir a massa m do intervalo variável $AM = x$ desta barra como função de x. Construir o gráfico desta função.

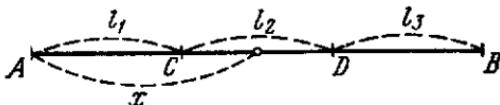



FIG. 2

29. Achar $\varphi[\psi(x)]$ e $\psi[\varphi(x)]$, se $\varphi(x) = x^2$ e $\psi(x) = 2^x$.

30. Achar $f\{f[f(x)]\}$, se $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

31. Achar $f(x + 1)$, se $f(x - 1) = x^2$.

32. Seja $f(n)$ a soma de n termos de uma progressão aritmética. Demonstrar que

$$f(n + 3) - 3f(n + 2) + 3f(n + 1) - f(n) = 0.$$

33. Demonstrar que se

$$f(x) = kx + b$$

e os números x_1, x_2, x_3 formam uma progressão aritmética, então, os números $f(x_1)$, $f(x_2)$ e $f(x_3)$, também, formam uma progressão aritmética.

34. Demonstrar que se $f(x)$ é uma função exponencial, isto é, $f(x) = a^x (a > 0)$ e os números x_1, x_2 e x_3 formam uma progressão aritmética, então, os números $f(x_1)$, $f(x_2)$ e $f(x_3)$ formam uma progressão geométrica.

35. Seja

$$f(x) = \lg \frac{1 + x}{1 - x}.$$

Demonstrar que

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x + y}{1 + xy}\right).$$

36. Seja $\varphi(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ e $\psi(x) = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x})$.

Demonstrar que

$$\varphi(x + y) = \varphi(x)\,\varphi(y) + \psi(x)\,\psi(y)$$

e

$$\psi(x + y) = \varphi(x)\,\psi(y) + \varphi(y)\,\psi(x).$$

37. Achar $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, se

$$f(x) = \begin{cases} \text{arcsen } x & \text{quando } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ \text{arctg } x & \text{quando } 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

38. Determinar as raízes (zeros), os campos positivos e os campos negativos da função y, se:

a) $y = 1 + x$;

b) $y = 2 + x - x^2$;

c) $y = 1 - x + x^2$;

d) $y = x^3 - 3x$;

e) $y = \lg \frac{2x}{1 + x}$.

39. Achar a inversa para a função y, se:

a) $y = 2x + 3$;

b) $y = x^2 - 1$;

c) $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$;

d) $y = \lg \frac{x}{2}$;

e) $y = \text{arctg } 3x$.

Em que campos serão definidas estas funções inversas?

40. Achar a função inversa de

$$y=\begin{cases} x, & \text{se } x\leqslant 0, \\ x^2, & \text{se } x>0. \end{cases}$$

41. Escrever os dados das funções em forma de igualdades, sendo que cada membro deve conter uma função elementar bem simples (de potência, exponencial, trigonométrica, etc.):

a) $y=(2x-5)^{10}$; c) $y=\lg \operatorname{tg}\frac{x}{2}$;

b) $y=2^{\cos x}$; d) $y=\operatorname{arcsen}(3^{-x^2})$.

42. Escrever as funções compostas, dadas em formas de igualdades, como uma só igualdade:

a) $y=u^2$, $u=\operatorname{sen} x$;

b) $y=\operatorname{arctg} u$, $u=\sqrt{v}$, $v=\lg x$;

c) $y=\begin{cases} 2u, & \text{se } u\leqslant 0, \\ 0, & \text{se } u>0; \end{cases}$

$u=x^2-1$.

43. Escrever de forma explícita as funções y, dadas pelas equações:

a) $x^2-\arccos y=\pi$;

b) $10^x+10^y=10$;

c) $x+|y|=2y$.

Achar os campos de definição de dadas funções implícitas.

§ 2. Gráficos de funções elementares

A construção de gráficos das funções $y=f(x)$ é feita, no fundamental, através da marcação de uma rede, suficientemente densa, de pontos $M_i(x_i, y_i)$, onde $y_i = f(x_i)$ $(i=0, 1, 2, \ldots)$, e pela união destes últimos por uma linha, cujo caráter deve considerar a posição dos pontos intermediários. Para as operações recomenda-se utilizar uma régua de cálculo.

A construção de gráficos facilita o estudo das curvas das funções elementares fundamentais (ver o anexo VI). Partindo do gráfico

$$y=f(x), \tag{G}$$

e através de construções geométricas simples, teremos os gráficos das funções:

1) $y_1=-f(x)$ — representação simétrica do gráfico G em relação ao eixo OX;

2) $y_2=f(-x)$ — representação simétrica do gráfico G em relação ao eixo OY;

3) $y_3=f(x-a)$ — gráfico G, deslocado ao longo do eixo OX no valor a;

4) $y_4=b+f(x)$ — gráfico G, deslocado ao longo do eixo OY no valor b (fig. 3).

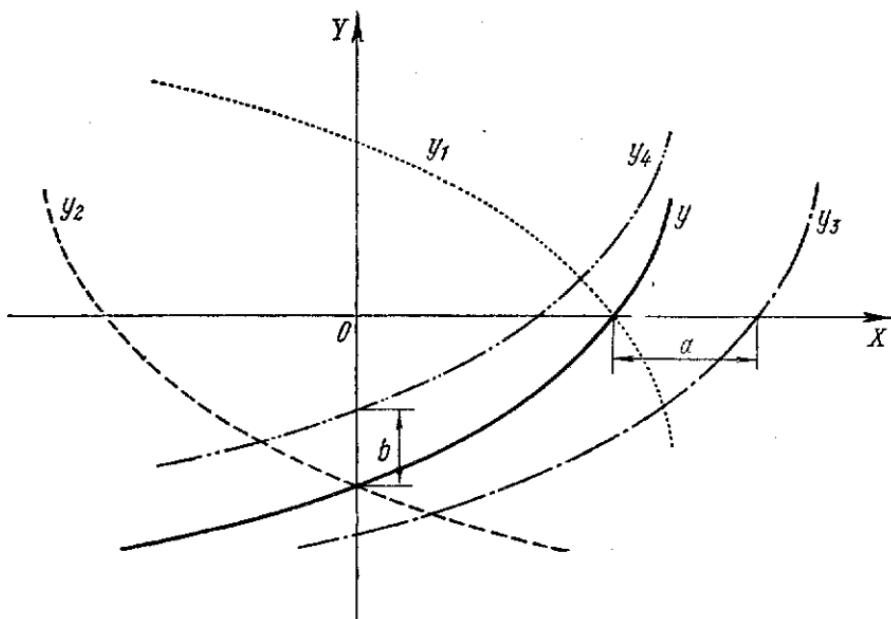



FIG. 3

Exemplo. Construir o gráfico da função

$$y = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Solução. A linha procurada é a sinusóide $y = \text{sen}\, x$, deslocada, ao longo do eixo OX, para a direita, no valor $\frac{\pi}{4}$ (fig. 4).

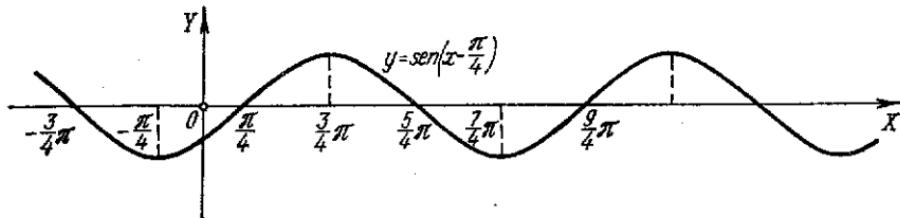



FIG. 4

Construir os gráficos das funções lineares *(linhas retas)*:

44. $y = kx$, se $k = 0, 1, 2, \frac{1}{2}, -1, -2.$

45. $y = x + b$, se $b = 0, 1, 2, -1, -2,$

46. $y = 1{,}5x + 2.$

Construir os gráficos de funções racionais de valor inteiro de 2° grau *(parábolas)*:

47. $y = ax^2$, se $a = 1, 2, \frac{1}{2}, -1, -2, 0$.

48. $y = x^2 + c$, se $c = 0, 1, 2, -1$.

49. $y = (x - x_0)^2$, se $x_0 = 0, 1, 2, -1$.

50. $y = y_0 + (x - 1)^2$, se $y_0 = 0, 1, 2, -1$.

51*. $y = ax^2 + bx + c$, se: 1) $a = 1,\ b = -2,\ c = 3$; 2) $a = -2,\ b = 6,\ c = 0$.

52. $y = 2 + x - x^2$. Encontrar o ponto de interseção desta parábola com o eixo OX.

Construir os gráficos de funções racionais de valor inteiro de grau superior ao segundo:

53*. $y = x^3$ *(parábola cúbica)*.

54. $y = 2 + (x - 1)^3$.

55. $y = x^3 - 3x + 2$.

56. $y = x^4$.

57. $y = 2x^2 - x^4$.

Construir os gráficos das funções lineares fracionárias *(hipérboles)*:

58*. $y = \frac{1}{x}$.

59. $y = \frac{1}{1 - x}$.

60. $y = \frac{x - 2}{x + 2}$.

61*. $y = y_0 + \frac{m}{x - x_0}$, se $x_0 = 1,\ y_0 = -1,\ m = 6$.

62*. $y = \frac{2x - 3}{3x + 2}$.

Construir os gráficos das funções racionais fracionárias:

63. $y = x + \frac{1}{x}$.

64. $y = \frac{x^2}{x + 1}$.

65*. $y = \frac{1}{x^2}$.

66. $y = \frac{1}{x^3}$.

67*. $y = \frac{10}{x^2 + 1}$ *(curva de Agnesi)*.

68. $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$ *(serpentina de Newton)*.

69. $y = x + \frac{1}{x^2}$.

70. $y = x^2 + \frac{1}{x}$ *(tridente de Newton)*.

Construir os gráficos das funções irracionais:

71*. $y = \sqrt{x}$. **72*.** $y = \sqrt[3]{x}$.

73*. $y = \sqrt[3]{x^2}$ *(parábola de Neil).*

74. $y = \pm x\sqrt{x}$ *(parábola semicúbica).*

75*. $y = \pm \frac{3}{5}\sqrt{25 - x^2}$ *(elipse).*

76. $y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$ *(hipérbole).*

77. $y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

78*. $y = \pm x\sqrt{\frac{x}{4 - x}}$ *(cissóide de Diocles)*

79. $y = \pm x\sqrt{25 - x^2}$.

Construir os gráficos das funções trigonométricas:

80*. $y = \operatorname{sen} x$. **81*.** $y = \cos x$.

82*. $y = \operatorname{tg} x$. **83*.** $y = \operatorname{ctg} x$.

84*. $y = \sec x$. **85*.** $y = \operatorname{cosec} x$.

86. $y = A \operatorname{sen} x$, se $A = 1, 10, \frac{1}{2}, -2$.

87*. $y = \operatorname{sen} nx$, se $n = 1, 2, 3, \frac{1}{2}$.

88. $y = \operatorname{sen}(x - \varphi)$, se $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \pi, -\frac{\pi}{4}$.

89*. $y = 5 \operatorname{sen}(2x - 3)$.

90*. $y = a \operatorname{sen} x + b \cos x$, se $a = 6$, $b = -8$.

91. $y = \operatorname{sen} x + \cos x$. **92*.** $y = \cos^2 x$.

93*. $y = x + \operatorname{sen} x$. **94*.** $y = x \operatorname{sen} x$.

95. $y = \operatorname{tg}^2 x$. **96.** $y = 1 - 2\cos x$.

97. $y = \operatorname{sen} x - \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x$. **98.** $y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x$.

99*. $y = \cos \frac{\pi}{x}$. **100.** $y = \pm\sqrt{\operatorname{sen} x}$.

Construir os gráficos das funções exponenciais e logarítmicas:

101*. $y = a^x$, se $a = 2, \frac{1}{2}, e$ $(e = 2{,}718\ldots)$*).

102*. $y = \log_a x$, se $a = 10, 2, \frac{1}{2}, e$.

103*. $y = \operatorname{senh} x$, onde $\operatorname{senh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

*) Ver mais detalhadamente sobre o número e na pág. 23.

104*. $y = \cosh x$, onde $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

105*. $y = \operatorname{tgh} x$, onde $\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$.

106. $y = 10^{\frac{1}{x}}$.

107*. $y = e^{-x^2}$ (*curva das probabilidades*).

108. $y = 2^{-\frac{1}{x^2}}$. **109.** $y = \lg x^2$.

110. $y = \lg^2 x$. **111.** $y = \lg(\lg x)$.

112. $y = \frac{1}{\lg x}$. **113.** $y = \lg \frac{1}{x}$.

114. $y = \lg(-x)$. **115.** $y = \log_2(1 + x)$.

116. $y = \lg(\cos x)$. **117.** $y = 2^{-x} \operatorname{sen} x$.

Construir os gráficos das funções trigonométricas inversas:

118*. $y = \operatorname{arcsen} x$. **119*.** $y = \arccos x$.

120*. $y = \operatorname{arctg} x$. **121*.** $y = \operatorname{arcctg} x$.

122. $y = \operatorname{arcsen} \frac{1}{x}$. **123.** $y = \arccos \frac{1}{x}$.

124. $y = x + \operatorname{arcctg} x$.

Construir os gráficos das funções:

125. $y = |x|$. **126.** $y = \frac{1}{2}(x + |x|)$.

127. a) $y = x|x|$; b) $y = \log_{\sqrt{2}} |x|$.

128. a) $y = \operatorname{sen} x + |\operatorname{sen} x|$; b) $y = \operatorname{sen} x - |\operatorname{sen} x|$.

129. $y = \begin{cases} 3 - x^2 & \text{quando } |x| \leqslant 1; \\ \frac{2}{|x|} & \text{quando } |x| > 1. \end{cases}$

130. a) $y = [x]$, b) $y = x - [x]$, onde $[x]$ é a parte inteira do número x, isto é, o número inteiro máximo, menor ou igual a x.

Construir os gráficos das funções no sistema polar de coordenadas (r, φ) $(r \geqslant 0)$:

131. $r = 1$ (*circunferência*).

132*. $r = \frac{\varphi}{2}$ (*espiral de Arquimedes*)

133*. $r = e^{\varphi}$ (*espiral logarítmica*).

134*. $r = \frac{\pi}{\varphi}$ (*espiral hiperbólica*).

135. $r = 2 \cos \varphi$ (*circunferência*).

136. $r = \frac{1}{\operatorname{sen} \varphi}$ *(linha reta).*

137. $r = \sec^2 \frac{\varphi}{2}$ *(parábola).*

138*. $r = 10 \operatorname{sen} 3\varphi$ *(rosa de três pétalas).*

139*. $r = a(1 + \cos \varphi)$ $(a > 0)$ *(cardióide).*

140*. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi (a > 0)$ *(lemniscata).*

Construir os gráficos das funções dadas parametricamente:

141*. $x = t^3$, $y = t^2$ *(parábola semicúbica).*

142*. $x = 10 \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ *(elipse).*

143*. $x = 10 \cos^3 t$, $y = 10 \operatorname{sen}^3 t$ *(astróide).*

144*. $x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t)$, $y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t)$ *(desenvolvimento do círculo).*

145*. $x = \frac{at}{1 + t^3}$, $y = \frac{at^2}{1 + t^3}$ *(folha de Descartes).*

146. $x = \frac{a}{\sqrt{1 + t^2}}$, $y = \frac{at}{\sqrt{1 + t^2}}$ *(semicircunferência).*

147. $x = 2^t + 2^{-t}$, $y = 2^t - 2^{-t}$ *(ramo da hipérbole).*

148. $x = 2 \cos^2 t$, $y = 2 \operatorname{sen}^2 t$ *(segmento da reta).*

149. $x = t - t^2$, $y = t^2 - t^3$.

150*. $x = a(2 \cos t - \cos 2t)$, $y = a(2 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t)$ *(cardióide).*

Construir os gráficos das funções dadas implicitamente:

151*. $x^2 + y^2 = 25$ *(circunferência).*

152. $xy = 12$ *(hipérbole).*

153*. $y^2 = 2x$ *(parábola).*

154. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ *(elipse).*

155. $y^2 = x^2(100 - x^2)$.

156*. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ *(astróide).*

157*. $x + y = 10 \lg y$.

158. $x^2 = \cos y$.

159*. $\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\operatorname{Arctg} \frac{y}{x}}$ *(espiral logarítmica).*

160*. $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ *(folha de Descartes).*

161. Compor a fórmula de passagem da escala Celsius (C) para a escala Fahrenheit (F), sabendo-se que 0°C corresponde a 32°F e 100°C correspondem a 212°F. Construir o gráfico da função obtida.

162. No triângulo de base $b = 10$ e altura $h = 6$ está inscrito um retângulo (fig. 5). Exprimir a área deste retângulo y como função da sua base x.

Construir o gráfico desta função e achar seu valor máximo.

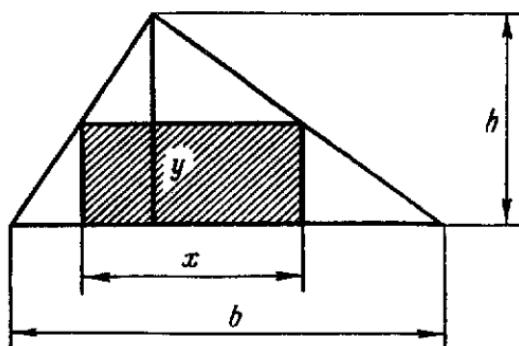



FIG. 5

163. No triângulo ACB o lado $BC = a$, o lado $AC = b$ e o ângulo variável $\measuredangle ACB = x$ (fig. 6).

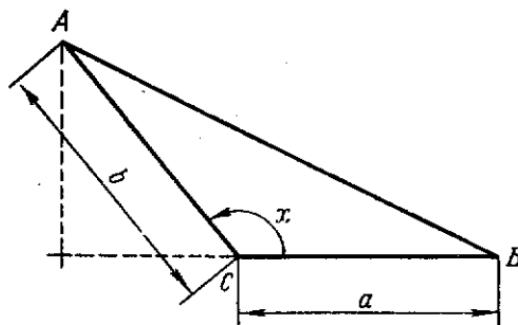



FIG. 6

Exprimir $y =$ área ΔABC como função de x. Construir o gráfico desta função e achar seu valor máximo.

164. Resolver graficamente as equações:

a) $2x^2 - 5x + 2 = 0$; d) $10^{-x} = x$;

b) $x^3 + x - 1 = 0$; e) $x = 1 + 0{,}5 \operatorname{sen} x$;

c) $\lg x = 0{,}1x$; f) $\operatorname{ctg} x = x \quad (0 < x < \pi)$.

165. Resolver graficamente os sistemas de equações:

a) $xy = 10,\ x + y = 7$;

b) $xy = 6,\ x^2 + y^2 = 13$;

c) $x^2 - x + y = 4,\ y^2 - 2x = 0$;

d) $x^2 + y = 10,\ x + y^2 = 6$;

e) $y = \operatorname{sen} x,\ y = \cos x \quad (0 < x < 2\pi)$.

§ 3. Limites

1°. **Limite da sucessão.** O número a denomina-se *limite* da sucessão $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

se para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um número $N = N(\varepsilon)$ tal, que

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{sendo } n > N.$$

Exemplo 1. Demonstrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2.$$

Solução. Consideramos a diferença

$$\frac{2n+1}{n+1} - 2 = -\frac{1}{n+1}.$$

Avaliando esta diferença pelo valor absoluto, teremos:

$$\left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon,$$

se

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = N(\varepsilon). \tag{2}$$

Desta forma, para cada número positivo ε há um número $N = \frac{1}{\varepsilon} - 1$ tal, que terá lugar a desigualdade (2). Consequentemente, o número 2 será o limite da sucessão $x_n = (2n+1)/(n+1)$, isto é, a fórmula (1) é correta.

2°. **Limite da função.** Sabe-se que a função $f(x) \to A$, quando $x \to a$ (A e a são números), ou

$$\lim_{x\to a} f(x) = A,$$

se para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um número $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal, que

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \quad \text{sendo } 0 < |x - a| < \delta.$$

Por analogia,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A,$$

se $|f(x) - A| < \varepsilon$ sendo $|x| > N(\varepsilon)$.

Utiliza-se, também, a anotação convencional

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty,$$

isso quer dizer, que $|f(x)| > E$, sendo $0 < |x - a| < \delta(E)$, onde E é um número arbitrário positivo.

3°. **Limites laterais.** Se $x < a$ e $x \to a$, então, convencionalmente, escreve-se $x \to a - 0$; por analogia, se $x > a$ e $x \to a$, expressa-se da seguinte forma: $x \to a + 0$. Os números

$$f(a-0) = \lim_{x\to a-0} f(x) \quad \text{e} \quad f(a+0) = \lim_{x\to a+0} f(x)$$

chamam-se, respectivamente, *limite à esquerda* da função $f(x)$ no ponto a, e *limite à direita* da função $f(x)$ no ponto a (se estes números existirem).

Para a existência do limite da função $f(x)$, sendo $x \to a$, é necessário e suficiente que exista a igualdade

$$f(a-0) = f(a+0).$$

Se existem os $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$, então existirão os seguintes teoremas:

1) $\lim\limits_{x\to a}[f_1(x) + f_2(x)] = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) + \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to a}[f_1(x) f_2(x)] = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to a}[f_1(x)/f_2(x)] = \lim\limits_{x\to a} f_1(x)/\lim\limits_{x\to a} f_2(x) \quad (\lim\limits_{x\to a} f_2 \neq 0)$.

Os seguintes limites são de uso frequente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1;$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{a\to 0}(1+a)^{\frac{1}{a}} = e = 2{,}71828\ldots$$

Exemplo 2. Achar os limites à direita e à esquerda da função

$$f(x) = \text{arctg}\,\frac{1}{x},$$

quando $x \to 0$

Solução. Temos:

$$f(+0) = \lim_{x\to+0}\left(\text{arctg}\,\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

e

$$f(-0) = \lim_{x\to-0}\left(\text{arctg}\,\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Neste caso, o limite da função $f(x)$, quando $x \to 0$, evidentemente, não existe.

166. Demonstrar que quando $n \to \infty$ o limite da sucessão

$$1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \ldots,\ \frac{1}{n^2},\ \ldots$$

é igual a zero. Para que valores de n será válida a desigualdade:

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon$$

(ε é um número positivo arbitrário)?

Fazer a cálculo numérico, se: a) $\varepsilon = 0{,}1$; b) $\varepsilon = 0{,}01$; c) $\varepsilon = 0{,}001$.

167. Demonstrar que o limite da sucessão,

$$x_n = \frac{n}{n+1} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

quando $n \to \infty$, é igual a 1. Para que valores de $n > N$ será válida a desigualdade

$$|x_n - 1| < \varepsilon$$

(ε é um número positivo arbitrário)?

Achar N, se: a) $\varepsilon = 0{,}1$; b) $\varepsilon = 0{,}01$; c) $\varepsilon = 0{,}001$.

168. Demonstrar que

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4.$$

Como escolher para um dado número positivo ε, um outro número positivo δ qualquer, de forma que a desigualdade

$$|x - 2| < \delta$$

siga a desigualdade

$$|x^2 - 4| < \varepsilon?$$

Calcular δ, se: a) $\varepsilon = 0{,}1$; b) $\varepsilon = 0{,}01$; c) $\varepsilon = 0{,}001$.

169. Esclarecer o sentido exato das anotações convencionais:

a) $\lim\limits_{x \to +0} \lg x = -\infty$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$; c) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

170. Achar os limites das sucessões:

a) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \ldots$;

b) $\frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \ldots, \frac{2n}{2n-1}, \ldots$;

c) $\sqrt{2}, \quad \sqrt{2\sqrt{2}}, \quad \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$;

d) $0{,}2$; $0{,}23$; $0{,}233$; $0{,}2333$; ...

Achar os limites:

171. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}\right)$.

172. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$.

173. $\lim\limits_{n \to \infty} \left[\frac{1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2}\right]$.

174. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$. **175.** $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$.

176. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)$.

177. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\right)$.

178*. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n^3}$.

179. $\lim\limits_{n \to \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$. **180.** $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n \operatorname{sen} n!}{n^2 + 1}$.

Ao calcular-se o limite da razão de dois polinômios inteiros em relação a x, quando $x \to \infty$, é útil dividir previamente em x^n ambos os membros da razão, onde n é a potência máxima destes polinômios.

Tal método pode ser empregado, também, em muitos casos para frações, que contêm expressões irracionais.

Exemplo 1.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x-3)(3x+5)(4x-6)}{3x^3+x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(2-\frac{3}{x}\right)\left(3+\frac{5}{x}\right)\left(4-\frac{6}{x}\right)}{3+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}} = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{3} = 8.$$

Exemplo 2.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+10}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{10}{x^3}}} = 1.$$

181. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$.

182. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1\,000x}{x^2-1}$.

183. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-5x+1}{3x+7}$.

184. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-x+3}{x^3-8x+5}$.

185. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}$.

186. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$.

187. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$.

188. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{10+x\sqrt{x}}$.

189. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$.

190. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$.

Se $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios inteiros e $P(a) \neq 0$ ou $Q(a) \neq 0$, então, o limite da fração racional

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

é encontrado diretamente.

Mas, se $P(a) = Q(a) = 0$, então, recomenda-se simplificar a fração $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, em uma ou mais vezes, pelo binômio $x - a$.

Exemplo 3.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x-1} = 4.$$

191. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$.

192. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-5x+10}{x^2-25}$.

193. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$.

194. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$.

195. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.

196. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$.

197. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$.

198. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

As expressões irracionais se reduzem, em muitos casos, à forma racional através da introdução de uma nova variável.

Exemplo 4. Achar

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}.$$

Solução. Supondo que

$$1+x=y^6,$$

teremos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y^3-1}{y^2-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y^2+y+1}{y+1}=\frac{3}{2}.$$

199. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}.$

200. $\lim\limits_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}.$

201. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}.$

202. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}.$

Outro método, através do cual pode-se encontrar o limite, a partir de uma expressão irracional, é o transporte da parte irracional do numerador para o denominador, ou ao contrário, do denominador para o numerador.

Exemplo 5.

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}\qquad (a>0).$$

203. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}.$

204. $\lim\limits_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}.$

205. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}.$

206. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}.$

207. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}.$

208. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\,(x>0).$

209. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}\ (x\neq 0).$

210. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}.$

211. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}).$

212. $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{x(x+a)}-x].$

213. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-5x+6}-x).$

214. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x).$

215. $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt[3]{1-x^3}).$

Em muitos casos, ao calcularmos os limites, utilizamos a fórmula

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$$

e pressupõe-se que $\lim_{x\to a}\operatorname{sen} x=\operatorname{sen} a$ e $\lim_{x\to a}\cos x=\cos a$ sejam conhecidos.

Exemplo 6. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 5x}{5x}\cdot 5\right)=1\cdot 5=5.$

216. a) $\lim_{x\to 2}\frac{\operatorname{sen} x}{x}$;

b) $\lim_{x\to \infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

217. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$.

218. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 2x}$.

219. $\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen} \pi x}{\operatorname{sen} 3\pi x}$.

220. $\lim_{n\to \infty}\left(n\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\right)$.

221. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

222. $\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} a}{x-a}$.

223. $\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$.

224. $\lim_{x\to -2}\frac{\operatorname{tg} \pi x}{x+2}$.

225. $\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h}$.

226. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{sen} x-\cos x}{1-\operatorname{tg} x}$.

227. a) $\lim_{x\to 0}x\operatorname{sen}\frac{1}{x}$;

b) $\lim_{x\to \infty}x\operatorname{sen}\frac{1}{x}$.

228. $\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.

229. $\lim_{x\to 0}\operatorname{ctg} 2x\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

230. $\lim_{x\to \pi}\frac{1-\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\pi-x}$.

231. $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{\pi-3x}$.

232. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$.

233. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}{x^3}$.

234. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen} x}{x}$.

235. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{sen} 3x}$.

236. $\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\operatorname{sen} \pi x}$.

237. $\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} 2x}{x+\operatorname{sen} 3x}$.

238. $\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$.

239. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$.

240. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}-\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}{x}$.

Ao calcularmos os limites do tipo

$$\lim_{x\to a}[\varphi(x)]^{\psi(x)} = C, \tag{3}$$

onde $\varphi(x)$ é positivo nos entornos do ponto $a (x \neq a)$, temos que considerar:

1) Se existem os limites finitos

$$\lim_{x\to a}\varphi(x) = A \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a}\psi(x) = B,$$

então $C = A^B$;

2) se $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = A \neq 1$ e $\lim\limits_{x\to a}\psi(x) = B$, onde $0 \leqslant A \leqslant \infty$, $-\infty \leqslant B \leqslant +\infty$; então, o cálculo do limite (3) é feito diretamente;

3) se $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 1$ e o $\lim\limits_{x\to a}\psi(x) = \infty$, então, pressupõe-se $\varphi(x) = 1 + \alpha(x)$, onde $\alpha(x) \to 0$, quando $x \to a$ e, consequentemente,

$$C = \lim_{x\to a}\left\{[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}\right\}^{\alpha(x)\,\psi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)\psi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[\varphi(x)-1]\psi(x)},$$

onde $e = 2{,}718\ldots$ é número de Neper.

Exemplo 7. Achar

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{x}\right)^{1+x}.$$

Solução. Temos

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{x}\right) = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0}(1+x) = 1;$$

assim,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{x}\right)^{1+x} = 2^1 = 2.$$

Exemplo 8. Achar

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}.$$

Solução. Temos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$$

e

$$\lim_{x\to\infty} x^2 = +\infty.$$

Portanto

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1)}\right)^{x^2} = 0.$$

Exemplo 9. Achar

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}.$$

Solução. Temos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=1.$$

Fazendo as transformações supra indicadas, teremos:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[1+\left(\frac{x-1}{x+1}-1\right)\right]^{x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left[1+\left(\frac{-2}{x+1}\right)\right]^{\frac{x+1}{-2}}\right\}^{-\frac{2x}{1+x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+1}}=e^{-2}.$$

Neste caso, não utilizando o método geral, podemos encontrar o limite de forma mais simples:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}=\frac{e^{-1}}{e}=e^{-2}.$$

É útil lembrar, que

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=e^{k}.$$

241. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2+x}{3-x}\right)^{x}$.

242. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}$.

243. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}}$.

244. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}$.

245. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$.

246. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$.

247. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$.

218. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}$.

249. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$.

250. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}$.

251. $\lim\limits_{x\to0}(1+\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}$.

252.** a) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$;

b) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Para o cálculo dos limites abaixo relacionados, é útil saber, que se existe e é positivo o $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, então

$$\lim_{x\to a}[\ln f(x)]=\ln[\lim_{x\to a} f(x)].$$

Exemplo 10. Demonstrar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \qquad (*)$$

Solução. Temos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln \quad e = 1.$$

A fórmula (*) é usada com frequência durante a resolução dos exercícios.

253. $\lim_{x\to+\infty} [\ln(2x+1) - \ln\ (x+2)]$.

254. $\lim_{x\to 0} \frac{\lg(1+10x)}{x}$.

255. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$.

256. $\lim_{x\to+\infty} x[\ln(x+1) - \ln x]$.

257. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$.

258*. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

259*. $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}$ $(a > 0)$.

260*. $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1)$ $(a > 0)$.

261. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$.

262. $\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{-x}}{\text{sen } x}$.

263. a) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{senh } x}{x}$; b) $\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2}$.

(ver n°s. **103** e **104**).

Achar os seguintes limites laterais:

264. a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

265. a) $\lim_{x\to-\infty} \text{tgh } x$; b) $\lim_{x\to+\infty} \text{tgh } x$,

onde $\text{tgh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

266. a) $\lim_{x\to-0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$; b) $\lim_{x\to+0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$.

267. a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$; b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$.

268. a) $\lim_{x\to-0} \frac{|\text{sen } x|}{x}$; b) $\lim_{x\to+0} \frac{|\text{sen } x|}{x}$.

269. a) $\lim_{x\to1-0} \frac{x-1}{|x-1|}$; b) $\lim_{x\to1+0} \frac{x-1}{|x-1|}$.

270. a) $\lim_{x\to2-0} \frac{x}{x-2}$; b) $\lim_{x\to2+0} \frac{x}{x-2}$.

Construir os gráficos das funções (n é natural):

271*. $y = \lim_{n\to\infty} (\cos^{2n} x)$. **272*.** $y = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+x^n}$ $(x \geqslant 0)$.

273. $y = \lim_{\alpha\to 0} \sqrt{x^2+\alpha^2}$. **274.** $y = \lim_{n\to\infty} (\operatorname{arctg} nx)$.

275. $y = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x^n}$ $(x \geqslant 0)$.

276. Transformar em fração ordinária a fração periódica mista dada

$$\alpha = 0,13555\ldots,$$

considerando-a como limite da fração finita correspondente.

277. O que ocorre com a raiz da equação quadrada

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

se o coeficiente a tende a zero e os coeficientes b e c são constantes, sendo que $b \neq 0$?

278. Achar o limite do ângulo interno de um polígono regular de n-lados, quando $n \to \infty$.

279. Achar o limite dos perímetros de n-polígonos regulares, inscritos numa circunferência de raio R e circunscritos ao seu torno, quando $n \to \infty$.

280. Achar o limite da soma dos comprimentos das ordenadas da curva

$$y = e^{-x} \cos \pi x,$$

traçados nos pontos $x = 1, 2, \ldots, n$, quando $n \to \infty$.

281. Achar o limite da soma das áreas dos quadrados, construídos sobre as ordenadas da curva

$$y = 2^{1-x}$$

como bases, onde $x = 1, 2, 3, \ldots, n$, tendo como condição que $n \to \infty$.

282. Achar o limite, quando $n \to \infty$, do perímetro da linha quebrada $M_0M_1 \ldots M_n$, inscrita na espiral logarítmica

$$r = e^{-\varphi},$$

se os vértices desta linha quebrada têm, respectivamente, ângulos polares

$$\varphi_0 = 0,\ \varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \ldots, \varphi_n = \frac{n\pi}{2}.$$

283. O segmento $AB = a$ (fig. 7) divide-se em n partes iguais, e em cada uma delas, como na base, está construído um triângulo isósceles, com ângulos, junto à base, iguais a $\alpha = 45°$. Demonstrar que o limite do perímetro da linha quebrada formada, diferencia-se

do comprimento do segmento AB, embora, no limite, a linha quebrada "fusione-se geometricamente com o segmento AB".

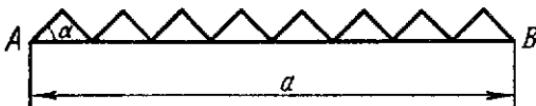



FIG. 7

284. O ponto C_1 divide o segmento $AB = l$ ao meio; o ponto C_2 divide o segmento AC_1 ao meio; o ponto C_3 divide o segmento C_2C_1 ao meio; o ponto C_4 divide o segmento C_2C_3 ao meio, etc. Determinar a posição limite do ponto C_n, quando $n \to \infty$.

285. O cateto a, de um triângulo retângulo, divide-se em n partes iguais e nos segmentos obtidos são construídos retângulos inscritos (fig. 8). Determinar o limite da área da figura escalonada formada, se $n \to \infty$.

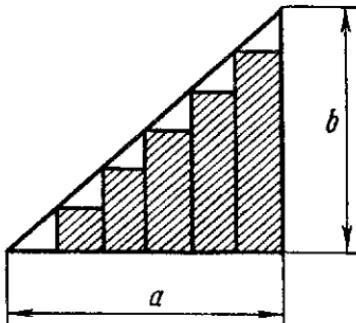



FIG. 8

286. Achar as constantes k e b da equação:

$$\lim_{x\to\infty}\left(kx + b - \frac{x^3+1}{x^2+1}\right) = 0. \qquad (1)$$

Explicar o sentido geométrico da igualdade (1).

287*. Certo processo químico decorre de tal forma que o aumento da quantidade de substância, em cada intervalo de tempo τ, da sucessão infinita de intervalos $(i\tau, (i+1)\tau)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ é proporcional à quantidade disponível de substância, que se tem no início deste intervalo e proporcional à grandeza do intervalo. Pressupondo-se que no momento inicial de tempo a quantidade de substância era igual a Q_0, determinar a quantidade de substância $Q_t^{(n)}$ no intervalo de tempo t, se o aumento da quantidade de substância ocorre a cada n-parte do intervalo de tempo $\tau = \frac{t}{n}$.

Achar $Q_t = \lim_{n\to\infty} Q_t^{(n)}$.

§ 4. Infinitésimos e infinitos

1°. **Infinitésimos.** Se o

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0,$$

isto é, se $|\alpha(x)| < \varepsilon$, quando $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$, então, a função $\alpha(x)$ chama-se *infinitésima (infinitamente pequena)*, quando $x \to a$. Da mesma forma, determina-se a função infinitamente pequena $\alpha(x)$, quando $x \to \infty$.

A soma e o produto do número limitado de infinitésimos, quando $x \to a$, são, também, infinitamente pequenos, quando $x \to a$.

Se $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ são infinitésimos, quando $x \to a$ e

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C,$$

onde C é um número dado, diferente de zero, então, as funções $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ chamam-se *infinitamente pequenas de uma mesma ordem*; se $C = 0$, então, a função $\alpha(x)$ é *infinitamente pequena de ordem superior*, em comparação com $\beta(x)$. A função $\alpha(x)$ chama-se de *infinitamente pequena, de ordem n*, em comparação com a função $\beta(x)$, se

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^n} = C,$$

onde $0 < |C| < +\infty$.

Se

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1,$$

então, as funções $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ denominam-se *equivalentes* ou *assintoticamente iguais* quando $x \to a$:

$$\alpha(x) \sim \beta(x).$$

Por exemplo, quando $x \to 0$ teremos:

$$\operatorname{sen} x \sim x; \quad \operatorname{tg} x \sim x; \quad \ln(1 + x) \sim x,$$

etc.

A soma de dois infinitésimos, de diferentes ordens, é igual aos termos, cuja ordem é inferior.

O limite de razão de dois infinitésimos não se altera, se os membros de razão forem substituídos por grandezas equivalentes. De acordo com este teorema, ao calcular-se o limite da fração

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)},$$

onde $\alpha(x) \to 0$ e $\beta(x) \to 0$, quando $x \to a$, no numerador e denominador da fração pode-se retirar (ou acrescentar) infinitésimos de ordens superiores, escolhidos de tal forma, que as grandezas que restaram sejam equivalentes às anteriores.

Exemplo 1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x^4}}{\ln(1 + 2x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3}}{2x} = \frac{1}{2}.$$

2°. **Infinitos.** Se para qualquer número grande N existe tal $\delta(N)$, que, quando $0 < |x - a| < \delta(N)$, verifica-se, a desigualdade

$$|f(x)| > N,$$

então, a função $f(x)$ chama-se *infinita (infinitamente grande)*, quando $x \to a$.

Da mesma forma, como é feito para os infinitésimos, introduz-se o conceito de infinitos de diferentes ordens.

288. Demonstrar que a função,

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

é infinitamente pequena, quando $x \to \infty$. Para que valores de x é válida a desigualdade:

$$|f(x)| < \varepsilon,$$

se ε é um número arbitrário?

Calcular: a) $\varepsilon = 0{,}1$; b) $\varepsilon = 0{,}01$; c) $\varepsilon = 0{,}001$.

289. Demonstrar que a função

$$f(x) = 1 - x^2$$

é infinitamente pequena, quando $x \to 1$. Para que valores de x é válida a condição:

$$|f(x)| < \varepsilon,$$

se ε é um número positivo arbitrário? Fazer cálculos numericos para: a) $\varepsilon = 0{,}1$; b) $\varepsilon = 0{,}01$; c) $\varepsilon = 0{,}001$.

290. Demonstrar que a função,

$$f(x) = \frac{1}{x - 2}$$

é infinitamente grande, quando $x \to 2$. Em que entornos de $|x - 2| < \delta$ verifica-se a desigualdade:

$$|f(x)| > N,$$

se N é um número positivo arbitrário?

Achar δ, se: a) $N = 10$; b) $N = 100$; c) $N = 1\,000$.

291. Determinar a ordem infinitesimal: a) da superfície de uma esfera, b) do volume da esfera, se seu raio r for infinitésimo de 1ª ordem. Qual será a ordem infinitesimal do raio e do volume da esfera, em relação à área desta mesma esfera?

292. Que o ângulo central α do setor circular ABO (fig. 9) de raio R tenda a zero. Determinar a ordem infinitesimal em relação

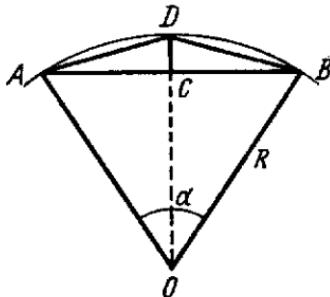



FIG. 9

ao infinitésimo α: a) da corda AB; b) da flecha do arco CD; da área $\Delta\ ABD$.

293. Determinar a ordem infinitesimal em relação a x, quando $x \to 0$, das funções:

a) $\frac{2x}{1+x}$; c) $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x^3}$;

d) $1 - \cos x$;

b) $\sqrt{x + \sqrt{x}}$; e) $\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x$.

294. Demonstrar que o comprimento do arco infinitésimo da circunferência de raio constante é equivalente ao comprimento da sua corda lá compreendida.

295. Serão equivalentes o segmento infinitésimo e a semicircunferência infinitésima, traçada neste segmento como no diâmetro?

Empregando o teorema sobre as relações de duas infinitamente pequenas, encontrar:

296. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x \cdot \operatorname{sen} 5x}{(x - x^3)^2}$. **297.** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{arcsen} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}$.

298. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{1-x}$. **299.** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x}$.

300. Demonstrar que, quando $x \to 0$, as grandezas $\frac{x}{2}$ e $\sqrt{1+x} - 1$ são equivalentes entre si. Usando este resultado, demonstrar que, sendo $|x|$ pequeno, há lugar a igualdade aproximada:

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}. \tag{1}$$

Empregando a fórmula (1), achar aproximadamente:

a) $\sqrt{1{,}06}$; b) $\sqrt{0{,}97}$; c) $\sqrt{10}$; d) $\sqrt{120}$

e comparar os valores obtidos com os dados de tabela.

301. Demonstrar que, quando $x \to 0$, verificam-se as igualdades aproximadas seguintes, com precisão de até os termos de ordem x^2:

a) $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$;

b) $\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a}$ $(a > 0)$;

c) $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ (n é número natural);

d) $\lg(1 + x) \approx Mx$,

onde $M = \lg e = 0{,}43429 \ldots$

Partindo destas fórmulas, calcular aproximadamente:

1) $\frac{1}{1{,}02}$; 2) $\frac{1}{0{,}97}$; 3) $\frac{1}{105}$; 4) $\sqrt{15}$; 5) $1{,}04^3$; 6) $0{,}93^4$; 7) $\lg 1{,}1$.

Comparar os valores obtidos com os fornecidos nas tabelas.

302. Demonstrar que, quando $x \to \infty$, a função racional inteira

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

é uma grandeza infinita, equivalente ao termo superior $a_0 x^n$.

303. Seja $x \to \infty$. Tendo x como grandeza infinita de 1ª. ordem, determinar a ordem de crescimento das funções:

a) $x^2 - 100x - 1\,000$;

b) $\dfrac{x^5}{x+2}$;

c) $\sqrt{x+\sqrt{x}}$;

d) $\sqrt[3]{x-2x^2}$.

§ 5. Continuidade das funções

1°. **Definição de continuidade.** A função $f(x)$ é *contínua*, quando $x = \xi$ (ou "no ponto ξ"), se: 1) esta função é determinada no ponto ξ, isto é, existe um número $f(\xi)$; 2) existe o limite finito $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)$; 3) este limite é igual ao valor da função no ponto ξ, isto é:

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi). \tag{1}$$

Supondo-se que:

$$x = \xi + \Delta\xi,$$

onde $\Delta\xi \to 0$, podemos escrever a condição (1) da seguinte forma:

$$\lim_{\Delta\xi\to 0} \Delta f(\xi) = \lim_{\Delta\xi\to 0} [f(\xi+\Delta\xi) - f(\xi)] = 0, \tag{2}$$

isto é, a função $f(x)$ é contínua no ponto ξ, quando, e somente quando, neste ponto, a um incremento infinitésimo do argumento, corresponde um incremento infinitésimo da função.

Se a função é contínua em qualquer ponto de um campo determinado (intervalo, segmento, etc.), então, ela é *contínua neste campo*.

Exemplo 1. Demonstrar que a função

$$y = \operatorname{sen} x$$

é contínua para qualquer valor do argumento x.

Solução. Temos:

$$\Delta y = \operatorname{sen}(x+\Delta x) - \operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \Delta x.$$

Como

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1 \quad \text{e} \quad \left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leqslant 1,$$

então, para qualquer valor de x, teremos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Portanto, a função sen x é contínua para $-\infty < x < +\infty$.

2°. **Pontos de descontinuidade da função.** Uma função $f(x)$ é descontínua no valor $x = x_0$ (ou no ponto x_0) do campo de definição da função ou no limite a este campo, se, neste ponto, se violar a condição de continuidade desta função.

Exemplo 2. A função $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ (fig. 10, *a*) é descontínua, quando $x = 1$. Esta função não está definida no ponto $x = 1$ e qualquer que seja o número $f(1)$ escolhido, a função completada $f(x)$ não será contínua, quando $x = 1$.

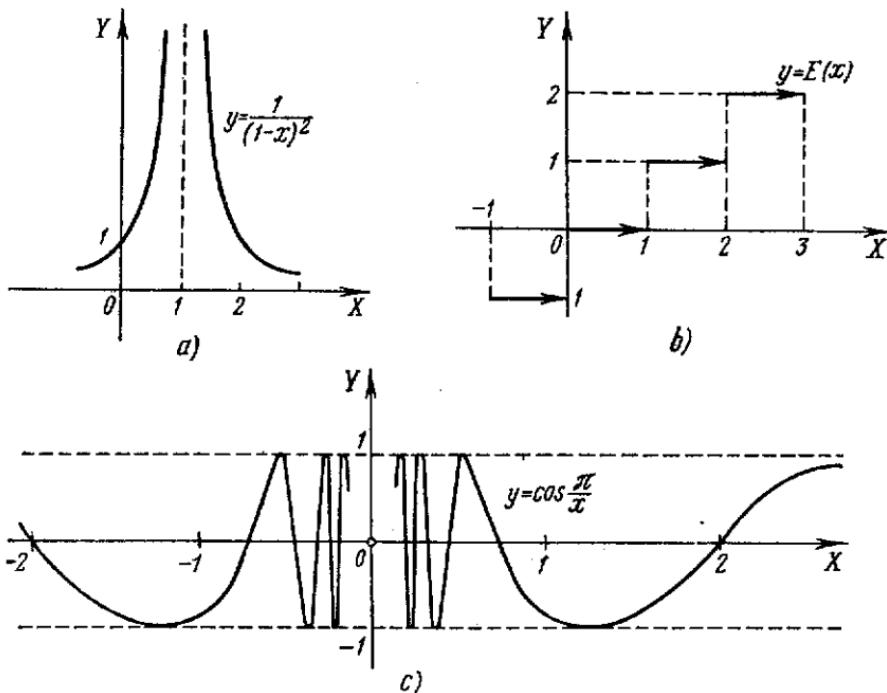



FIG. 10

Se para a função $f(x)$ existirem limites *finitos*:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0),$$

sendo, que os três números $f(x_0)$, $f(x_0 - 0)$ e $f(x_0 + 0)$ não são iguais entre si, então, x_0 denomina-se *ponto de descontinuidade de 1ª. espécie*. Em particular, se

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0),$$

então, x_0 denomina-se *ponto de descontinuidade evitável*.

Para que a função $f(x)$ seja contínua no ponto x_0, é necessário e suficiente, que

$$f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0).$$

Exemplo 3. A função $f(x) = \frac{\text{sen } x}{|x|}$ tem descontinuidade de 1ª. espécie, quando $x = 0$. De fato, temos

$$f(+0) = \lim_{x\to+0} \frac{\text{sen } x}{x} = +1$$

e

$$f(-0) = \lim_{x\to-0} \frac{\text{sen } x}{-x} = -1.$$

Exemplo 4. A função $y = E(x)$, onde $E(x)$ representa a parte inteira do número x (isto é, $E(x)$ é o número inteiro que satisfaz a igualdade $x = E(x) + q$, onde $0 \leqslant q < 1$), é descontínua (fig. 10, *b*) em cada ponto inteiro: $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, onde todos os pontos de descontinuidade são de 1ª. espécie.

De fato, se n é um número inteiro, então, $E(n-0) = n-1$ e $E(n+0) = n$. É evidente, que em todos os demais pontos esta função é contínua.

Os pontos de descontinuidade da função, que não são de 1ª. espécie, são chamados de *pontos de descontinuidade de 2ª. espécie.*

São, também, pontos de descontinuidade de 2ª, espécie os *pontos de descontinuidade infinita,* isto é, os pontos x_0 para os quais, pelo menos um dos limites laterais $f(x_0 - 0)$ ou $f(x_0 + 0)$ seja igual a ∞ (ver o exemplo 2).

Exemplo 5. A função $y = \cos \frac{\pi}{x}$ (fig. 10, *c*) no ponto $x = 0$ tem uma descontinuidade de 2ª. espécie, já que não existem os dois limites laterais:

$$\lim_{x\to-0} \cos \frac{\pi}{x} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+0} \cos \frac{\pi}{x}.$$

3°. **Propriedades da função contínua.** Ao analizar as funções para determinar se as mesmas são contínuas ou não, deve-se considerar os siguintes teoremas:

1) A soma e o produto de um número limitado de funções contínuas em um campo determinado é, por sua vez, uma função contínua neste mesmo campo;

2) o quociente da divisão de duas funções contínuas em um campo determinado é, também, una função contínua para todos os valores do argumento deste mesmo campo, que não anulam o denominador;

3) se a função $f(x)$ é contínua no intervalo (a, b), estando o conjunto de seus valores compreendido no intervalo (A, B), e a função $\varphi(x)$ é contínua no intervalo (A, B), então, a função composta $\varphi[f(x)]$, também, é contínua no intervalo (a, b).

A função $f(x)$, contínua no segmento $[a, b]$, possue as seguintes propriedades:

1) $f(x)$ está compreendida em $[a, b]$, isto é, existe um certo número M tal, que $|f(x)| \leqslant M$ para $a \leqslant x \leqslant b$;

2) $f(x)$ atinge em $[a, b]$ seus valores máximo e mínimo;

3) $f(x)$ toma todos os valores intermédios entre os dados, isto é, se $f(\alpha) = A$ e $f(\beta) = B (a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b)$ e $A \neq B$, então, qualquer que seja o número C, compreendido entre A e B, existe, pelo menos, um valor de $x = \gamma (\alpha < \gamma < \beta)$ tal, que $f(\gamma) = C$.

Em particular, se $f(\alpha)\, f(\beta) < 0$, a equação

$$f(x) = 0$$

tem no intervalo (α, β), pelo menos, uma raiz real.

304. Demonstrar que a função $y = x^2$ é contínua para qualquer valor do argumento x.

305. Demonstrar que a função racional inteira,

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

é contínua para qualquer valor de x.

306. Demonstrar que a função racional fracionária

$$R(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}$$

é contínua para todos os valores de x, com exceção dos que anulam o denominador.

307*. Demonstrar que a função $y = \sqrt{x}$ é contínua, quando $x \geqslant 0$.

308. Demonstrar que se a função $f(x)$ é contínua e não é negativa no intervalo (a, b), então, a função,

$$F(x) = \sqrt{f(x)},$$

também, é contínua neste intervalo.

309*. Demonstrar que a função $y = \cos x$ é contínua para qualquer valor de x.

310. Para que valores de x serão contínuas as funções: a) $\operatorname{tg} x$ e b) $\operatorname{ctg} x$?

311*. Demonstrar que a função $y = |x|$ é contínua. Construir o gráfico desta função.

312. Demonstrar que a grandeza absoluta de uma função contínua é, também, uma função contínua.

313. Uma função é dada pelas fórmulas:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{quando } x \neq 2. \\ A & \text{quando } x = 2. \end{cases}$$

Como deve-se escolher o valor da função $A = f(2)$, para que a função $f(x)$ completada desta forma seja contínua, quando $x = 2$? Construir o gráfico da função $y = f(x)$.

314. O segundo membro da igualdade,

$$f(x) = 1 - x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

carece de sentido, quando $x = 0$. Como escolher o valor de $f(0)$, para que a função $f(x)$ seja contínua, quando $x = 0$?

315. A função

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x - 2}$$

carece de sentido, quando $x = 2$. É possível escolher um valor de $f(2)$ tal, que a função completada seja contínua, quando $x = 2$?

316. A função $f(x)$ é indeterminada, quando $x = 0$. Determinar $f(0)$ de forma que $f(x)$ seja contínua, quando $x = 0$, se:

a) $f(x) = \dfrac{(1 + x)^n - 1}{x}$ (n é número natural);

b) $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$;

c) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x}$;

d) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$;

e) $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$;

f) $f(x) = x \operatorname{ctg} x$.

Verificar se as funções seguintes são contínuas:

317. $y = \dfrac{x^2}{x-2}$.

318. $y = \dfrac{1+x^3}{1+x}$.

319. $y = \dfrac{\sqrt{7+x} - 3}{x^2 - 4}$.

320. $y = \dfrac{x}{|x|}$.

321. a) $y = \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}$; b) $y = x \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}$.

322. $y = \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$.

323. $y = \ln(\cos x)$.

324. $y = \ln\left|\operatorname{tg} \dfrac{x}{2}\right|$.

325. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$.

326. $y = (1+x) \operatorname{arctg} \dfrac{1}{1-x^2}$.

327. $y = e^{\frac{1}{x+1}}$.

328. $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

329. $y = \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}}$.

330. $y = \begin{cases} x^2 & \text{quando } x \leqslant 3, \\ 2x+1 & \text{quando } x > 3. \end{cases}$ Construir o gráfico desta função.

331. Demonstrar que a função de Dirichlet $\chi(x)$, igual a zero, quando x é irracional e igual a 1, quando x é racional, é descontínua para cada valor de x. Verificar se as seguintes funções são contínuas e construir o gráfico das mesmas:

332. $y = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{1+x^n}$ $(x \geqslant 0)$.

333. $y = \lim\limits_{n \to \infty} (x \operatorname{arctg} nx)$.

334. a) $y = \operatorname{sgn} x$, b) $y = x \operatorname{sgn} x$, c) $y = \operatorname{sgn}(\operatorname{sen} x)$, onde a função $\operatorname{sgn} x$ é determinada pelas fórmulas:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

335. a) $y = x - E(x)$, b) $y = xE(x)$, onde $E(x)$ é a parte inteira do número x.

336. Dar um exemplo, o qual demonstre, que a soma de duas funções descontínuas pode ser uma função contínua.

337*. Seja α uma fração própria positiva que tende a zero $(0 < \alpha < 1)$. Pode-se colocar na igualdade

$$E(1 + \alpha) = E(1 - \alpha) + 1,$$

que se verifica para todos os valores de α, o limite do valor α?

338. Demonstrar que a equação

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

tem uma raiz real no intervalo $(1, 2)$. Calcular, aproximadamente, esta raiz.

339*. Demonstrar que qualquer polinômio $P(x)$ de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real.

340. Demonstrar que a equação

$$\operatorname{tg} x = x$$

tem uma infinidade de raízes reais.

Capítulo II

DIFERENCIAÇÃO DAS FUNÇÕES

§ 1. Cálculo direto das derivadas

1°. **Acréscimo do argumento e acréscimo da função.** Se x e x_1 são valores do argumento x e $y = f(x)$ e $y_1 = f(x_1)$, os valores correspondentes da função $y = f(x)$, então,

$$\Delta x = x_1 - x$$

é denominado de *acréscimo do argumento* x no segmento $[x, x_1]$ e

$$\Delta y = y_1 - y$$

ou, ainda,

$$\Delta y = f(x_1) - f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \tag{1}$$

é denominado de *acréscimo da função* y neste mesmo segmento $[x, x_1]$ (fig. 11, onde $\Delta x = MA$ e $\Delta y = AN$). A razão

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha$$

representa o coeficiente angular da secante MN do gráfico da função $y = f(x)$ (fig. 11) e se chama *velocidade média* de variação da função y no segmento $[x, x + \Delta x]$.

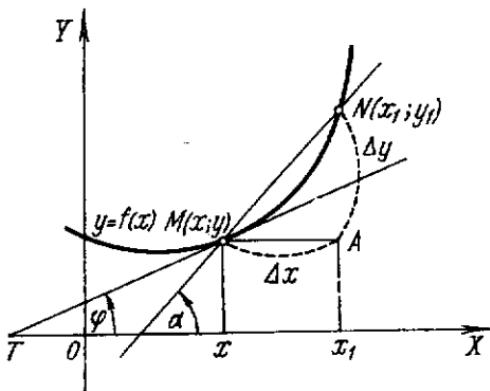



FIG. 11

Exemplo 1. Calcular Δx e Δy para a função

$$y = x^2 - 5x + 6,$$

que correspondem às seguintes variações do argumento:

a) de $x = 1$ a $x = 1,1$;
b) de $x = 3$ a $x = 2$.

Solução. Temos:

a) $\Delta x = 1,1 - 1 = 0,1$,
$\Delta y = (1,1^2 - 5 \cdot 1,1 + 6) - (1^2 - 5 \cdot 1 + 6) = -0,29$;
b) $\Delta x = 2 - 3 = -1$,
$\Delta y = (2^2 - 5 \cdot 2 + 6) - (3^2 - 5 \cdot 3 + 6) = 0$.

Exemplo 2. Achar para a hipérbole $y = \frac{1}{x}$ o coeficiente angular da secante que passa por pontos, cujas abscissas são $x = 3$ e $x_1 = 10$.

Solução. Temos $\Delta x = 10 - 3 = 7$; $y' = \frac{1}{3}$; $y_1 = \frac{1}{10}$; $\Delta y = \frac{1}{10} - \frac{1}{3} = -\frac{7}{30}$. Por conseguinte, $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{30}$.

2°. **Derivada.** Chama-se *derivada* $y' = \frac{dy}{dx}$ da função $y = f(x)$ no ponto x, o limite da razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, quando Δx tende a zero, isto é,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

se este limite existe.

O valor da derivada fornece o *coeficiente angular* da tangente MT, até o gráfico da função $y = f(x)$ no ponto x (fig. 11):

$$y' = \operatorname{tg} \varphi.$$

A operação para achar a derivada y' denomina-se *derivação da função*. A derivada $y' = f'(x)$ representa a *velocidade de variação da função* no ponto x.

Exemplo 3. Achar a derivada da função

$$y = x^2.$$

Solução. Aplicando a fórmula (1), teremos:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

e

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Portanto,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

3°. **Derivadas laterais.** As expressões

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

e

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

chamam-se, respectivamente, *derivadas da esquerda* e *da direita* da função $f(x)$ no ponto x. Para que exista $f'(x)$, é necessário e suficiente, que

$$f'_-(x) = f'_+(x).$$

Exemplo 4. Achar $f'_{-}(0)$ e $f'_{+}(0)$ para a função:

$$f(x) = |x|.$$

Solução. Por definição temos que:

$$f'_{-}(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1, \qquad f'_{+}(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1.$$

4°. Derivada infinita. Se em um ponto determinado temos, que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \infty,$$

diz-se que a função contínua $f(x)$ tem derivada infinita no ponto x. Neste caso, a tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ será perpendicular ao eixo OX.

Exemplo 5. Achar $f'(0)$ para a função

$$y = \sqrt[3]{x}.$$

Solução. Temos:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = \infty.$$

341. Achar o acréscimo da função $y = x^2$, correspondente à transposição do argumento:

a) de $x = 1$ a $x_1 = 2$;

b) de $x = 1$ a $x_1 = 1,1$;

c) de $x = 1$ a $x_1 = 1 + h$.

342. Achar Δy para a função $y = \sqrt[3]{x}$, se:

a) $x = 0, \quad \Delta x = 0,001$;

b) $x = 8, \quad \Delta x = -9$;

c) $x = a, \quad \Delta x = h$.

343. Por que, para a função $y = 2x + 3$ pode-se determinar o acréscimo Δy, sabendo-se, apenas, que o acréscimo correspondente é $\Delta x = 5$, enquanto que para a função $y = x^2$ não se pode fazê-lo?

344. Achar o acréscimo Δy e a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para as funções:

a) $y = \frac{1}{(x^2 - 2)^2}$, quando $x = 1$ e $\Delta x = 0,4$;

b) $y = \sqrt{x}$, quando $x = 0$ e $\Delta x = 0,0001$;

c) $y = \lg x$, quando $x = 100\,000$ e $\Delta x = -90\,000$.

345. Achar Δy e $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ correspondentes à variação do argumento de x até $x + \Delta x$ para as funções:

a) $y = ax + b$; d) $y = \sqrt{x}$;

b) $y = x^3$; e) $y = 2^x$;

c) $y = \frac{1}{x^2}$; f) $y = \ln x$.

346. Achar o coeficiente angular da secante à parábola

$$y = 2x - x^2,$$

se as abscissas dos pontos de interseção são iguais a:

a) $x_1 = 1, \quad x_2 = 2;$

b) $x_1 = 1, \quad x_2 = 0,9;$

c) $x_1 = 1, \quad x_2 = 1 + h.$

A que limite tende o coeficiente angular da secante no último caso, se $h \to 0$?

347. Qual é a velocidade média de variação da função $y = x^3$ no segmento $1 \leqslant x \leqslant 4$?

348. A lei de movimento do ponto é $s = 2t^2 + 3t + 5$, onde a distância s é dada em centímetros e o tempo t, em segundos. Qual será a velocidade média do ponto durante o intervalo de tempo de $t = 1$ a $t = 5$?

349. Achar a pendente média da curva $y = 2^x$ no segmento $1 \leqslant x \leqslant 5$.

350. Achar a pendente média da curva $y = f(x)$ no segmento $[x, x + \Delta x]$.

351. Que se entende por pendente da curva $y = f(x)$ no ponto x dado?

352. Definir: a) velocidade média de rotação; b) velocidade instantânea de rotação.

353. Um corpo aquecido esfria-se quando colocado num meio, cuja temperatura seja menor. O que se entende por: a) velocidade média de esfriamento; b) velocidade de esfriamento num momento dado?

354. O que se entende por velocidade de reação de uma substância em uma reação química?

355. Seja $m = f(x)$ a massa de uma barra heterogênea no segmento $[0,x]$. Que se entende por: a) densidade linear média da barra no segmento $[x, x + \Delta x]$; b) densidade linear da barra no ponto x?

356. Achar a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para a função $y = \frac{1}{x}$ no ponto $x = 2$, se: a) $\Delta x = 1$; b) $\Delta x = 0,1$; c) $\Delta x = 0,01$. Qual será a derivada y', quando $x = 2$?

357.** Achar a derivada da função $y = \operatorname{tg} x$.

358. Achar $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ para as funções:

a) $y = x^3$; c) $y = \sqrt{x}$;

b) $y = \frac{1}{x^2}$; d) $y = \operatorname{ctg} x$.

359.** Calcular $f'(8)$, se $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

360. Achar $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$, se $f(x) = x(x-1)^2(x-2)^3$.

361*. Em que pontos a derivada da função $f(x) = x^3$ coincide, numericamente, com o valor da própria função, isto é, $f(x) = f'(x)$?

362. A lei de movimento do ponto é $s = 5t^2$, onde a distância s é dada em metros e o tempo t, em segundos. Achar a velocidade de movimento no instante $t = 3$.

363. Achar o coeficiente angular da tangente em relação à curva $y = 0{,}1\, x^3$, traçada no ponto com abscissa $x = 2$.

364. Achar o coeficiente angular da tangente à curva $y = \operatorname{sen} x$ no ponto $(\pi;\ 0)$.

365. Achar o valor da derivada da funçao $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $x = x_0 (x_0 \neq 0)$.

366*. A que são iguais os coeficientes angulares das tangentes às curvas $y = \frac{1}{x}$ e $y = x^2$ no ponto de sua interseção? Achar o ângulo entre estas tangentes.

367.** Demonstrar que as funções seguintes não têm derivadas finitas nos pontos indicados:

a) $y = \sqrt[3]{x^2}$ no ponto $x = 0$; b) $y = \sqrt[5]{x - 1}$ no ponto $x = 1$;

c) $y = |\cos x|$ nos pontos $x = \frac{2k+1}{2}\pi$ $(k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots)$.

§ 2. Derivação por tabelas

1°. Regras principais para achar-se a derivada. Se c é uma constante e $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ são funções que possuem derivadas, então:

1) $(c)' = 0$; 2) $(x)' = 1$;

3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$; 4) $(cu)' = cu'$;

5) $(uv)' = u'v + v'u$;

6) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ $(v \neq 0)$;

7) $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$.

2°. Tabela das derivadas das funções principais:

I. $(x^n)' = nx^{n-1}$. II. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$.

III. $(\sin x)' = \cos x$. IV. $(\cos x)' = -\sin x$.

V. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. VI. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$.

VII. $(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $(|x| < 1)$.

VIII. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$.

IX. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$. X. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{x^2+1}$.

XI. $(a^x)' = a^x \ln a$ $(a > 0)$. XII. $(e^x)' = e^x$.

XIII. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$.

XIV. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x}$ $(x > 0, \quad a > 0)$.

XV. $(\operatorname{senh} x)' = \cosh x$. XVI. $(\cosh x)' = \operatorname{senh} x$.

XVII. $(\operatorname{tgh} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$.

XVIII. $(\operatorname{ctgh} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$. XIX. $(\operatorname{Arsenh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

XX. $(\operatorname{Arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $(|x| > 1)$.

XXI. $(\operatorname{Artgh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$ $(|x| < 1)$.

XXII. $(\operatorname{Arctgh} x)' = -\frac{1}{x^2-1}$ $(|x| > 1)$.

3°. **Regra de derivação de uma função composta.** Se $y = f(u)$ e $u = \varphi(x)$, isto é, $y = f[\varphi(x)]$, onde as funções y e u possuem derivadas, então,

$$y'_x = y'_u u'_x \tag{1}$$

ou, de outra forma,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Esta regra pode ser aplicada à cadeia de qualquer número finito de funções que podem ser derivadas.

Exemplo 1. Achar a derivada da função

$$y = (x^2 - 2x + 3)^5.$$

Solução. Supondo, que $y = u^5$, onde $u = x^2 - 2x + 3$, de acordo com a fórmula (1) teremos:

$$y' = (u^5)'_u (x^2 - 2x + 3)'_x = 5u^4(2x - 2) = 10(x - 1)(x^2 - 2x + 3)^4.$$

Exemplo 2. Achar a derivada da função

$$y = \operatorname{sen}^3 4x.$$

Solução. Supondo que

$$y = u^3; \quad u = \operatorname{sen} v; \quad v = 4x,$$

teremos:

$$y' = 3u^2 \cdot \cos v \cdot 4 = 12 \operatorname{sen}^2 4x \cos 4x.$$

Achar as derivadas das seguintes funções (nos n°s. 368 — 408 não se aplica a regra de derivação de funções compostas):

A. Funções algébricas

368. $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3.$

369. $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0{,}5x^4.$

370. $y = ax^2 + bx + c.$

371. $y = -\frac{5x^3}{a}.$

372. $y = at^m + bt^{m+n}$

373. $y = \frac{ax^6 + b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$

374. $y = \frac{\pi}{x} + \ln 2.$

375. $y = 3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{5}{2}} + x^{-3}.$

376*. $y = x^2\sqrt[3]{x^2}.$

377. $y = \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{b}{x\sqrt[3]{x}}.$

378. $y = \frac{a + bx}{c + dx}.$

379. $y = \frac{2x + 3}{x^2 - 5x + 5}.$

380. $y = \frac{2}{2x - 1} - \frac{1}{x}.$

381. $y = \frac{1 + \sqrt{z}}{1 - \sqrt{z}}.$

B. Funções trigonométricas e circulares inversas

382. $y = 5 \operatorname{sen} x + 3 \cos x.$

383. $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x.$

384. $y = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}.$

385. $y = 2t \operatorname{sen} t - (t^2 - 2) \cos t.$

386. $y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x.$

387. $y = x \operatorname{ctg} x.$

388. $y = x \operatorname{arcsen} x.$

389. $y = \frac{(1 + x^2) \operatorname{arctg} x - x}{2}.$

C. Funções exponenciais e logarítmicas

390. $y = x^7 \cdot e^x.$

391. $y = (x - 1)\, e^x.$

392. $y = \frac{e^x}{x^2}.$

393. $y = \frac{x^5}{e^x}.$

394. $f(x) = e^x \cos x.$

395. $y = (x^2 - 2x + 2)\, e^x.$

396. $y = e^x \operatorname{arcsen} x.$

397. $y = \frac{x^2}{\ln x}.$

398. $y = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3}.$

399. $y = \frac{1}{x} + 2 \ln x - \frac{\ln x}{x}.$

400. $y = \ln x \lg x - \ln a \log_a x.$

D. Funções hiperbólicas e hiperbólicas inversas

401. $y = x \operatorname{senh} x.$

402. $y = \frac{x^2}{\cosh x}.$

403. $y = \operatorname{tgh} x - x.$

404. $y = \frac{3 \operatorname{ctgh} x}{\ln x}.$

405. $y = \operatorname{arctg} x - \operatorname{Artgh} x.$

406. $y = \operatorname{arcsen} x \operatorname{Arsenh} x.$

407. $y = \frac{\operatorname{Arctgh} x}{x}.$

408. $y = \frac{\operatorname{Arctgh} x}{1 - x^2}.$

E. Funções compostas

Achar as derivadas das seguintes funções (nos n°s. 409 — 466 é necessário aplicar a regra de derivação de funções compostas com um argumento intermédio):

409. $y = (1 + 3x - 5x^2)^{30}$.

Solução. Designemos $1 + 3x - 5x^2 = u$; então, $y = u^{30}$. Temos:

$y'_u = 30\,u^{29}$, $u'_x = 3 - 10x$;

$y'_x = 30\,u^{29} \cdot (3 - 10x) = 30(1 + 3x - 5x^2)^{29} \cdot (3 - 10x)$.

410. $y = \left(\frac{ax + b}{c}\right)^3$.

411. $f(y) = (2a + 3by)^2$.

412. $y = (3 + 2x^2)^4$.

413. $y = \frac{3}{56(2x - 1)^7} - \frac{1}{24(2x - 1)^6} - \frac{1}{40\,(2x - 1)^5}$.

414. $y = \sqrt{1 - x^2}$.

415. $y = \sqrt[3]{a + bx^3}$.

416. $y = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$.

417. $y = (3 - 2\,\text{sen}\,x)^5$.

Solução. $y' = 5(3 - 2\,\text{sen}\,x)^4 \cdot (3 - 2\,\text{sen}\,x)' =$
$= 5(3 - 2\,\text{sen}\,x)^4\,(-2\cos x) = -10\cos x(3 - 2\,\text{sen}\,x)^4$.

418. $y = \text{tg}\,x - \frac{1}{3}\,\text{tg}^3 x + \frac{1}{5}\,\text{tg}^5\,x$.

419. $y = \sqrt{\text{ctg}\,x} - \sqrt{\text{ctg}\,\alpha}$.

420. $y = 2x + 5\cos^3 x$.

421*. $x = \text{cosec}^2\,t + \sec^2 t$.

422. $f(x) = -\frac{1}{6(1 - 3\cos x)^2}$.

423. $y = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x}$.

424. $y = \sqrt{\frac{3\,\text{sen}\,x - 2\cos x}{5}}$.

425. $y = \sqrt[3]{\text{sen}^2\,x} + \frac{1}{\cos^3 x}$.

426. $y = \sqrt{1 + \text{arcsen}\,x}$.

427. $y = \sqrt{\text{arctg}\,x} - (\text{arcsen}\,x)^3$.

428. $y = \frac{1}{\text{arctg}\,x}$.

429. $y = \sqrt{xe^x + x}$.

430. $y = \sqrt[3]{2e^x - 2^x + 1} + \ln^5 x$.

431. $y = \text{sen}\,3x + \cos\frac{x}{5} + \text{tg}\,\sqrt{x}$.

Solução. $y' = \cos 3x \cdot (3x)' - \text{sen}\,\frac{x}{5}\left(\frac{x}{5}\right)' + \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\,(\sqrt{x})' =$

$$= 3\cos 3x - \frac{1}{5}\,\text{sen}\,\frac{x}{5} + \frac{1}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}.$$

432. $y = \operatorname{sen}(x^2 - 5x + 1) + \operatorname{tg}\frac{a}{x}$.

433. $f(x) = \cos(\alpha x + \beta)$.

434. $f(t) = \operatorname{sen} t \operatorname{sen}(t + \varphi)$.

435. $y = \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$.

436. $f(x) = a \operatorname{ctg}\frac{x}{a}$.

437. $y = -\frac{1}{20}\cos(5x^2) - \frac{1}{4}\cos x^2$.

438. $y = \operatorname{arcsen} 2x$.

Solução. $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - (2x)^2}} \cdot (2x)' = \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}}$.

439. $y = \operatorname{arcsen}\frac{1}{x^2}$.

440. $f(x) = \arccos\sqrt{x}$.

441. $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

442. $y = \operatorname{arcctg}\frac{1 + x}{1 - x}$.

443. $y = 5e^{-x^2}$.

444. $y = \frac{1}{5^{x^2}}$.

445. $y = x^2 10^{2x}$.

446. $f(t) = t \operatorname{sen} 2^t$.

447. $y = \arccos e^x$.

448. $y = \ln(2x + 7)$.

449. $y = \lg \operatorname{sen} x$.

450. $y = \ln(1 - x^2)$.

451. $y = \ln^2 x - \ln(\ln x)$.

452. $y = \ln(e^x + 5 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{arcsen} x)$.

453. $y = \operatorname{arctg}(\ln x) + \ln(\operatorname{arctg} x)$.

454. $y = \sqrt{\ln x + 1} + \ln(\sqrt{x} + 1)$.

F. Funções diversas

455.** $y = \operatorname{sen}^3 5x \cos^2\frac{x}{3}$.

456. $y = -\frac{11}{2(x - 2)^2} - \frac{4}{x - 2}$.

457. $y = -\frac{15}{4(x - 3)^4} - \frac{10}{3(x - 3)^3} - \frac{1}{2(x - 3)^2}$.

458. $y = \frac{x^8}{8(1 - x^2)^4}$.

459. $y = \frac{\sqrt{2x^2 - 2x + 1}}{x}$.

460. $y = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2 + x^2}}$.

461. $y = \frac{x^3}{3\sqrt{(1 + x^2)^3}}$.

462. $y = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{18}{7}x\sqrt[6]{x} + \frac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2} + \frac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x}$.

463. $y = \frac{1}{8}\sqrt[3]{(1 + x^3)^8} - \frac{1}{5}\sqrt[3]{(1 + x^3)^5}$.

464. $y = \frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x - 1}{x + 2}}$.

465. $y = x^4(a - 2x^3)^2$.

466. $y = \left(\frac{a + bx^n}{a - bx^n}\right)^m$.

467. $y = \frac{9}{5(x+2)^5} - \frac{3}{(x+2)^4} + \frac{2}{(x+2)^3} - \frac{1}{2(x+2)^2}$.

468. $y = (a+x)\sqrt{a-x}$.

469. $y = \sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}$.

470. $z = \sqrt[3]{y+\sqrt{y}}$.

471. $f(t) = (2t+1)(3t+2)\sqrt[3]{3t+2}$.

472. $x = \frac{1}{\sqrt{2ay-y^2}}$.

473. $y = \ln(\sqrt{1+e^x}-1) - \ln(\sqrt{1+e^x}+1)$.

474. $y = \frac{1}{15}\cos^3 x(3\cos^2 x - 5)$.

475. $y = \frac{(\mathrm{tg}^2 x - 1)(\mathrm{tg}^4 x + 10\,\mathrm{tg}^2 x + 1)}{3\,\mathrm{tg}^3 x}$.

476. $y = \mathrm{tg}^2\, 5x$.

477. $y = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,(x^2)$.

478. $y = \mathrm{sen}^2\,(t^3)$.

479. $y = 3\,\mathrm{sen}\,x\cos^2 x + \mathrm{sen}^3\,x$.

480. $y = \frac{1}{3}\,\mathrm{tg}^3 x - \mathrm{tg}\,x + x$.

481. $y = -\frac{\cos x}{3\,\mathrm{sen}^3 x} + \frac{4}{3}\,\mathrm{ctg}\,x$.

482. $y = \sqrt{\alpha\,\mathrm{sen}^2\,x + \beta\cos^2 x}$.

483. $y = \mathrm{arcsen}\,x^2 + \arccos x^2$.

484. $y = \frac{1}{2}(\mathrm{arcsen}\,x)^2 \arccos x$.

485. $y = \mathrm{arcsen}\,\frac{x^2-1}{x^2}$.

486. $y = \mathrm{arcsen}\,\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

487. $y = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$.

488. $y = \frac{1}{\sqrt{b}}\,\mathrm{arcsen}\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$.

489. $y = \sqrt{a^2-x^2} + a\,\mathrm{arcsen}\,\frac{x}{a}$.

490. $y = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\,\mathrm{arcsen}\,\frac{x}{a}$.

491. $y = \mathrm{arcsen}\,(1-x) + \sqrt{2x-x^2}$.

492. $y = \left(x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{arcsen}\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}$.

493. $y = \ln(\mathrm{arcsen}\,5x)$.

494. $y = \mathrm{arcsen}\,(\ln x)$.

495. $y = \mathrm{arctg}\,\frac{x\,\mathrm{sen}\,\alpha}{1-x\cos\alpha}$.

496. $y = \frac{2}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{5\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+4}{3}$.

497. $y = 3b^2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x}{b-x}} - (3b+2x)\sqrt{bx-x^2}$.

498. $y = -\sqrt{2}\,\mathrm{arcctg}\,\frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{2}} - x$.

499. $y = \sqrt{e^{ax}}$.

500. $y = e^{\mathrm{sen}^2 x}$.

501. $F(x) = (2\,ma^{mx} + b)^p$.

502. $F(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t$.

503. $y = \frac{(\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta x - \beta\cos\beta x)\,e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}$.

504. $y = \frac{1}{10}e^{-x}(3\,\mathrm{sen}\,3x - \cos 3x)$.

505. $y = x^n a^{-x^2}$.

506. $y = \sqrt{\cos x}\, a^{\sqrt{\cos x}}$.

507. $y = 3^{\operatorname{ctg}\frac{1}{x}}$.

508. $y = \ln (ax^2 + bx + c)$.

509. $y = \ln (x + \sqrt{a^2 + x^2})$.

510. $y = x - 2\sqrt{x} + 2 \ln (1 + \sqrt{x})$.

511. $y = \ln (a + x + \sqrt{2ax + x^2})$.

512. $y = \frac{1}{\ln^2 x}$.

513. $y = \ln \cos \frac{x-1}{x}$.

514*. $y = \ln \frac{(x-2)^5}{(x+1)^3}$.

515. $y = \ln \frac{(x-1)^3 (x-2)}{x-3}$.

516. $y = -\frac{1}{2 \operatorname{sen}^2 x} + \ln \operatorname{tg} x$.

517. $y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln (x + \sqrt{x^2 - a^2})$.

518. $y = \ln \ln (3 - 2x^3)$.

519. $y = 5 \ln^3(ax + b)$.

520. $y = \ln \frac{\sqrt{x^2 + a^2} + x}{\sqrt{x^2 + a^2} - x}$.

521. $y = \frac{m}{2} \ln (x^2 - a^2) + \frac{n}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a}$.

522. $y = x \cdot \operatorname{sen}\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right)$.

523. $y = \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$.

524. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \ln \frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x}$.

525. $y = \frac{1}{3} \ln \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x + 1}$.

526. $y = 2^{\operatorname{arcsen} 3x} + (1 - \arccos 3x)^2$.

527. $y = 3^{\frac{\operatorname{sen} ax}{\cos bx}} + \frac{1}{3} \frac{\operatorname{sen}^3 ax}{\cos^3 bx}$.

528. $y = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{1} + 2 - \sqrt{3}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 + \sqrt{3}}$

529. $y = \operatorname{arctg} \ln x$.

530. $y = \ln \operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2} \ln^2 x + \operatorname{arcsen} \ln x$.

531. $y = \operatorname{arctg} \ln \frac{1}{x}$.

532. $y = \frac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6} \ln \frac{x-1}{x+1}$.

533. $y = \ln \frac{1 + \sqrt{\operatorname{sen} x}}{1 - \sqrt{\operatorname{sen} x}} + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{sen} x}$.

534. $y = \frac{3}{4} \ln \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} + \frac{1}{4} \ln \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$.

535. $f(x) = \frac{1}{3}\ln(1+x) - \frac{1}{6}\ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

536. $f(x) = \frac{x \operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\sqrt{1-x^2}$.

537. $y = \operatorname{senh}^3 2x$. **538.** $y = e^{\alpha x}\cosh\beta x$.

539. $y = \operatorname{tgh}^3 2x$. **540.** $y = \ln \operatorname{senh} 2x$.

541. $y = \operatorname{Arsenh}\frac{x^2}{a^2}$. **542.** $y = \operatorname{Arcosh}\ln x$.

543. $y = \operatorname{Artgh}(\operatorname{tg} x)$. **544.** $y = \operatorname{Arctgh}(\sec x)$.

545. $y = \operatorname{Artgh}\frac{2x}{1+x^2}$. **546.** $y = \frac{1}{2}(x^2-1)\operatorname{Artgh} x + \frac{1}{2}x$.

547. $y = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}\right)\operatorname{Arsenh} x - \frac{1}{4}x\sqrt{1+x^2}$.

548. Achar y', se:

a) $y = |x|$;

b) $y = x|x|$.

Construir os gráficos das funções y e y'.

549. Achar y', se

$$y = \ln|x| \quad (x \neq 0).$$

550. Achar $f'(x)$, se

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{quando } x \leqslant 0, \\ e^{-x}, & \text{quando } x > 0. \end{cases}$$

551. Calcular $f'(0)$, se

$$f(x) = e^{-x}\cos 3x.$$

Solução. $f'(x) = e^{-x}(-3\operatorname{sen} 3x) - e^{-x}\cos 3x$;
$f'(0) = e^{0}(-3\operatorname{sen} 0) - e^{0}\cos 0 = -1$.

552. $f(x) = \ln(1+x) + \operatorname{arcsen}\frac{x}{2}$. Achar $f'(1)$.

553. $y = \operatorname{tg}^3\frac{\pi x}{6}$. Achar $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2}$.

554. Achar $f'_+(0)$ e $f'_-(0)$ para as funções:

a) $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen}(x^2)}$;

b) $f(x) = \operatorname{arcsen}\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}$;

c) $f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$, $x \neq 0$; $f(0) = 0$;

d) $f(x) = x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, $x \neq 0$; $f(0) = 0$;

e) $f(x) = x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, $x \neq 0$; $f(0) = 0$.

555. Achar $f(0) + xf'(0)$ para a função $f(x) = e^{-x}$.

556. Achar $f(3) + (x - 3)f'(3)$ para a função $f(x) = \sqrt{1 + x}$.

557. Dadas as funções $f(x) = \operatorname{tg} x$ e $\varphi(x) = \ln(1 - x)$, achar $\frac{f'(0)}{\varphi'(0)}$.

558. Achar $\frac{\varphi'(1)}{f'(1)}$ para as funções $f(x) = 1 - x$ e $\varphi(x) = 1 - \operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}$.

559. Demonstrar que a derivada de uma função par é uma função ímpar e que a de uma função ímpar, é par.

560. Demonstrar que a derivada de uma função periódica é, também, uma função periódica.

561.** Demonstrar que a função $y = xe^{-x}$ satisfaz a equação $xy' = (1 - x)y$.

562. Demonstrar que a função $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ satisfaz a equação $xy' = (1 - x^2)y$.

563. Demonstrar que a função $y = \frac{1}{1 + x + \ln x}$ satisfaz a equação $xy' = y(y \ln x - 1)$.

G. Derivada logarítmica

Chama-se *derivada logarítmica* da função $y = f(x)$ a derivada do logaritmo desta função, isto é,

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

A logaritmação prévia da função facilita, em alguns casos, o cálculo de suas derivadas.

Exemplo. Achar a derivada da função exponencial composta

$$y = u^v,$$

onde $u = \varphi(x) > 0$ e $v = \psi(x)$ são diferenciáveis.

Solução. Tomando o logaritmo, teremos:

$$\ln y = v \ln u.$$

Derivamos ambos os membros da igualdade em relação a x

$$(\ln y)' = v' \ln u + v(\ln u)',$$

ou

$$\frac{1}{y} y' = v' \ln u + v \frac{1}{u} u',$$

donde

$$y' = y\left(v' \ln u + \frac{v}{u} u'\right),$$

ou

$$y' = u^v\left(v' \ln u + \frac{v}{u} u'\right).$$

564. Achar y', se

$$y = \sqrt[3]{x^2}\frac{1-x}{1+x^2}\,\text{sen}^3 x \cos^2 x.$$

Solução. $\ln y = \frac{2}{3}\ln x + \ln(1-x) - \ln(1+x^2) + 3\ln\text{sen}\, x + 2\ln\cos x$;

$$\frac{1}{y}y' = \frac{2}{3}\frac{1}{x} + \frac{(-1)}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + 3\frac{1}{\text{sen}\, x}\cos x - \frac{2\,\text{sen}\, x}{\cos x},$$

donde

$$y' = y\left(\frac{2}{3x} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2}\, 3\,\text{ctg}\, x - 2\,\text{tg}\, x\right).$$

565. Achar y', se $y = (\text{sen}\, x)^x$.

Solução. $\ln y = x\ln\text{sen}\, x$; $\frac{1}{y}y' = \ln\text{sen}\, x + x\,\text{ctg}\, x$;

$$y' = (\text{sen}\, x)^x(\ln\text{sen}\, x + x\,\text{ctg}\, x).$$

Achar y', tomando, previamente, logaritmos para a função $y = f(x)$:

566. $y = (x+1)(2x+1)(3x+1)$.

567. $y = \frac{(x+2)^2}{(x+1)^3(x+3)^4}$.

568. $y = \sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}}$.

569. $y = x\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}$.

570. $y = \frac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$.

571. $y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}}$.

572. $y = x^x$.

573. $y = x^{x^2}$.

574. $y = \sqrt[x]{x}$.

575. $y = x^{\sqrt{x}}$.

576. $y = x^{x^x}$.

577. $y = x^{\text{sen}\, x}$.

578. $y = (\cos x)^{\text{sen}\, x}$.

579. $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

580. $y = (\text{arctg}\, x)^x$.

§ 3. Derivadas de funções que não são dadas explicitamente

1°. **Derivada de função inversa.** Se a derivada da função $y = f(x)$ é $y'_x \neq 0$, então, a derivada da função inversa $x = f^{-1}(y)$ será:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x},$$

ou

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Exemplo 1. Achar a derivada x'_y, se

$$y = x + \ln x.$$

Solução. Temos $y'_x = 1 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x+1}{x}$, portanto,

$$x'_y = \frac{x}{x+1}.$$

2°. **Derivadas de funções dadas em forma paramétrica.** Se a dependência entre a função y e o argumento x é dada através do parâmetro t

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

então,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},$$

ou, ainda,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}.$$

Exemplo 2. Achar $\dfrac{dy}{dx}$, se

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a \operatorname{sen} t. \end{cases}$$

Solução. Encontramos $\dfrac{dx}{dt} = -a\operatorname{sen} t$ e $\dfrac{dy}{dt} = a\cos t$. Daí

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\cos t}{-a\operatorname{sen} t} = -\operatorname{ctg} t.$$

3°. **Derivada da função implícita.** Se a dependência entre x e a função diferenciável y é dada de forma implícita

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

para encontrar-se a derivada $y'_x = y'$, nos casos mais simples, é suficiente: 1) calcular a derivada quanto a x do primeiro membro da equação (1), considerando y função de x; 2) igualar esta derivada a zero, isto é, supor, que

$$\frac{d}{dx} F(x, y) = 0, \tag{2}$$

e 3) resolver a equação obtida em relação a y'.

Exemplo 3. Achar a derivada y'_x, se

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0. \tag{3}$$

Solução. Calculando a derivada do primeiro membro da igualdade (3) e igualando-a a zero, teremos:

$$3x^2 + 3y^2y' - 3a(y + xy') = 0,$$

donde

$$y' = \frac{x^2 - ay}{ax - y^2}.$$

581. Achar a derivada x'_y, se

a) $y = 3x + x^2$;

b) $y = x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} x$;

c) $y = 0,1\, x + e^{\frac{x}{2}}$.

Calcular a derivada $y' = \frac{dy}{dx}$ para as funções y, dadas em forma paramétrica:

582. $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = t^3. \end{cases}$

583. $\begin{cases} x = \frac{1}{t+1}, \\ y = \left(\frac{t}{t+1}\right)^2. \end{cases}$

584. $\begin{cases} x = \frac{2\,at}{1+t^2}, \\ y = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2}. \end{cases}$

585. $\begin{cases} x = \frac{3\,at}{1+t^3}, \\ y = \frac{3\,at^2}{1+t^3}. \end{cases}$

586. $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[3]{t}. \end{cases}$

587. $\begin{cases} x = \sqrt{t^2+1}, \\ y = \frac{t-1}{\sqrt{t^2+1}}. \end{cases}$

588. $\begin{cases} x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t), \\ y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t). \end{cases}$

589. $\begin{cases} x = a \cos^2 t, \\ y = b \operatorname{sen}^2 t. \end{cases}$

590. $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = b \operatorname{sen}^3 t. \end{cases}$

591. $\begin{cases} x = \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}, \\ y = \frac{\operatorname{sen}^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}. \end{cases}$

592. $\begin{cases} x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \operatorname{arcsen} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}. \end{cases}$

593. $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = e^{2t}. \end{cases}$

594. $\begin{cases} x = a\left(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t - \operatorname{sen} t\right), \\ y = a(\operatorname{sen} t + \cos t). \end{cases}$

595. Calcular $\frac{dy}{dx}$, quando $t = \frac{\pi}{2}$, se

$$\begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

Solução. $\frac{dy}{dx} = \frac{a \operatorname{sen} t}{a(1 - \cos t)} = \frac{\operatorname{sen} t}{1 - \cos t}$ e

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{1 - \cos\frac{\pi}{2}} = 1.$$

596. Achar $\frac{dy}{dx}$, quando $t = 1$, se $\begin{cases} x = t \ln t, \\ y = \frac{\ln t}{t}. \end{cases}$

597. Achar $\frac{dy}{dx}$, quando $t = \frac{\pi}{4}$, se $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \operatorname{sen} t. \end{cases}$

598. Demonstrar que a função y, dada pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 2t + 3t^2, \\ y = t^2 + 2t^3, \end{cases}$$

satisfaz a equação:

$$y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3.$$

599. Quando $x = 2$, é justa a igualdade:

$$x^2 = 2x.$$

Pode-se deduzir, portanto, que

$$(x^2)' = (2x'),$$

quando $x = 2$?

600. Seja $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. Pode-se derivar termo a termo a igualdade

$$x^2 + y^2 = a^2?$$

Achar a derivada $y' = \frac{dy}{dx}$ das seguintes funções implícitas y:

601. $2x - 5y + 10 = 0.$

602. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

603. $x^3 + y^3 = a^3.$

604. $x^3 + x^2y + y^2 = 0.$

605. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}.$

606. $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}.$

607. $y^3 = \frac{x - y}{x + y}.$

608. $y - 0{,}3 \operatorname{sen} y = x.$

609. $a \cos^2 (x + y) = b.$

610. $\operatorname{tg} y = xy.$

611. $xy = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$

612. $\operatorname{arctg}(x + y) = x.$

613. $e^y = x + y.$

614. $\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = c.$

615. $\ln y + \frac{x}{y} = c.$ **616.** $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \ln (x^2 + y^2).$

617. $\sqrt{x^2 + y^2} = c \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$ **618.** $x^y = y^x.$

619. Achar y' no ponto M $(1; 1)$, se

$$2y = 1 + xy^3.$$

Solução. Derivando, teremos $2y' = y^3 + 3xy^2y'$. Supondo $x = 1$ e $y = 1$, teremos: $2y' = 1 + 3y'$, donde $y' = -1$.

620. Achar as derivadas y' das funções y nos pontos dados:
a) $(x + y)^3 = 27(x - y)$, quando $x = 2$ e $y = 1$;
b) $ye^y = e^{x+1}$, quando $x = 0$ e $y = 1$;
c) $y^2 = x + \ln \frac{y}{x}$, quando $x = 1$ e $y = 1$.

§ 4. Aplicações geométricas e mecânicas da derivada

1°. **Equações da tangente e da normal.** Da interpretação geométrica da derivada deduz-se, que a *equação da tangente*, em relação à curva $y = f(x)$ ou $F(x, y) = 0$, no ponto $M_0(x_0, y_0)$, é:

$$y - y_0 = y'_0(x - x_0),$$

onde y'_0 é o valor da derivada y', quando $x = x_0$. A reta, que passa pelo ponto de contacto, perpendicularmente à tangente, denomina-se *normal em relação à curva*. Para a normal teremos a seguinte equação:

$$x - x_0 + y'_0(y - y_0) = 0.$$

2°. **Ângulo entre curvas.** Por ângulo, formado entre as curvas:

$$y = f_1(x)$$
e
$$y = f_2(x)$$

em seu ponto comum $M_0(x_0, y_0)$ (fig. 12), entende-se o ângulo ω, que formam entre si as tangentes M_0A e M_0B a estas curvas no ponto M_0.

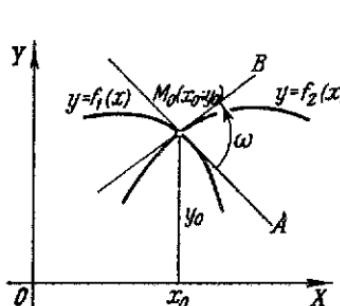
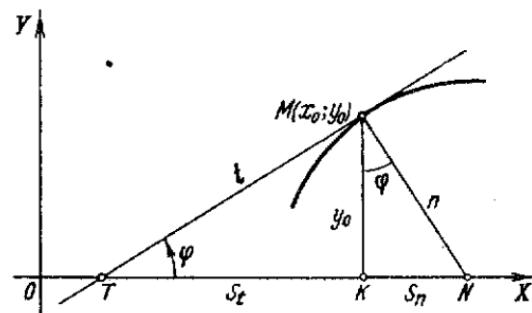



FIG. 12 FIG. 13

De acordo com a conhecida fórmula da Geometria Analítica, teremos:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) \cdot f_2'(x_0)} .$$

3°. Segmentos relacionados com a tangente e a normal no caso de um sistema de coordenadas retangulares. A tangente e a normal determinam os quatro segmentos seguintes (fig. 13):

$t = TM$ — *segmento tangente*,
$S_t = TK$ — *subtangente*,
$n = NM$ — *segmento normal*,
$S_n = KN$ — *subnormal*.

Como $KM = |y_0|$ e $\operatorname{tg}\varphi = y_0'$, então:

$$t = TM = \left|\frac{y_0}{y_0'}\sqrt{1 + (y_0')^2}\right|; \quad n = NM = \left|y_0\sqrt{1 + (y_0')^2}\right|;$$

$$S_t = TK = \left|\frac{y_0}{y_0'}\right|; \qquad S_n = |y_0 y_0'|.$$

4°. Segmentos relacionados com a tangente e a normal no caso de um sistema de coordenadas polares. Se a curva é dada em coordenadas polares pela equação $r = f(\varphi)$, o ângulo μ, formado pela tangente MT e o raio polar $r = OM$ (fig. 14), é determinado pela seguinte fórmula:

$$\operatorname{tg}\mu = r\frac{d\varphi}{dr} = \frac{r}{r'} .$$

A tangente MT e a normal MN no ponto M, junto ao raio polar do ponto de contacto e a perpendicular deste raio, traçada pelo polo O, determinam os quatro segmentos seguintes (ver a fig. 14):

$t = MT$ — *segmento da tangente polar*,
$n = MN$ — *segmento da normal polar*,
$S_t = OT$ — *subtangente polar*,
$S_n = ON$ — *subnormal polar*.

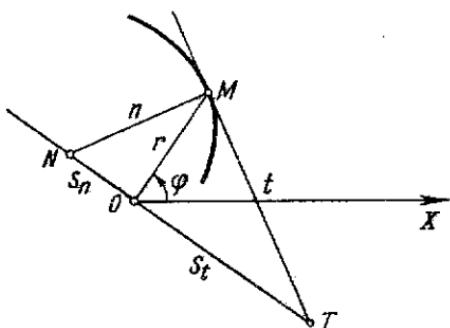
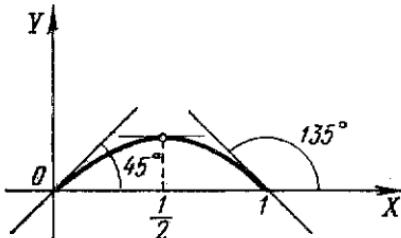



FIG. 14 FIG. 15

Estes segmentos são expressos pelas fórmulas:

$$t = MT = \frac{r}{|r'|}\sqrt{r^2 + (r')^2}; \qquad S_t = OT = \frac{r^2}{|r'|};$$

$$n = MN = \sqrt{r^2 + (r')^2}; \qquad S_n = ON = |r'|.$$

621. Que ângulos φ formam com o eixo OX as tangentes à curva $y = x - x^2$ nos pontos com abscissas: a) $x = 0$; b) $x = \frac{1}{2}$; c) $x = 1$?

Solução. Temos $y' = 1 - 2x$. Donde: a) $\operatorname{tg} \varphi = 1$, $\varphi = 45°$; b) $\operatorname{tg} \varphi = 0$, $\varphi = 0°$; c) $\operatorname{tg} \varphi = -1$, $\varphi = 135°$ (fig. 15).

622. Sob que ângulos, as sinusóides $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \operatorname{sen} 2x$ cortam o eixo das abscissas na origem das coordenadas?

623. Sob que ângulo, a tangentóide $y = \operatorname{tg} x$ corta o eixo das abscissas na origem das coordenadas?

624. Sob que ângulo, a curva $y = e^{0,5x}$ corta a reta $x = 2$?

625. Achar os pontos, em que as tangentes à curva $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$ são paralelas ao eixo das abscissas.

626. Em que ponto, a tangente à parábola

$$y = x^2 - 7x + 3$$

é paralela à reta $5x + y - 3 = 0$?

627. Achar a equação da parábola $y = x^2 + bx + c$, que é tangente à reta $x = y$ no ponto $(1; 1)$.

628. Determinar o coeficiente angular da tangente à curva: $x^3 + y^3 - xy - 7 = 0$ no ponto $(1; 2)$.

629. Em que ponto da curva $y^2 = 2x^3$ a tangente é perpendicular à reta $4x - 3y + 2 = 0$?

630. Escrever a equação da tangente e da normal à parábola

$$y = \sqrt{x},$$

no ponto com abscissa $x = 4$.

Solução. Temos $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; assim, o coeficiente angular da tangente será $k = [y']_{x=4} = \frac{1}{4}$. Como o ponto de contacto tem coordenadas $x = 4$ e $y = 2$, a equação da tangente é $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$, ou $x - 4y + 4 = 0$.

Pela condição de perpendicularidade o coeficiente angular da normal é:

$$k_1 = -4,$$

donde a equação da normal resulta:

$$y - 2 = -4(x - 4), \quad \text{ou} \quad 4x + y - 18 = 0.$$

631. Escrever a equação da tangente e da normal à curva: $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ no ponto $(-2; 5)$.

632. Achar a equação da tangente e da normal à curva

$$y = \sqrt[3]{x - 1}$$

no ponto $(1; 0)$.

633. Compor as equações da tangente e da normal às curvas nos pontos dados:

a) $y = \operatorname{tg} 2x$ na origem das coordenadas;

b) $y = \operatorname{arcsen} \frac{x-1}{2}$ no ponto de interseção com o eixo OX;

c) $y = \arccos 3x$ no ponto de interseção com o eixo OY;

d) $y = \ln x$ no ponto de interseção com o eixo OX;

e) $y = e^{1-x^2}$ nos pontos de interseção com a reta $y = 1$.

634. Escrever a equação da tangente e da normal no ponto (2;2) à curva:

$$\begin{cases} x = \frac{1+t}{t^3}, \\ y = \frac{3}{2t^2} + \frac{1}{2t}. \end{cases}$$

635. Escrever a equação da tangente à curva:

$$x = t \cos t, \quad y = t \operatorname{sen} t$$

na origem das coordenadas e no ponto $t = \frac{\pi}{4}$.

636. Escrever a equação da tangente e da normal à curva: $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$ no ponto com ordenada $y = 3$.

637. Escrever a equação da tangente à curva $x^5 + y^5 - 2xy = 0$, no ponto (1; 1).

638. Escrever a equação das tangentes e das normais à curva: $y = (x-1)(x-2)(x-3)$ nos pontos de sua interseção com o eixo das abscissas.

639. Escrever a equação da tangente e da normal à curva:

$$y^4 = 4x^4 + 6xy \text{ no ponto } (1;\ 2).$$

640*. Demonstrar que o segmento da tangente à hipérbole $xy = a^2$, compreendido entre os eixos das coordenadas, está dividido ao meio pelo ponto de contacto.

641. Demonstrar que na astróide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ o segmento da tangente, compreendido entre os eixos das coordenadas, tem grandeza constante igual a a.

642. Demonstrar que as normais à envolvente da circunferência

$$x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t), \quad y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t)$$

são tangentes à circunferência $x^2 + y^2 = a^2$.

643. Achar o ângulo de interseção das parábolas $y = (x-2)^2$ e $y = -4 + 6x - x^2$.

644. Que ângulo formam entre si as parábolas $y = x^2$ e $y = x^3$ ao cortarem-se?

645. Demonstrar que as curvas $y = 4x^2 + 2x - 8$ e $y = x^3 - x + 10$ são tangentes entre si no ponto $(3; 34)$. Ocorrerá o mesmo no ponto $(-2; 4)$?

646. Demonstrar que as hipérboles

$$xy = a^2 \text{ e } x^2 - y^2 = b^2$$

interceptam-se, formando um ângulo reto.

647. É dada a parábola $y^2 = 4x$. Calcular no ponto $(1; 2)$ o comprimento dos segmentos da tangente, normal, subtangente e subnormal.

648. Achar a subtangente da curva $y = 2^x$ em qualquer de seus pontos.

649. Demonstrar que na hipérbole equilátera $x^2 - y^2 = a^2$ o comprimento do segmento da normal, em qualquer ponto, é igual ao raio polar deste ponto.

650. Demonstrar que a subnormal da hipérbole $x^2 - y^2 = a^2$, em qualquer ponto, é igual à abscissa deste ponto.

651. Demonstrar que a subtangente da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e da circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ nos pontos com abscissas idênticas, são iguais entre si. Que procedimento para a construção da tangente à elipse depreende-se daqui?

652. Achar o comprimento dos segmentos da tangente, normal, subtangente e subnormal da ciclóide:

$$\begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

num ponto qualquer $t = t_0$.

653. Achar o ângulo formado entre a tangente e o raio polar do ponto de contacto à espiral logarítmica $r = ae^{k\varphi}$.

654. Achar o ângulo formado entre a tangente e o raio polar do ponto de contacto à lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

655. Achar os comprimentos dos segmentos polares da tangente, normal, subtangente e subnormal, bem como, o ângulo formado pela tangente e pelo raio polar do ponto de contacto à espiral de Arquimedes

$$r = a\varphi$$

no ponto com ângulo polar $\varphi = 2\pi$.

656. Achar o comprimento dos segmentos polares da subtangente, subnormal, tangente e normal e o ângulo entre a tangente e o raio polar à espiral hiperbólica $r = \frac{a}{\varphi}$, num ponto arbitrário $\varphi = \varphi_0$; $r = r_0$.

657. A lei de movimento do ponto no eixo OX é

$$x = 3t - t^3.$$

Achar a velocidade de movimento deste ponto nos instantes: $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ e $t_2 = 2$ (x é dado em centímetros e t, em segundos).

658. Pelo eixo OX movem-se dois pontos, cujas leis de movimento são:

$$x = 100 + 5t$$

e

$$x = \frac{1}{2} t^2,$$

onde $t \geqslant 0$. Com que velocidade estes pontos afastam-se um do outro no momento do encontro (x, em centímetros; t, em segundos)?

659. Os extremos do segmento $AB = 5$ m deslizam por retas perpendiculares entre si OX e OY (fig. 16). A velocidade de deslocamento do extremo A é igual a 2 m/s. Qual será a velocidade de deslocamento do extremo B, no momento em que o extremo A encontra-se à distância $OA = 3$ m da origem das coordenadas?

660*. A lei de movimento do ponto material, lançado no plano vertical XOY (fig. 17), formando um ângulo α em relação à horizontal, com uma velocidade inicial v_0, é dada pelas fórmulas (não se considerando a resistência do ar):

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \operatorname{sen} \alpha - \frac{gt^2}{2},$$

onde t é o tempo; g, a aceleração da força de gravidade. Achar a trajetória do movimento e seu alcance. Determinar, também, a grandeza da velocidade do movimento e sua direção.

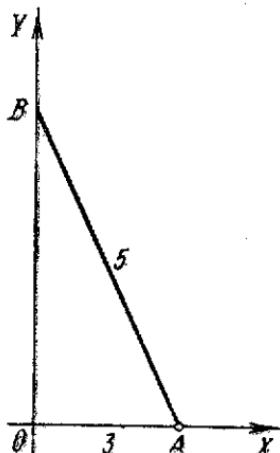



FIG. 16

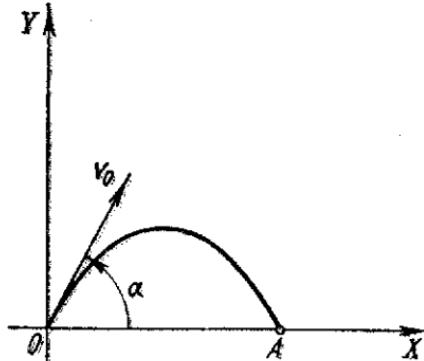



FIG. 17

661. Um ponto movimenta-se sobre a hipérbole $y = \frac{10}{x}$ de tal modo, que sua abscissa x aumenta, uniformemente, com a velocidade de uma unidade por segundo. Com que velocidade variará sua ordenada, quando o ponto passar pela posição (5;2)?

662. Em que ponto da parábola $y^2 = 18x$ a ordenada cresce duas vezes mais rapidamente, que a abscissa?

663. Um dos lados do retângulo tem uma grandeza constante $a = 10$ cm, o outro lado b varia, aumentando com velocidade constante 4 cm/s. A que velocidade crescerá a diagonal do retângulo e sua área no momento em que $b = 30$ cm?

664. O raio de uma esfera cresce, uniformemente, com uma velocidade de 5 cm/s. Com que velocidade crescerão a área da superfície desta esfera e o volume da mesma, no momento em que seu raio torna-se igual a 50 cm?

665. Um ponto move-se sobre a espiral de Arquimedes:

$$r = a\varphi$$

($a = 10$ cm), de tal forma, que a velocidade angular de rotação de seu raio polar é constante e igual a 6° por segundo. Determinar a velocidade com que se alonga o raio polar r, no momento em que $r = 25$ cm.

666. Uma barra heterogênea AB tem 12 cm de comprimento. A massa de sua parte AM cresce proporcionalmente ao quadrado da distância do ponto móvel M, em relação ao extremo A e é igual a 10 g, sendo $AM = 2$ cm. Achar a massa de toda a barra AB e a densidade linear em qualquer ponto M da mesma. A que é igual a densidade linear da barra nos pontos A e B?

§ 5. Derivadas de ordens superiores

1°. **Definição de derivadas de ordens superiores.** *Derivada de segunda ordem*, ou *segunda derivada* da função $y = f(x)$ chama-se a derivada de sua derivada, isto é,

$$(y')'.$$

Designa-se, assim, a segunda derivada:

$$y'', \text{ ou } \frac{d^2y}{dx^2}, \text{ ou } f''(x).$$

Se $x = f(t)$ é a lei do movimento retilíneo de um ponto, então, $\frac{d^2x}{dt^2}$ é a aceleração deste movimento.

Em geral, a *derivada de enésima ordem* da função $y = f(x)$ é a derivada da derivada de ordem $(n - 1)$. A derivada enésima designa-se assim:

$$y^{(n)}, \text{ ou } \frac{d^ny}{dx^n}, \text{ ou } f^{(n)}(x).$$

Exemplo 1. Achar a derivada de segunda ordem da função:

$$y = \ln(1 - x).$$

Solução.

$$y' = \frac{-1}{1-x}; \qquad y'' = \left(\frac{-1}{1-x}\right)' = -\frac{1}{(1-x)^2}.$$

2°. **Fórmula de Leibniz.** Se as funções $u = \varphi(x)$ e $v = \psi(x)$ têm derivadas de até enésima ordem inclusive, para calcular a derivada enésima do produto destas funções, pode-se empregar, então, a *fórmula de Leibniz:*

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)}.$$

3°. **Derivadas de ordens superiores de funções dadas em forma paramétrica.** Se

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

então, suas derivadas $y'_x = \frac{dy}{dx}$, $y''_{xx} = \frac{d^2y}{dx^2}$, ... podem ser calculadas, sucessivamente, pelas fórmulas:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \quad y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}, \quad \text{etc.}$$

Para a derivada de 2ª. ordem temos a fórmula:

$$y''_{xx} = \frac{x'_t y''_{tt} - x''_{tt} y'_t}{(x'_t)^3}.$$

Exemplo 2. Achar y'', se

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \operatorname{sen} t. \end{cases}$$

Solução. Temos:

$$y' = \frac{(b \operatorname{sen} t)'_t}{(a \cos t)'_t} = \frac{b \cdot \cos t}{-a \operatorname{sen} t} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t$$

e

$$y'' = \frac{\left(-\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t\right)'_t}{(a \cos t)'_t} = \frac{-\frac{b}{a} \cdot \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 t}}{-a \operatorname{sen} t} = -\frac{b}{a^2 \operatorname{sen}^3 t}.$$

A. Derivadas de ordens superiores de funções explícitas

Achar as derivadas de segunda ordem das seguintes funções:

667. $y = x^8 + 7x^6 - 5x + 4$.

668. $y = e^{x^2}$.

669. $y = \operatorname{sen}^2 x$.

670. $y = \ln \sqrt[3]{1 + x^2}$.

671. $y = \ln (x + \sqrt{a^2 + x^2})$.

672. $f(x) = (1 + x^2) \operatorname{arctg} x$.

673. $y = (\operatorname{arcsen} x)^2$.

674. $y = a \cosh \frac{x}{a}$.

675. Demonstrar que a função $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{2}$ satisfaz a equação diferencial $1 + y'^2 = 2yy''$.

676. Demonstrar que a função $y = \frac{1}{2} x^2 e^x$ satisfaz a equação diferencial $y'' - 2y' + y = e^x$.

677. Demonstrar que a função $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$ para qualquer valor das constantes C_1 e C_2 satisfaz a equação:

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

678. Demonstrar que a função $y = e^{2x} \operatorname{sen} 5x$ satisfaz a equação:

$$y'' - 4y' + 29y = 0.$$

679. Achar y''', se $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$.

680. Achar $f'''(3)$, se $f(x) = (2x - 3)^5$.

681. Achar y^{V} da função $y = \ln(1 + x)$.

682. Achar y^{VI} da função $y = \operatorname{sen} 2x$.

683. Demonstrar que a função $y = e^{-x} \cos x$ satisfaz a equação diferencial: $y^{VI} + 4y = 0$.

684. Achar $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ e $f'''(0)$, se

$$f(x) = e^x \operatorname{sen} x.$$

685. A equação do movimento de um ponto sobre o eixo OX é:

$$x = 100 + 5t - 0{,}001t^3.$$

Achar a velocidade e aceleração deste ponto para os instantes $t_0 = 0$; $t_1 = 1$; $t_2 = 10$.

686. Pela circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ movimenta-se um ponto M com velocidade angular constante ω. Achar a lei de movimento de sua projeção M_1 no eixo OX, se no momento $t = 0$ o ponto ocupa a posição $M_0(a, 0)$ (fig. 18). Achar a velocidade e aceleração do movimento do ponto M_1.

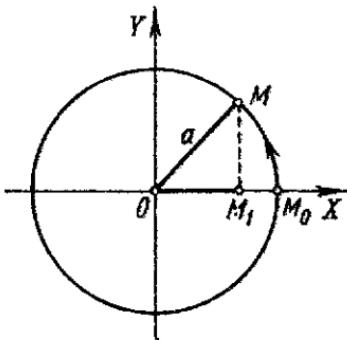



FIG. 18

A que é igual a velocidade e aceleração do ponto M_1 no momento inicial e no momento de passagem pela origem das coordenadas?

Quais são os valores máximos da grandeza absoluta da velocidade e da grandeza absoluta da aceleração do ponto M_1?

687. Achar a derivada de enésima ordem da função $y = (ax + b)^n$ (n é o número natural).

688. Achar as derivadas de enésima ordem das funções:

a) $y = \frac{1}{1-x}$; b) $y = \sqrt{x}$.

689. Achar a derivada de enésima ordem das funções:

a) $y = \operatorname{sen} x$;

b) $y = \cos 2x$;

c) $y = e^{-3x}$;

d) $y = \ln(1 + x)$;

e) $y = \frac{1}{1+x}$;

f) $y = \frac{1+x}{1-x}$;

g) $y = \operatorname{sen}^2 x$;

h) $y = \ln(ax + b)$.

690. Utilizando a fórmula de Leibniz, achar $y^{(n)}$, se:

a) $y = xe^x$;

b) $y = x^2 e^{-2x}$;

c) $y = (1 - x^2)\cos x$;

d) $y = \frac{1+x}{\sqrt{x}}$;

e) $y = x^3 \ln x$.

691. Achar $f^{(n)}(0)$, se $f(x) = \ln \frac{1}{1-x}$.

B. Derivadas de ordens superiores de funções, dadas em forma paramétrica, e de funções implícitas

Achar $\frac{d^2y}{dx^2}$ das seguintes funções:

692. a) $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(1 + t^2); \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = \operatorname{arcsen} t, \\ y = \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$

693. a) $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \operatorname{sen} t; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t), \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \operatorname{sen}^3 t; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = a(\operatorname{sen} t - t \cos t), \\ y = a(\cos t + t \operatorname{sen} t). \end{cases}$

694. a) $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = \operatorname{sen}^2 t; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = e^{-at}, \\ y = e^{at}. \end{cases}$

695. a) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \frac{1}{2} t^2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \frac{1}{1-t}. \end{cases}$

696. Achar $\frac{d^2x}{dy^2}$, se $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \operatorname{sen} t. \end{cases}$

697. Achar $\frac{d^2y}{dx^2}$, sendo $t = 0$ e se $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = t^2. \end{cases}$

698. Demonstrar que y, determinada como função de x pelas equações $x = \operatorname{sen} t$ e $y = ae^{t\sqrt{2}} + be^{-t\sqrt{2}}$, quaisquer que sejam as constantes a e b, satisfaz a equação diferencial:

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 2y.$$

Achar $y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$ para as seguintes funções:

699. $\begin{cases} x = \sec t, \\ y = \operatorname{tg} t. \end{cases}$ **700.** $\begin{cases} x = e^{-t}\cos t, \\ y = e^{-t}\operatorname{sen} t. \end{cases}$

701. $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = t^3. \end{cases}$ **702.** Achar $\frac{d^ny}{dx^n}$, se $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^m. \end{cases}$

703. Conhecendo-se a função $y = f(x)$, achar as derivadas x'' e x''' da função inversa $x = f^{-1}(y)$.

704. Achar y'', se $x^2 + y^2 = 1$.

Solução. Aplicando a regra de derivação de funções compostas, temos $2x + 2yy' = 0$; donde $y' = -\frac{x}{y}$ e $y'' = -\left(\frac{x}{y}\right)'_x = -\frac{y - xy'}{y^2}$. Substituindo y' por seu valor, teremos:

$$y'' = -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3}.$$

Determinar as derivadas y'' das seguintes funções $y = f(x)$, dadas de forma implícita:

705. $y^2 = 2px$. **706.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

707. $y = x + \operatorname{arctg} y$.

708. Tendo-se a equação $y = x + \ln y$, achar $\frac{d^2y}{dx^2}$ e $\frac{d^2x}{dy^2}$.

709. Achar y'' no ponto $(1; 1)$, se

$$x^2 + 5xy + y^2 - 2x + y - 6 = 0.$$

710. Achar y'' no ponto $(0; 1)$, se

$$x^4 - xy + y^4 = 1.$$

711. a) A função y é dada implicitamente pela equação:

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0.$$

Achar $\frac{d^3y}{dx^3}$ no ponto $(1; 1)$.

b) Achar $\frac{d^3y}{dx^3}$, se $x^2 + y^2 = a^2$.

§ 6. Diferenciais de primeira ordem e de ordens superiores

1°. **Diferencial de primeira ordem.** Chama-se ***diferencial (de primeira ordem) da função*** $y = f(x)$ em ponto x à parte principal de seu acréscimo $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, quando $\Delta x \to 0$, linear quanto ao acréscimo $\Delta x = dx$ da variável independente x. A diferencial de uma função é igual ao produto de sua derivada pela diferencial de variável independente:

$$dy = y'dx.$$

Daí

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

A função que tem diferencial denomina-se *função diferencial.*

Se MN é o arco do gráfico da função $y = f(x)$ (fig. 19), MT, a tangente no ponto $M(x, y)$ e

$$PQ = \Delta x = dx,$$

teremos, que o acréscimo da ordenada da tangente

$$AT = dy$$

e o segmento $AN = \Delta y$.

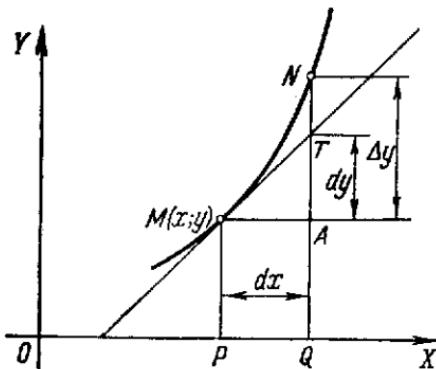



FIG. 19

Exemplo 1. Achar o acréscimo e a diferencial da função $y = 3x^2 - x$.

Solução. 1° método:

$$\Delta y = 3(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x) - 3x^2 + x$$

ou

$$\Delta y = (6x - 1)\,\Delta x + 3(\Delta x)^2.$$

Portanto,

$$dy = (6x - 1)\,\Delta x = (6x - 1)\,dx.$$

2° método:

$$y' = 6x - 1; \quad dy = y'dx = (6x - 1)\,dx.$$

Exemplo 2. Calcular Δy e dy da função $y = 3x^2 - x$ para $x = 1$ e $\Delta x = 0{,}01$.

Solução.

$$\Delta y = (6x - 1)\cdot\Delta x + 3(\Delta x)^2 = 5\cdot 0{,}01 + 3\cdot(0{,}01)^2 = 0{,}0503$$

e

$$dy = (6x - 1)\,\Delta x = 5\cdot 0{,}01 = 0{,}0500.$$

2°. **Propriedades fundamentais das diferenciais:**

1) $dc = 0$, onde $c = \text{const}$.
2) $dx = \Delta x$, onde x é variável independente.
3) $d(cu) = c\,du$.
4) $d(u \pm v) = du \pm dv$.
5) $d(uv) = u\,dv + v\,du$.
6) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2} \quad (v \neq 0)$.
7) $df(u) = f'(u)\,du$.

3°. **Aplicação da diferencial para cálculos aproximados.** Se o acréscimo Δx, do argumento x, é pequeno por sua grandeza absoluta, então, a diferencial dy da função $y = f(x)$ e o acréscimo Δy da função são iguais, aproximadamente, entre si,

$$\Delta y \approx dy,$$

isto é,

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\,\Delta x,$$

donde:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x. \qquad (1)$$

Exemplo 3. Em quanto aumentará, aproximadamente, o lado do quadrado, se sua área aumenta de 9 m^2 a 9,1 m^2?

Solução. Se x é a área do quadrado e y, seu lado, então:

$$y = \sqrt{x}.$$

Pelas condições dadas: $x = 9$; $\Delta x = 0{,}1$.

Calculamos, aproximadamente, o acréscimo Δy do lado do quadrado:

$$\Delta y \approx dy = y'\Delta x = \frac{1}{2\sqrt{9}} \cdot 0{,}1 = 0{,}016 \text{ m}.$$

4°. **Diferenciais de ordens superiores.** Chama-se *diferencial de segunda ordem* quando o acréscimo fixo da variável independente $\Delta x = dx$, a diferencial da diferencial de primeira ordem:

$$d^2y = d(dy).$$

De forma análoga determinam-se as *diferenciais de terceira* e ordens sucessivas.

Se $y = f(x)$ e x é variável independente, então:

$$d^2y = y''(dx)^2$$
$$d^3y = y'''(dx)^3,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$d^ny = y^{(n)}(dx)^n.$$

Se $y = f(u)$, onde $u = \varphi(x)$, então:

$$d^2y = y''(du)^2 + y'd^2u,$$

$$d^3y = y'''(du)^3 + 3y''\,du \cdot d^2u + y'd^3u,$$

etc. (Os apóstrofes indicam derivação quanto à variável u).

712. Achar o acréscimo Δy e a diferencial dy da função

$$y = 5x + x^2, \text{ para } x = 2 \text{ e } \Delta x = 0{,}001.$$

713. Sem calcular a derivada, achar:

$$d(1 - x^3)$$

para $x = 1$ e $\Delta x = -\frac{1}{3}$.

714. A área do quadrado S, com lado igual a x, é dada pela fórmula $S = x^2$. Achar o acréscimo e a diferencial desta função e determinar o valor geométrico desta última.

715. Dar a interpretação geométrica do acréscimo e da diferencial das seguintes funções:

a) área do círculo $S = \pi x^2$;

b) volume do cubo $v = x^3$.

716. Demonstrar que para qualquer que seja x, o acréscimo da função $y = 2^x$, correspondente ao acréscimo de x, em uma grandeza Δx, é equivalente à expressão $2^x \Delta x \ln 2$, quando $\Delta x \to 0$.

717. Para que valor de x a diferencial da função $y = x^2$ não equivale ao acréscimo desta função, quando $\Delta x \to 0$?

718. Possue diferencial a função $y = |x|$, para $x = 0$?

719. Empregando a derivada, achar a diferencial da função $y = \cos x$, para $x = \frac{\pi}{6}$ e $\Delta x = \frac{\pi}{36}$.

720. Achar a diferencial da função:

$$y = \frac{2}{\sqrt{x}},$$

quando $x = 9$ e $\Delta x = -0{,}01$.

721. Calcular a diferencial da função

$$y = \operatorname{tg} x$$

quando $x = \frac{\pi}{3}$ e $\Delta x = \frac{\pi}{180}$.

Achar as diferenciais das seguintes funções para quaisquer valores do argumento e de seu acréscimo:

722. $y = \frac{1}{x^m}$.

723. $y = \frac{x}{1-x}$.

724. $y = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a}$.

725. $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$.

726. $y = e^{-x^2}$.

727. $y = x \ln x - x$.

728. $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$.

729. $r = \operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{cosec} \varphi$.

730. $s = \operatorname{arcctg} e^t$.

731. Achar dy, se $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$.

Solução. Considerando-se a invariabilidade da forma da diferencial, teremos: $2x\,dx + 2(y\,dx + x\,dy) - 2y\,dy = 0$.
Donde:

$$dy = -\frac{x+y}{x-y}\,dx.$$

Achar as diferenciais das seguintes funções, dadas de forma implícita:

732. $(x+y)^2(2x+y)^3=1.$ **733.** $y=e^{-\frac{x}{y}}.$

734. $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\cdot$

735. Achar dy no ponto (1; 2), se $y^3-y=6x^2$.

736. Achar o valor aproximado de sen 31 °.

Solução. Tomando $x=\text{arc }30^\circ=\frac{\pi}{6}$ e $\Delta x=\text{arc }1^\circ=\frac{\pi}{180}$, pela fórmula (1) (ver o 3°), temos: $\text{sen }31^\circ\approx\text{sen }30^\circ+\frac{\pi}{180}\cos 30^\circ=0{,}500+0{,}017\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=0{,}515.$

737. Substituindo o acréscimo da função pela diferencial, calcular, aproximadamente:

a) $\cos 61^\circ$; b) $\operatorname{tg} 44^\circ$; c) $e^{0{,}2}$; d) $\ln 0{,}9$; d) $\operatorname{arctg} 1{,}05$.

738. Em quanto aumenta, aproximadamente, o volume de uma esfera, sendo que seu raio, $R=15$ cm, aumenta em 2 mm?

739. Deduzir a fórmula aproximada (para valores de $|\Delta x|$ pequenos em comparação com x):

$$\sqrt{x+\Delta x}\approx\sqrt{x}+\frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}$$

e com ela achar os valores aproximados para $\sqrt{5}$; $\sqrt{17}$; $\sqrt{70}$ e $\sqrt{640}$.

740. Deduzir a fórmula aproximada:

$$\sqrt[3]{x+\Delta x}\approx\sqrt[3]{x}+\frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

e achar os valores aproximados para $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[3]{70}$, $\sqrt[3]{200}$.

741. Achar os valores aproximados das funções:

a) $y=x^3-4x^2+5x+3$, quando $x=1{,}03$;

b) $f(x)=\sqrt{1+x}$, quando $x=0{,}2$;

c) $f(x)=\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$, quando $x=0{,}1$;

d) $y=e^{1-x^2}$, quando $x=1{,}05$.

742. Achar o valor aproximado de tg 45° 3′ 20″.

743. Achar o valor aproximado de arcsen 0,54.

744. Achar aproximadamente $\sqrt[4]{17}$.

745. Demonstrar, baseando-se na fórmula da lei de Ohm $I=\frac{E}{R}$, que uma pequena variação ΔI da intensidade da corrente I, devida a uma pequena variação da resistência ΔR da resistência R, pode ser encontrada, aproximadamente, pela fórmula:

$$\Delta I=-\frac{I}{R}\Delta R.$$

746. Demonstrar que um erro relativo em 1%, cometido na determinação do comprimento do raio, dá lugar a um erro relativo de cerca de 2%, ao calcular-se a área do círculo e a superfície da esfera.

747. Calcular d^2y, se $y = \cos 5x$.

Solução. $d^2y = y''(dx)^2 = -25 \cos 5x(dx)^2$.

748. $u = \sqrt{1 - x^2}$, achar d^2u.

749. $y = \operatorname{arccos} x$, achar d^2y.

750. $y = \operatorname{sen} x \ln x$, achar d^2y.

751. $z = \frac{\ln x}{x}$, achar d^2z.

752. $z = x^2e^{-x}$, achar d^3z.

753. $z = \frac{x^4}{2 - x}$, achar d^4z.

754. $u = 3 \operatorname{sen}(2x + 5)$, achar d^nu.

755. $y = e^{x \cos \alpha} \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \alpha)$, achar d^ny.

§ 7. Teoremas do valor médio

1°. **Teorema de Rolle.** Se uma função $f(x)$ é contínua no segmento $a \leqslant x \leqslant b$, tem uma derivada $f'(x)$ em cada ponto interior deste e

$$f(a) = f(b),$$

então, para sua variável independente x, existe, pelo menos, um valor ξ, onde $a < \xi < b$, tal que

$$f'(\xi) = 0.$$

2°. **Teorema de Lagrange.** Se uma função $f(x)$ é contínua no segmento $a \leqslant x \leqslant b$ e tem uma derivada em cada ponto interior deste, então,

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi),$$

onde $a < \xi < b$.

3°. **Teorema de Cauchy.** Se duas funções $f(x)$ e $F(x)$ são contínuas no segmento $a \leqslant x \leqslant b$ e têm no intervalo $a < x < b$ derivadas que não se anulam simultaneamente sendo: $F(b) \neq F(a)$, então,

$$\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}, \text{ onde } a < \xi < b.$$

756. Demonstrar que a função $(fx) = x - x^3$ satisfaz as condições do teorema de Rolle nos segmentos $-1 \leqslant x \leqslant 0$, e $0 \leqslant x \leqslant 1$. Encontrar os valores correspondentes de ξ.

Solução. A função $f(x)$ é contínua e derivável para todos os valores de x; além disto, $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$. Assim, o teorema de Rolle pode ser aplicado nos segmentos $-1 \leqslant x \leqslant 0$ e $0 \leqslant x \leqslant 1$. Para encontrarmos o número ξ, compomos a equação: $f'(x) = 1 - 3x^2 = 0$. Donde $\xi_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$; $\xi_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}$, sendo, que $-1 < \xi_1 < 0$; $0 < \xi_2 < 1$.

757. A função $f(x) = \sqrt[3]{(x - 2)^2}$ nos extremos do segmento [0, 4] toma os valores iguais $f(0) = f(4) = \sqrt[3]{4}$. É válido para esta função o teorema de Rolle no segmento [0,4]?

758. Cumprem-se as condições do teorema de Rolle para a função

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

no segmento $[0, \pi]$?

759. Seja

$$f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3).$$

Demonstrar que a equação

$$f'(x) = 0$$

tem três raízes reais.

760. A equação

$$e^x = 1 + x,$$

tem, evidentemente, uma raiz $x = 0$. Demonstrar que esta equação não pode ter outra raiz real.

761. Verificar a validade das condições do teorema de Lagrange para a função:

$$f(x) = x - x^3$$

no segmento $[-2, 1]$ e achar o valor intermédio correspondente de ξ.

Solução. A função $f(x) = x - x^3$ é contínua e derivável para todos os valores de x e $f'(x) = 1 - 3x^2$. Assim, pela fórmula de Lagrange temos $f(1) - f(-2) = 0 - 6 = [1 - (-2)]f'(\xi)$, isto é, $f'(\xi) = -2$. Portanto, $1 - 3\xi^2 = -2$ e $\xi = \pm 1$; serve, somente, o valor $\xi = -1$, para o qual é justa a desigualdade $-2 < \xi < 1$.

762. Verificar a validade das condições do teorema de Lagrange e achar o ponto intermédio correspondente ξ para a função $f(x) = x^{4/3}$ no segmento $[-1; 1]$.

763. No segmento da parábola $y = x^2$, compreendido entre os pontos $A(1; 1)$ e $B(3; 9)$, achar um ponto, cuja tangente seja paralela à corda AB.

764. Aplicando o teorema de Lagrange, demonstrar a fórmula:

$$\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x = h \cos \xi,$$

onde $x < \xi < x + h$.

765. a) Verificar a validade das condições do teorema de Cauchy para as funções $f(x) = x^2 + 2$ e $F(x) = x^3 - 1$ no segmento $[1, 2]$ e achar ξ;

b) idem para $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $F(x) = \cos x$ no segmento $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

§ 8. Fórmula de Taylor

Se uma função $f(x)$ é contínua e tem derivadas contínuas, inclusive de grau $(n - 1)$ no segmento $a \leqslant x \leqslant b$ (ou $b \leqslant x \leqslant a$), e que para cada ponto interior do mesmo existe uma derivada finita $f^{(n)}(x)$, neste intervalo é justa a *fórmula de Taylor*:

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) +$$

$$+ \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi),$$

onde $\xi = a + \theta(x - a)$ e $0 < \theta < 1$.

No caso particular, quando $a = 0$ teremos *(fórmula de Maclaurin)*:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\xi),$$

onde $\xi = \theta x$, $0 < \theta < 1$.

766. Desenvolver o polinômio $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ em potências inteiras e não negativas do binômio $x-2$.

Solução. $f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$; $f''(x) = 6x - 4$; $f'''(x) = 6$; $f^{(n)}(x) = 0$ para $n \geqslant 4$. Daí

$$f(2) = 11; \quad f'(2) = 7; \quad f''(2) = 8; \quad f'''(2) = 6.$$

Portanto,

$$x^3 - 2x^2 + 3x + 5 = 11 + (x-2)\cdot 7 + \frac{(x-2)^2}{2!}\cdot 8 + \frac{(x-2)^3}{3!}\cdot 6,$$

ou

$$x^3 - 2x^2 + 3x + 5 = 11 + 7(x-2) + 4(x-2)^2 + (x-2)^3.$$

767. Desenvolver a função $f(x) = e^x$ em potências do binômio $x + 1$ até o termo que contenha $(x+1)^3$.

Solução $f^{(n)}(x) = e^x$ para todos os n, $f^{(n)}(-1) = \frac{1}{e}$.

Portanto,

$$e^x = \frac{1}{e} + (x+1)\frac{1}{e} + \frac{(x+1)^2}{2!}\frac{1}{e} + \frac{(x+1)^3}{3!}\frac{1}{e} + \frac{(x+1)^4}{4!}e^{\xi},$$

onde $\xi = -1 + \theta(x+1)$, $0 < \theta < 1$.

768. Desenvolver a função $f(x) = \ln x$ em potências de $x - 1$ até o termo com $(x-1)^2$.

769. Desenvolver a função $f(x) = \operatorname{sen} x$ em potências de x até o termo com x^3 e com x^5.

770. Desenvolver a função $f(x) = e^x$ em potências de x até o termo com x^{n-1}.

771. Demonstrar que a diferença entre $\operatorname{sen}(a+h)$ e $\operatorname{sen} a + h\cos a$ não é maior que $\frac{1}{2}h^2$.

772. Esclarecer a origem destas fórmulas aproximadas:

a) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$, $|x| < 1$,

b) $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2$, $|x| < 1$,

e avaliar o erro das mesmas.

773. Avaliar o erro da fórmula:

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}.$$

774. Um fio pesado, sob a ação do próprio peso, pende, formando uma catenária $y = a \cosh \frac{x}{a}$. Demonstrar que para valores pequenos de $|x|$ a forma, que toma o fio, é expressa, aproximadamente, pela fórmula da parábola:

$$y = a + \frac{x^2}{2a}.$$

775.** Demonstrar que quando $|x| \ll a$, com uma precisão de até $\left(\frac{x}{a}\right)^2$ verifica-se a igualdade aproximada

$$e^{\frac{x}{a}} \approx \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}.$$

§ 9. Regra de L'Hôspital—Bernoulli para o cálculo de limites indeterminados

1°. Cálculo de limites indeterminados das formas $\frac{0}{0}$ *e* $\frac{\infty}{\infty}$. Sejam as funções uniformes $f(x)$ e $\varphi(x)$ deriváveis para $0 < |x-a| < h$, con tanto que a derivada $\varphi'(x)$ não se reduza a zero.

Se $f(x)$ e $\varphi(x)$ são infinitamente pequenas, ou infinitamente grandes, quando $x \to a$, isto é, se a razão $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ representa no ponto $x = a$ uma expressão indeterminada das formas $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ teremos, que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

com a condição de que exista o limite desta razão das derivadas *(regra de L'Hôspital — Bernoulli)*. Esta regra é, também, aplicável no caso, em que $a = \infty$.

Se a razão $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ torna a dar uma expressão indeterminada no ponto $x = a$ de uma das duas formas antes citadas e $f'(x)$ e $\varphi'(x)$ satisfazem a todas as condições que se formularam para $f(x)$ e $\varphi(x)$, aplica-se, novamente, a mesma regra, o que resulta na razão das segundas derivadas e assim sucessivamente.

É, no entanto, necessário recordar, que pode existir o limite da razão $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, sem que a razão das derivadas tenda a limite algum (ver o n° 809).

2. **Outras formas indeterminadas.** Para calcular os limites de expressões indeterminadas da forma $0 \cdot \infty$, vamos transformar o produto correspondente $f_1(x) \cdot f_2(x)$, onde $\lim_{x \to a} f_1(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} f_2(x) = \infty$ na razão:

$$\frac{f_1(x)}{\frac{1}{f_2(x)}} \left(\text{forma } \frac{0}{0}\right) \text{ ou } \frac{f_2(x)}{\frac{1}{f_1(x)}} \left(\text{forma } \frac{\infty}{\infty}\right).$$

Em caso de expressões indeterminadas da forma $\infty - \infty$ deve-se transformar a correspondente diferença $f_1(x) - f_2(x)$ no produto $f_1(x)\left[1 - \frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right]$ e calcular,

inicialmente, a expressão indeterminada $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$; se o $\lim\limits_{x\to a}\frac{f_2(x)}{f_1(x)} = 1$, então, reduzimos

esta expressão à forma $\dfrac{1-\frac{f_2(x)}{f_1(x)}}{\frac{1}{f_1(x)}}\left(\text{forma } \frac{0}{0}\right)$.

As expressões indeterminadas das formas 1^∞, 0^0 e ∞^0 são calculadas, procurando-se, previamente, seus logaritmos e encontrando-se o limite do logaritmo de grau correspondente $[f_1(x)]^{f_2(x)}$ (para que é necessário calcular as expressões indeterminadas da forma $0\cdot\infty$).

Em certos casos é útil combinar a regra de L'Hôspital—Bernoulli com o cálculo de limites por meios elementares.

Exemplo 1. Calcular:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}\left(\text{forma indeterminada } \frac{\infty}{\infty}\right).$$

Solução. Aplicando a regra de L'Hôspital — Bernoulli, teremos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(\operatorname{ctg} x)'} = -\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}.$$

Obtemos uma expressão indeterminada da forma $\frac{0}{0}$, mas não é necessário aplicarmos, outra vez, a regra de L'Hôspital—Bernoulli, já que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\operatorname{sen} x = 1\cdot 0 = 0.$$

E assim, definitivamente encontramos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = 0.$$

Exemplo 2. Calcular:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) \text{(forma indeterminada } \infty - \infty).$$

Reduzindo a fração a um denominador comum, teremos:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}{x^2\operatorname{sen}^2 x}\left(\text{forma indeterminada } \frac{0}{0}\right).$$

Antes de aplicarmos a regra de L'Hôspital—Bernoulli, substituimos o denominador da última fração pelo infinitésimo equivalente (cap. 1, §4), $x^2\operatorname{sen}^2 x \sim x^4$. Teremos:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}{x^4}\left(\text{forma indeterminada } \frac{0}{0}\right).$$

Pela regra de L'Hôspital—Bernoulli

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2x - \operatorname{sen} 2x}{4x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{2 - 2\cos 2x}{12x^2}.$$

A seguir, por meios elementares, teremos:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{6x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}^2 x}{6x^2} = \frac{1}{3}.$$

Exemplo 3. Calcular:

$$\lim_{x\to 0} (\cos 2x)^{3/x^2} \text{ (forma indeterminada } 1^\infty).$$

Achando-se o logaritmo e aplicando a regra de L'Hôspital—Bernoulli, teremos:

$$\lim_{x\to 0} (\cos 2x)^{3/x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3 \ln \cos 2x}{x^2} = -6 \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{2x} = -6.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0} (\cos 2x)^{3/x^2} = e^{-6}.$$

Achar os limites, que se indicam, das seguintes funções:

776. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$.

Solução.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 4x - 1}{3x^2 - 7} = \frac{1}{2}.$$

777. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^3}$.

778. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 - x}{1 - \operatorname{sen} \dfrac{\pi x}{2}}$.

779. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cosh x - 1}{1 - \cos x}$.

780. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}$.

781. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sec^2 x - 2 \operatorname{tg} x}{1 + \cos 4x}$.

782. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$.

783. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^5}$.

784. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

785. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{\pi}{x}}{\operatorname{ctg} \dfrac{\pi x}{2}}$.

786. $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\ln (\operatorname{sen} mx)}{\ln \operatorname{sen} x}$ $(m > 0)$.

787. $\lim\limits_{x\to 0} (1 - \cos x) \operatorname{ctg} x$.

Solução. $\lim\limits_{x\to 0} (1 - \cos x) \operatorname{ctg} x = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1 - \cos x) \cos x}{\operatorname{sen} x} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1 - \cos x)}{\operatorname{sen} x} \cdot \lim_{x\to 0} \cos x = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot 1 = 0.$$

788. $\lim\limits_{x\to 1} (1 - x) \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2}$.

789. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arcsen} x \operatorname{ctg} x$.

790. $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^n e^{-x})$, $n > 0$.

791. $\lim\limits_{x\to \infty} x \operatorname{sen} \dfrac{a}{x}$.

792. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^n \operatorname{sen} \dfrac{a}{x}$, $n > 0$, $a \neq 0$.

793. $\lim\limits_{x\to 1} \ln x \ln (x - 1)$.

794. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x - 1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$.

Solução.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{x\cdot\frac{1}{x}+\ln x-1}{\ln x+\frac{1}{x}(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x-\frac{1}{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

795. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{5}{x^2-x-6}\right)$. **796.** $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right]$.

797. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)$. **798.** $\lim\limits_{x\to+0} x^x$.

Solução. Temos $x^x=y$; $\ln y=x\ln x$: $\lim\limits_{x\to+0}\ln y=\lim\limits_{x\to+0}x\ln x=$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0,\ \text{daí}\ \lim_{x\to+0}y=1,\ \text{isto é,}\ \lim_{x\to+0}x^x=1.$$

799. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$. **800.** $\lim\limits_{x\to+0} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$.

801. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x}$. **802.** $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$.

803. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$. **804.** $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

805. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$. **806.** $\lim\limits_{x\to+0}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

807. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$. **808.** $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{sen} x}$.

809. Demonstrar que os limites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}=0$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{sen} x}=1$

não podem ser encontrados pela regra de L'Hôspital — Bernoulli. Encontre-os diretamente.

810*. Demonstrar que a área de um segmento circular com um ângulo central α pequeno, que tem a corda $AB = b$ e a flecha $CD = h$

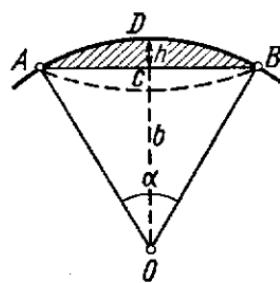



FIG. 20

(fig. 20), é, aproximadamente, igual a

$$S \approx \frac{2}{3}bh$$

com um erro relativo tão pequeno como se deseje, quando $x \to 0$.

Capítulo III

EXTREMOS DA FUNÇÃO E APLICAÇÕES GEOMÉTRICAS DA DERIVADA

§ 1. Extremos da função de um argumento

1°. **Crescimento e decrescimento das funções.** A função $y = f(x)$ se chama *crescente (decrescente)* em um determinado intervalo (segmento), quando para quaisquer pontos x_1 e x_2 deste intervalo (segmento) pode-se deduzir da desigualdade $x_1 < x_2$ a desigualdade $f(x_1) < f(x_2)$ (fig. 21, *a*) ($f(x_1) > f(x_2)$) (fig. 21, *b*). Se a função $f(x)$ é contínua no segmento $[a, b]$ e $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) para $a < x < b$, a função $f(x)$ cresce (decresce) neste segmento $[a, b]$.

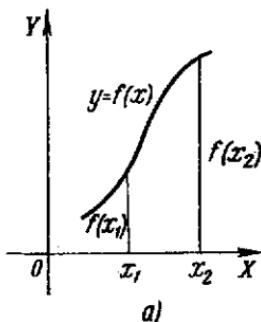
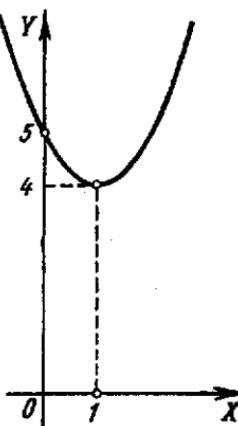
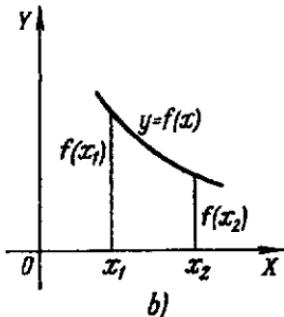



FIG. 21 FIG. 22

Em casos mais simples o campo de existência da função $f(x)$ pode ser dividido em um número finito de intervalos de crescimento e decrescimento da função *(intervalos de monotonia)*. Estes intervalos estão limitados pelos pontos críticos de x (onde $f'(x) = 0$ ou não existe $f'(x)$).

Exemplo 1. Investigar o crescimento e decrescimento da função

$$y = x^2 - 2x + 5.$$

Solução. Achamos a derivada

$$y' = 2x - 2 = 2(x - 1). \tag{1}$$

Daqui $y' = 0$ para $x = 1$. Neste eixo numérico obtemos dois intervalos de monotonia: $(-\infty, 1)$ e $(1, +\infty)$. Pela fórmula (1) temos: 1) se $-\infty < x < 1$, então $y' < 0$, portanto a função $f(x)$ decresce no intervalo $(-\infty, 1)$; 2) se $1 < x < +\infty$, então $y' > 0$, portanto a função $f(x)$ cresce no intervalo $(1, +\infty)$ (fig. 22).

Exemplo 2. Determinar os intervalos de crescimento e decrescimento da função

$$y = \frac{1}{x+2}.$$

Solução. Neste caso, $x = -2$ é o ponto de descontinuidade da função e $y' = -\frac{1}{(x+2)^2} < 0$, quando $x \neq -2$. Portanto, a função y decresce nos intervalos $-\infty < x < -2$ e $-2 < x < +\infty$.

Exemplo 3. Investigar o crescimento e decrescimento da função

$$y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3.$$

Solução. Temos

$$y' = x^4 - x^2. \tag{2}$$

Resolvendo a equação $x^4 - x^2 = 0$, encontramos os pontos $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 1$, nos quais a derivada y' se anula. Como y' pode mudar de sinal somente ao passar por pontos em que esta se faz igual a zero ou tem lugar uma descontinuidade (neste caso dado não há pontos de descontinuidade para y'), teremos que em cada um dos intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, +\infty)$ a derivada conserva um mesmo sinal, pelo qual em cada um destes intervalos a função que investigamos será monótona. Para determinar em quais destes intervalos cresce a função e em quais decresce, é preciso saber que sinal tem a derivada em cada um deles. Para conhecer o sinal de y' no intervalo $(-\infty, -1)$ é suficiente saber o sinal de y' em qualquer ponto deste intervalo. Tomando, por exemplo, $x = -2$ da equação (2), obtemos $y' = 12 > 0$; portanto $y' > 0$ no intervalo $(-\infty, -1)$ e nele a função é crescente. Do mesmo modo achamos que $y' < 0$ no intervalo $(-1, 0)$ $\left(\text{para prová-lo, pode-se tomar, por exemplo, } x = -\frac{1}{2}\right)$; $y' < 0$ no intervalo $(0, 1)$ $\left(\text{aqui pode-se tomar } x = \frac{1}{2}\right)$ e, finalmente, $y' > 0$ no intervalo $(1, +\infty)$.

Desta forma, a função estudada cresce no intervalo $(-\infty, -1)$, decresce em $(-1, 1)$ e volta a crescer em $(1, +\infty)$.

2°. **Extremos da função.** Se existe um entorno bilateral do ponto x_0 tal, que para qualquer outro ponto $x \neq x_0$ deste entorno se verifica a desigualdade $f(x) > f(x_0)$,

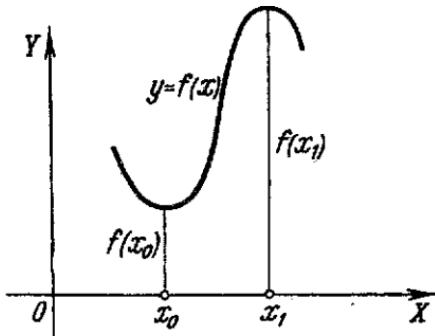



FIG. 23

o ponto x_0 recebe o nome de *ponto mínimo* da função $y = f(x)$ e o número $f(x)_0$, o de *mínimo* desta função $y = f(x)$. Da mesma forma, se para qualquer ponto $x \neq x_1$ de um entorno determinado do ponto x_1 se verifica a desigualdade $f(x) < f(x_1)$, x_1 recebe o nome de *ponto máximo* da função $f(x)$ e $f(x_1)$, o de *máximo* desta função (fig. 23).

O ponto mínimo ou máximo de uma função se chama, também, *ponto extremo* e o mínimo ou máximo desta função, o de *extremo* dela. Se x_0 é um ponto extremo da função $f(x)$, temos que $f'(x_0) = 0$ *(ponto estacionário)*, ou não existe $f'(x_0)$ (condições necessárias para a existência de extremos). A proposição recíproca não é correta, já que os pontos nos quais $f'(x) = 0$, ou que não existem $f'(x)$ *(pontos críticos)*, não são obrigatoriamente pontos extremos da função $f(x)$. As condições suficientes de existência ou ausência de extremo de uma função contínua $f(x)$ são dadas pelas seguintes regras:

1. Se existe tal entorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ do ponto crítico x_0, no qual $f'(x) > 0$ para $x_0 - \delta < x < x_0$ e $f'(x) < 0$ para $x_0 < x < x_0 + \delta$, o ponto x_0 será um ponto máximo da função $f(x)$; se, ao contrário, $f'(x) < 0$ para $x_0 - \delta < x < x_0$ e $f'(x) > 0$ para $x_0 < x < x_0 + \delta$, o ponto x_0 será um ponto mínimo da função $f(x)$.

Se, finalmente, pode-se encontrar um número positivo δ tal, que $f'(x)$ conserva invariável seu sinal quando $0 < |x - x_0| < \delta$, o ponto x_0 não será um ponto extremo da função $f(x)$.

2. Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$, x_0 é um ponto máximo da função $f(x)$; se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$, x_0 é um ponto mínimo da função $f(x)$; se $f'(x_0) = 0$; $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) \neq 0$, o ponto x_0 não é ponto extremo da função $f(x)$.

De forma geral, vamos supor que a primeira das funções derivadas de $f(x)$, que não se anula no ponto x_0, é de ordem k. Neste caso, se k é par, o ponto x_0 será um ponto extremo, que será máximo se $f^{(k)}(x_0) < 0$ e mínimo, se $f^{(k)}(x_0) > 0$. Se k é ímpar, x_0 não é um ponto extremo.

Exemplo 4. Achar os extremos da função

$$y = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}.$$

Solução. Achamos a derivada

$$y' = 2 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x} + 1). \tag{3}$$

Igualando a zero a derivada y', obtemos que: $\sqrt[3]{x} + 1 = 0$.

Daí se deduz o ponto estacionário $x_1 = -1$. Pela fórmula (3), temos: se $x = -1 - h$, onde h pode ser qualquer número positivo suficientemente pequeno, então $y' > 0$; se, ao contrário, $x = -1 + h$, se tem $y' < 0$ *). Por conseguinte, $x_1 = -1$ é um ponto máximo da função y, sendo $y_{máx} = 1$.

Igualando a zero o denominador da expressão y' em (3), temos:

$$\sqrt[3]{x} = 0;$$

daqui achamos o segundo ponto crítico $x_2 = 0$ da função, para o qual não existe derivada y'. Quando $x = -h$, evidentemente, teremos $y' < 0$; quando $x = h$, teremos $y' > 0$. Portanto, $x_2 = 0$ é um ponto mínimo da função y, sendo $y_{mín} = 0$ (fig. 24). A investigação do comportamento da função no ponto $x_1 = -1$ pode ser feita também através da segunda derivada

$$y'' = -\frac{2}{3x\sqrt[3]{x}}.$$

Temos $y'' < 0$, quando $x_1 = -1$ e, portanto, $x_1 = -1$ é um ponto máximo da função.

3°. **Valores mínimo e máximo absolutos.** O valor mínimo (máximo) absoluto de uma função contínua $f(x)$ num dado segmento $[a, b]$ é obtido ou nos pontos críticos da função ou nos extremos de tal segmento.

---

*) Se não for fácil determinar o sinal da derivada y', pode-se calculá-lo por meios aritméticos, tomando como h um número positivo suficientemente pequeno.

Exemplo 5. Achar os valores mínimo e máximo absolutos da função

$$y = x^3 - 3x + 3$$

no segmento $-1\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2\frac{1}{2}$.

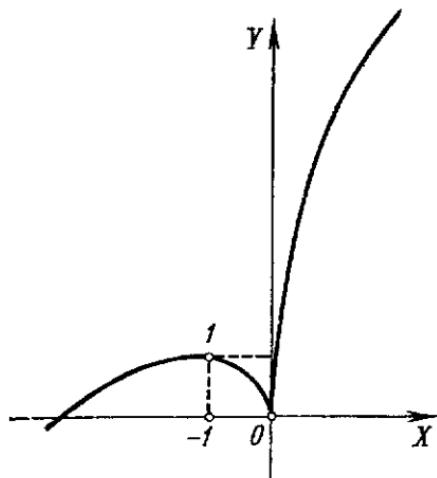
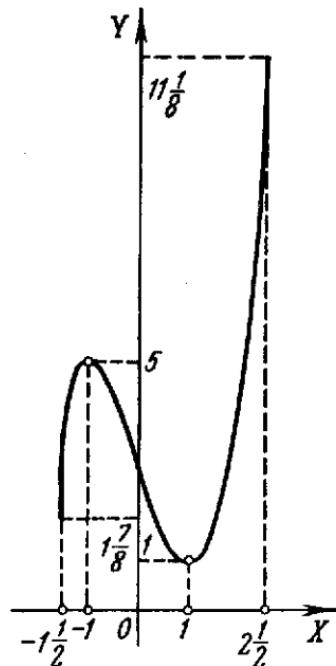



FIG. 24 FIG. 25

Solução. Já que

$$y' = 3x^2 - 3,$$

então, os pontos críticos da função y são: $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$. Comparando os valores da função nestes pontos com os valores da função nos extremos do intervalo dado

$$y(-1) = 5; \quad y(1) = 1; \quad y\left(-1\frac{1}{2}\right) = 4\frac{1}{8}; \quad y\left(2\frac{1}{2}\right) = 11\frac{1}{8},$$

chegamos à conclusão (fig. 25), de que o valor mínimo absoluto da função $m = 1$ é obtido no ponto $x = 1$ (no ponto mínimo) e o máximo absoluto $M = 11\frac{1}{8}$, no ponto $x = 2\frac{1}{2}$ (no ponto extremo direito do segmento).

Determinar os intervalos de decrescimento e crescimento das funções:

811. $y = 1 - 4x - x^2$. **812.** $y = (x - 2)^2$.

813. $y = (x + 4)^3$. **814.** $y = x^2(x - 3)$.

815. $y = \frac{x}{x-2}$.

816. $y = \frac{1}{(x-1)^2}$.

817. $y = \frac{x}{x^2 - 6x - 16}$.

818. $y = (x-3)\sqrt{x}$.

819. $y = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x}$.

820. $y = x + \text{sen } x$.

821. $y = x \ln x$.

822. $y = \text{arcsen } (1 + x)$.

823. $y = 2e^{x^2-4x}$.

824. $y = 2^{\frac{1}{x-a}}$.

825. $y = \frac{e^x}{x}$.

Estudar os extremos das seguintes funções:

826. $y = x^2 + 4x + 6$.

Solução. Achamos a derivada da função dada $y' = 2x + 4$. Igualamos y' a zero, obtemos o valor crítico do argumento $x = -2$. Como $y' < 0$ para $x < -2$ e $y' > 0$ para $x > -2$, então, $x = -2$ é um ponto mínimo da função dada, sendo $y_{\text{mín}} = 2$. Obteremos o mesmo resultado, recorrendo ao sinal da segunda derivada no ponto crítico: $y'' = 2 > 0$.

827. $y = 2 + x - x^2$.

828. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$.

829. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$.

Solução. Achamos a derivada

$$y' = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2).$$

Igualando a zero a derivada y', obtemos os pontos críticos $x_1 = -2$ e $x_2 = 1$. Para determinar o caráter do extremo calculamos a segunda derivada $y'' = 6(2x + 1)$. Como $y''(-2) < 0$, o ponto $x_1 = -2$ é um ponto máximo da função y, sendo $y_{\text{máx}} = 25$. Por analogia, teremos que $y''(1) > 0$; por isso $x_2 = 1$ é um ponto mínimo da função y, sendo $y_{\text{mín}} = -2$.

830. $y = x^2(x-12)^2$.

831. $y = x(x-1)^2(x-2)^3$.

832. $y = \frac{x^3}{x^2+3}$.

833. $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$.

834. $y = \frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$.

835. $y = \frac{16}{x(4-x^2)}$.

836. $y = \frac{4}{\sqrt{x^2+8}}$.

837. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-4}}$.

838. $y = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$.

839. $y = 2 \text{ sen } 2x + \text{sen } 4x$.

840. $y = 2 \cos \frac{x}{2} + 3 \cos \frac{x}{3}$.

841. $y = x - \ln (1 + x)$.

842. $y = x \ln x$.

843. $y = x \ln^2 x$.

844. $y = \cosh x$.

845. $y = xe^x$.

846. $y = x^2 e^{-x}$.

847. $y = \frac{e^x}{x}$.

848. $y = x - \text{arctg } x$.

Determinar os mínimos e máximos absolutos das seguintes funções nos segmentos que se indicam (quando não se indicam os segmentos, os mínimos e máximos absolutos das funções devem ser determinados em todo o campo de existência):

849. $y = \frac{x}{1+x^2}$. **850.** $y = \sqrt{x(10-x)}$.

851. $y = \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x$. **852.** $y = \arccos x$.

853. $y = x^3$ no segmento $[-1, 3]$.

854. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$;

a) no segmento $[-1, 5]$; b) no segmento $[-10, 12]$.

855. Demonstrar que para valores positivos de x é justa a desigualdade

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2.$$

856. Determinar os coeficientes p e q do trinômio quadrado $y = x^2 + px + q$, de forma que $y = 3$ seja um mínimo deste trinômio, quando $x = 1$. Dar a explicação geométrica do resultado obtido.

857. Demonstrar a desigualdade

$$e^x > 1 + x, \text{ quando } x \neq 0.$$

Solução. Examinamos a função

$$f(x) = e^x - (1 + x).$$

Por procedimento comum encontramos que esta função tem um mínimo único $f(0) = 0$. Daí,

$$f(x) > f(0) \quad \text{para } x \neq 0, \text{ i.é.,}$$
$$e^x > 1 + x \quad \text{para } x \neq 0,$$

o que queriamos demonstrar.

Demonstrar as desigualdades:

858. $x - \frac{x^3}{6} < \operatorname{sen} x < x$, quando $x > 0$.

859. $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$, quando $x \neq 0$.

860. $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x$, quando $x > 0$.

861. Dividir um número positivo dado a em dois termos, de tal forma que seu produto seja o maior possível.

862. Torcer um fio de arame de comprimento l de maneira a formar um retângulo, cuja área seja a maior possível.

863. Qual dos triângulos retângulos de perímetro dado, igual a $2p$, tem maior área?

864. É necessário construir uma área retangular cercada em três de seus lados por uma rede metálica e que o quarto lado seja adja-

cente a um longo muro de pedras. Que forma será mais conveniente dar à superfície (para que sua área seja maior), se dispomos de l metros lineares de rede metálica?

865. De uma folha quadrada de papelão, com lado a, devemos fazer uma caixa retangular aberta que tenha a maior capacidade possível, cortando-se quadrados nos ângulos da folha e dobrando depois as partes salientes da figura em forma de cruz assim obtida.

866. Um depósito aberto, de folha de lata, com fundo quadrado, deve ter capacidade para v litros. Em que dimensões deve ser feito o depósito para que em sua fabricação se gaste a menor quantidade possível de lata?

867. Qual dos cilindros de volume dado tem menor superfície total?

868. Inscrever numa esfera dada um cilindro de volume máximo.

869. Inscrever numa esfera dada um cilindro que tenha a maior superfície lateral possível.

870. Inscrever em uma esfera dada um cone de volume máximo.

871. Inscrever em uma esfera um cone circular reto que tenha a maior superfície lateral possível.

872. Circunscrever em torno de um cilindro dado um cone reto que tenha o menor volume possível (os planos e centros de suas bases circulares coincidem).

873. Qual dos cones circunscritos em torno de uma esfera tem o menor volume?

874. Uma faixa de lata de largura a deve ser encurvada em forma de canalete cilíndrico aberto (fig. 26). Que ângulo central φ deve-se tomar para que o canalete tenha a maior capacidade possível?

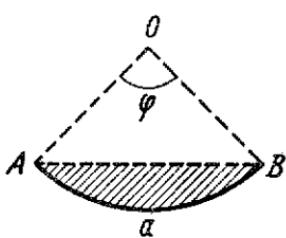



FIG. 26

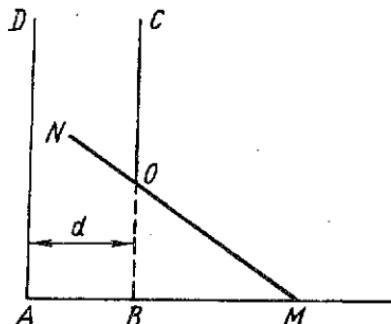



FIG. 27

875. De uma folha circular deve-se cortar tal setor, que enrolando-o, possa-se obter um funil que tenha a maior capacidade possível.

876. Um recipiente aberto é formado por um cilindro, cuja parte inferior termina numa meia esfera; a espessura de suas paredes é

constante. Que dimensões deverá ter tal recipiente para que, sem alterar sua capacidade, se gaste em sua construção a menor quantidade possível de material?

877. Determinar a altura mínima $h = OB$ que pode ter a porta de uma torre vertical $ABCD$, para que através dela se possa introduzir na torre uma barra rígida MN, de comprimento l, cujo extremo resvalará ao longo da linha horizontal AB. A largura da torre é de $d < l$ (fig. 27).

878. Em um plano de coordenadas se dá um ponto $M_0(x_0, y_0)$, situado no primeiro quadrante. Fazer passar por este ponto uma reta, de tal forma que o triângulo, formado entre ela e os semi-eixos positivos de coordenadas, tenha a menor área possível.

879. Inscrever em uma elipse dada um retângulo de maior área possível, que tenha os lados paralelos aos eixos da própria elipse.

880. Inscrever um retângulo de maior área possível no segmento da parábola $y^2 = 2px$, cortado pela reta $x = 2a$.

881. Achar o ponto de uma curva $y = \frac{1}{1 + x^2}$, no qual a tangente forme com o eixo OX o ângulo de maior valor absoluto possível.

882. Um mensageiro deve ir do ponto A, localizado em uma das margens de um rio, ao ponto B, localizado na outra margem. Sabendo-se que a velocidade de movimento pela margem é k vezes maior que o movimento pela água, determinar sob que ângulo ele deverá atravessar o rio, para chegar ao ponto B no menor tempo possível. A largura do rio é de h, a distância entre os pontos A e B (ao longo da margem) é d.

883. No segmento reto $AB = a$, que une entre si dois focos de luz A (de intensidade p) e B (de intensidade q), achar o ponto menos iluminado M (a iluminação é inversamente proporcional ao quadrado da distância do foco luminoso).

884. Uma lâmpada pende sobre o centro de uma mesa redonda de raio r. A que altura da mesa deve estar a lâmpada para que a iluminação de um objeto que se encontre à beira da mesa seja a melhor possível? (A iluminação é diretamente proporcional ao cosseno do ângulo de incidência dos raios luminosos e inversamente proporcional ao quadrado da distância ao foco de luz).

885. De um tronco redondo de diâmetro d deve-se cortar uma viga de seção retangular. Quais deverão ser a largura x e altura y desta seção para que a viga tenha a resistência máxima possível: a) na compressão; b) na flexão?

Observação. A resistência da viga à compressão é proporcional à área de sua seção transversal e a resistência à flexão é proporcional ao produto da largura desta seção pelo quadrado de sua altura.

886. Uma barra uniforme AB que pode girar em torno do ponto A (fig. 28), suporta uma carga Q kg à distância de a cm do ponto A e é mantida em equilíbrio por meio de uma força vertical P, aplicada no seu extremo livre B. Cada centímetro de comprimento da barra pesa q kg. Determinar o comprimento x da mesma de tal forma que a força P seja a mínima possível e achar $P_{mín}$.

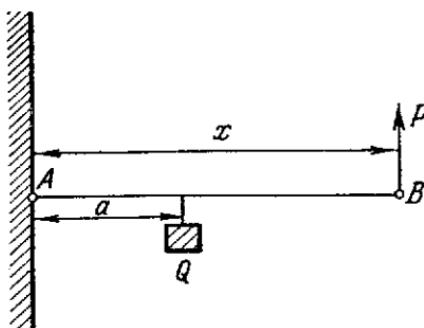



FIG. 28

887*. Os centros de três esferas perfeitamente elásticas A, B e C estão situados em linha reta. A esfera A, de massa M, choca a uma velocidade v com a esfera B, a qual, recebendo uma certa velocidade, choca-se, por sua vez, com a esfera C, cuja massa é m. Que massa deverá ter a esfera B para que a velocidade da esfera C seja a maior?

888. Se tivermos N pilhas elétricas idênticas, com elas podemos formar baterias por diferentes formas, unindo entre si grupos de n pilhas em série e depois, os grupos assim formados $\left(\text{em número } \frac{N}{n}\right)$, em paralelo. A intensidade da corrente que proporciona uma bateria deste tipo se determina pela fórmula

$$I = \frac{Nn}{NR + n^2r},$$

onde $\mathcal{E}$ é a força eletromotriz de uma pilha; r, sua resistência interna e R, sua resistência externa.

Determinar para que valor de n é maior a intensidade da corrente que proporciona a bateria.

889. Determinar que diâmetro y deverá ter a abertura circular de um dique para que o gasto de água por segundo Q seja o maior possível se $Q = cy\sqrt{h - y}$, onde h é a profundidade do ponto inferior da abertura (tanto h, como o coeficiente empírico c são constantes).

890. Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são os resultados de medições igualmente precisas da grandeza x, seu valor mais provável será aquele para o qual a soma dos quadrados dos erros

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} (x - x_i)^2$$

tenha o valor mínimo *(princípio dos quadrados mínimos)*.

Demonstrar que o valor mais provável da grandeza x é a média aritmética dos resultados das medições.

§ 2. Direção da concavidade. Pontos de inflexão

1°. **Concavidade do gráfico de uma função.** Se diz que o gráfico de uma função diferenciável $y = f(x)$ é *côncava para baixo* no intervalo (a, b) (ou *côncava para cima* no intervalo (a_1, b_1)), se para $a < x < b$ o arco da curva está situado abaixo (ou, correspondentemente, para $a_1 < x < b_1$, acima) da tangente traçada em qualquer ponto do intervalo (a, b) (ou no intervalo (a_1, b_1)) (fig. 29). A condição suficiente para que no gráfico $y = f(x)$ a concavidade esteja dirigida para baixo (ou para cima), é que se verifique no intervalo correspondente a desigualdade

$$f''(x) < 0 \qquad (f''(x) > 0).$$

Em lugar de dizer-se que o gráfico é côncavo para baixo, deve-se dizer que *tem sua concavidade dirigida para cima*. De forma análoga para o gráfico côncavo para cima, se diz também que *tem sua concavidade dirigida para baixo*.

2°. **Pontos de inflexão.** O ponto $(x_0, f(x_0))$, no qual muda de sentido a concavidade do gráfico da função, chama-se *ponto de inflexão* (fig. 29).

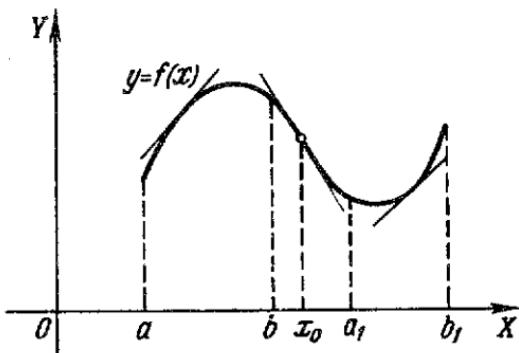



FIG. 29

Para a abscissa do ponto de inflexão x_0, do gráfico da função $y = f(x)$, a segunda derivada $f''(x_0) = 0$ ou $f''(x_0)$ não existe. Os pontos, em que $f''(x) = 0$ ou $f''(x)$ não existe, se chamam *pontos críticos de 2a. espécie.* O ponto crítico de 2a. espécie x_0 é a abscissa do ponto de inflexão, se $f''(x)$ conserva os sinais constantes, e contrários entre si, nos intervalos $x_0 - \delta < x < x_0$ e $x_0 < x < x_0 + \delta$, onde δ é um número positivo determinado e não será ponto de inflexão se os sinais de $f''(x)$ nos intervalos citados são iguais.

Exemplo 1. Determinar os intervalos de concavidade e convexidade e os pontos de inflexão da *curva de Gauss*

$$y = e^{-x^2}.$$

Solução. Temos

$$y' = -2xe^{-x^2}$$

e

$$y'' = (4x^2 - 2)\,e^{-x^2}.$$

Igualando a segunda derivada y'' a zero, achamos os pontos críticos de 2a. espécie

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Estes pontos dividem o eixo numérico $-\infty < x < +\infty$ em três intervalos: I$(-\infty, x_1)$, II(x_1, x_2) e III$(x_2, +\infty)$. Os sinais de y'' serão, respectivamente, $+$, $-$ e $+$ (do que é fácil convencer-se tomando, por exemplo, um ponto em cada um dos intervalos indicados e colocando-se os valores correspondentes de x em y''). Por isto, a curva será: 1) côncava para cima para $-\infty < x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\frac{1}{\sqrt{2}} < x < +\infty$; 2) côncava para baixo para $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Os pontos $\left(\frac{\pm 1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ são pontos de inflexão (fig. 30).

Devemos observar que devido à simetria da curva de Gauss em relação ao eixo OY, teria sido suficiente realizar a investigação do sinal da concavidade desta curva no semi-eixo $0 < x < +\infty$.

Exemplo 2. Achar os pontos de inflexão do gráfico da função

$$y = \sqrt[3]{x + 2}.$$

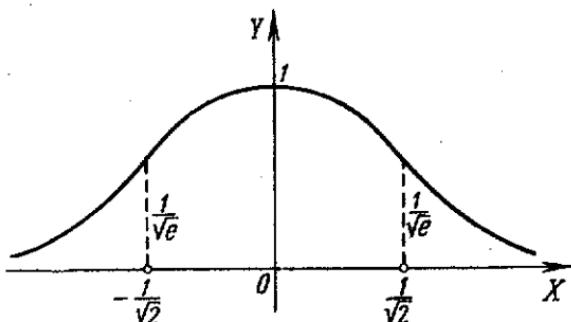



FIG. 30

Solução. Temos:

$$y'' = -\frac{2}{9}(x+2)^{-\frac{5}{3}} = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(x+2)^5}}. \tag{1}$$

É evidente que y'' não se anula em parte alguma.

Igualando a zero o denominador da fração do segundo membro da igualdade (1), teremos que y'' não existe para $x = -2$. Como $y'' > 0$ para $x < -2$ e $y'' < 0$ para $x > -2$, o ponto $(-2, 0)$ é um ponto de inflexão (fig. 31). A tangente à este ponto é paralela ao eixo das ordenadas, já que a primeira derivada y' é infinita para $x = -2$.

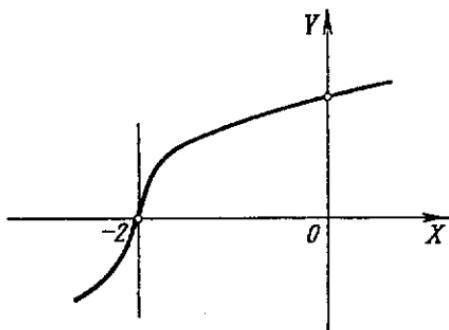



FIG. 31

Achar os intervalos da concavidade e os pontos de inflexão dos gráficos das funções:

891. $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$.

892. $y = (x + 1)^4$.

893. $y = \dfrac{1}{x+3}$.

894. $y = \dfrac{x^3}{x^2+12}$.

895. $y = \sqrt[3]{4x^3 - 12x}$.

896. $y = \cos x$.

897. $y = x - \operatorname{sen} x$.

898. $y = x^2 \ln x$.

899. $y = \operatorname{arctg} x - x$.

900. $y = (1 + x^2)\, e^x$.

§ 3. Assíntotas

1°. **Definição.** Se um ponto (x, y) se desloca continuamente por uma curva $y = f(x)$ de tal forma, que pelo menos uma de suas coordenadas tenda ao infinito, enquanto que a distância entre este ponto e uma reta determinada tenda a zero, esta reta recebe o nome de *assíntota* de curva.

2°. **Assíntotas verticais** (paralelas ao eixo OY). Se existe um número a tal que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty,$$

a reta $x = a$ é a assíntota *(vertical)*.

3°. **Assíntotas oblíquas** (em relação aos eixos das coordenadas). Se existem os limites

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k_1$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - k_1 x] = b_1,$$

a reta $y = k_1 x + b_1$ será assíntota (*oblíqua à direita*, ou se $k_1 = 0$, *horizontal direita*, paralela ao eixo OX).

Se existem os limites

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = k_2$$

e

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - k_2 x] = b_2,$$

a reta $y = k_2 x + b_2$ é assíntota (*oblíqua à esquerda*, ou se $k_2 = 0$, *horizontal esquerda*, paralela ao eixo OX). O gráfico da função $y = f(x)$ (que se supõe uniforme) não pode ter mais de uma assíntota direita (oblíqua ou horizontal), nem mais de uma assíntota esquerda (oblíqua ou horizontal).

Exemplo 1. Achar as assíntotas da curva

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Solução. Igualando a zero o denominador, obtemos duas assíntotas verticais:

$$x = -1 \quad \text{e} \quad x = 1.$$

Vamos procurar as assíntotas oblíquas. Quando $x \to +\infty$, teremos:

$$k_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = 1,$$

$$b_1 = \lim_{x \to +\infty} (y - x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} = 0,$$

portanto, a assíntota direita será a reta $y = x$. Por analogia, quando $x \to -\infty$, teremos:

$$k_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = -1,$$

$$b_2 = \lim_{x \to -\infty} (y + x) = 0.$$

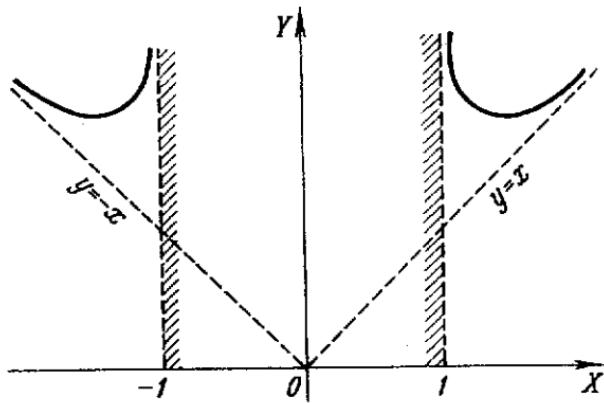



FIG. 32

Desta forma, a assíntota esquerda é $y = -x$ (fig. 32). A investigação das assíntotas desta curva pode simplificar-se se considerarmos sua simetria.

Exemplo 2. Achar a assíntota da curva

$$y = x + \ln x.$$

Solução. Como

$$\lim_{x \to +0} y = -\infty,$$

a reta $x = 0$ será uma assíntota vertical (inferior). Vamos investigar a curva para achar somente a assíntota oblíqua direita (já que $x > 0$).

Temos:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (y - x) = \lim_{x \to +\infty} \ln x = \infty.$$

Portanto, esta curva não tem assíntota oblíqua.

Se a curva é dada pelas equações paramétricas $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$, em primeiro lugar se investiga se o parâmetro t tem valores para os quais uma das funções $\varphi(t)$ ou $\psi(t)$ se torne infinita, enquanto que a outra permaneça finita. Seja $\lim\limits_{t \to t_0} \varphi(t) = A$ e $\lim\limits_{t \to t_0} \psi(t) = B$. Se $A = \infty$ e $B \neq \infty$, então a curva tem uma assíntota horizontal $y = B$; se $A \neq \infty$ e $B = \infty$, a curva tem assíntota vertical $x = A$. Se $A = B = \infty$ e ao mesmo tempo que

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} = k; \quad \lim_{t \to t_0} [\psi(t) - k\varphi(t)] = b,$$

a curva terá uma assíntota oblíqua $y = kx + b$.

Se a curva é dada em forma de equação polar $r = f(\varphi)$, suas assíntotas podem ser encontradas pela regra anterior, reduzindo-se a equação da curva à forma paramétrica pelas fórmulas:

$$x = r \cos \varphi = f(\varphi) \cos \varphi;$$

$$y = r \operatorname{sen} \varphi = f(\varphi) \operatorname{sen} \varphi.$$

Achar as assíntotas das curvas:

901. $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$.

902. $y = \dfrac{x}{x^2 - 4x + 3}$.

903. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$.

904. $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 9}$.

905. $y = \sqrt{x^2 - 1}$.

906. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$.

907. $y = \dfrac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

908. $y = x - 2 + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + 9}}$.

909. $y = e^{-x^2} + 2$.

910. $y = \dfrac{1}{1 - e^x}$.

911. $y = e^{\frac{1}{x}}$.

912. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

913. $y = \ln(1 + x)$.

914. $y = t$; $y = t + 2 \operatorname{arctg} t$.

915. Achar a assíntota da espiral hiperbólica $r = \dfrac{a}{\varphi}$.

§ 4. Construção de gráficos das funções por seus pontos característicos

Ao construir-se o gráfico de uma função é necessário, antes de mais nada, achar o campo de definição do mesmo e determinar seu comportamento em torno dos limites deste campo de definição. É conveniente assinalar também previamente certas peculiaridades das funções (se estas existirem) como: simetria, periodicidade, constância do sinal, monotonia, etc.

A seguir deve-se achar os pontos de descontinuidade, os pontos extremos da função, os pontos de inflexão, as assíntotas, etc. Os elementos encontrados permitem estabelecer o caráter geral do gráfico da função e obter seu desenho matemático verdadeiro.

Exemplo 1. Construir o gráfico da função

$$y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}.$$

Solução. a) A função existe em todas as partes, menos nos pontos $x = \pm 1$. A função é ímpar, portanto o seu gráfico será simétrico em relação ao ponto $O\ (0; 0)$. Esta circunstância simplifica a construção do gráfico.

b) Os pontos de descontinuidade são $x = -1$ e $x = 1$, ao mesmo tempo que os $\lim\limits_{x \to 1 \mp 0} y = \mp \infty$ e $\lim\limits_{x \to -1 \mp 0} y = \mp \infty$, portanto as retas $x = \pm 1$ são assíntotas verticais do gráfico.

c) Procuramos as assíntotas oblíquas. Teremos:

$$k_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = 0,$$

$$b_1 = \lim_{x \to +\infty} y = \infty,$$

portanto, não existe assíntota oblíqua direita. Como o gráfico é simétrico, também não há assíntota oblíqua esquerda.

d) Encontramos os pontos críticos de 1a. e 2a. espécie, isto é, os pontos em que se anula ou não existe a primeira, ou em correspondência, a segunda derivada da função dada.

Teremos:

$$y' = \frac{x^2 - 3}{\sqrt[3]{(x^2 - 1)^4}}, \tag{1}$$

$$y'' = \frac{2x(9 - x^2)}{9\sqrt[3]{(x^2 - 1)^7}}. \tag{2}$$

As derivadas y' e y'' deixam de existir unicamente quando $x = \pm 1$, isto é, só nos pontos em que tampouco existe a própria função y, portanto serão pontos críticos só aqueles em que y' ou y'' se anulam.

De (1) e (2) se deduz:

$$y' = 0 \quad \text{para} \quad x = \pm \sqrt{3};$$

$$y'' = 0 \quad \text{para} \quad x = 0 \text{ e } x = \pm 3.$$

Desta forma, y' conserva constante o sinal em cada um dos intervalos $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \sqrt{3})$ e $(\sqrt{3}, +\infty)$, e y'' em cada um dos intervalos $(-\infty, -3)$, $(-3, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$ e $(3, +\infty)$.

Para determinar que sinal tem y' (ou correspondentemente y'') em cada um dos intervalos assinalados, basta determinar o sinal de y' (ou de y'') em um ponto qualquer de cada um destes intervalos.

Os resultados desta investigação são colocados, para maior comodidade, numa tabela (tabela 1), juntamente com os dos cálculos das ordenadas dos pontos carac-

terísticos do gráfico da função. Deve-se assinalar que, devido ao fato de ser a função y ímpar, é suficiente fazer os cálculos somente para $x \geqslant 0$; a metade esquerda do gráfico é reconstruída pelo princípio da simetria ímpar.

Tabela I

x	0	$(0, 1)$	1	$(1, \sqrt{3})$	$\sqrt{3} \approx 1,73$	$(\sqrt{3}, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y	0	$-$	$\pm\infty$	$+$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \approx 1,37$	$+$	1,5	$+$
y'	$-$	$-$	não existe	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y''	0	$-$	não existe	$+$	$+$	$+$	0	$-$
Conclusões	Ponto de inflexão	A função decresce; o gráfico é côncavo para baixo	Ponto de descontinuidade	A função decresce; o gráfico é côncavo para cima	Ponto mínimo	A função cresce; o gráfico é côncavo para cima	Ponto de inflexão	A função cresce; o gráfico é côncavo para baixo

e) Com os resultados da investigação construimos o gráfico da função (fig. 33).

Exemplo 2. Construir o gráfico da função

$$y = \frac{\ln x}{x}.$$

Solução. a) O campo de existência da função é: $0 < x < +\infty$.

b) No campo de existência não há pontos de descontinuidade, porém ao aproximar-se ao ponto limite ($x = 0$) do campo de existência, teremos

$$\lim_{x \to 0} y = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty.$$

Portanto, a reta $x = 0$ (o eixo das ordenadas) é uma assíntota vertical.

c) Procuramos a assíntota oblíqua direita ou horizontal (já que a assíntota oblíqua esquerda não existe, pois não é possível que $x \to -\infty$):

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} y = 0.$$

Portanto, a assíntota horizontal direita é o eixo das abscissas: $y = 0$.

d) Achamos os pontos críticos. Teremos:

$$y' = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

$$y'' = \frac{2 \ln x - 3}{x^3};$$

y' e y'' existem em todos os pontos do campo de existência da função dada e

$$y' = 0, \text{ se } \ln x = 1, \text{ isto é, quando } x = e;$$

$$y'' = 0, \text{ se } \ln x = \frac{3}{2}, \text{ isto é, quando } x = e^{3/2}.$$

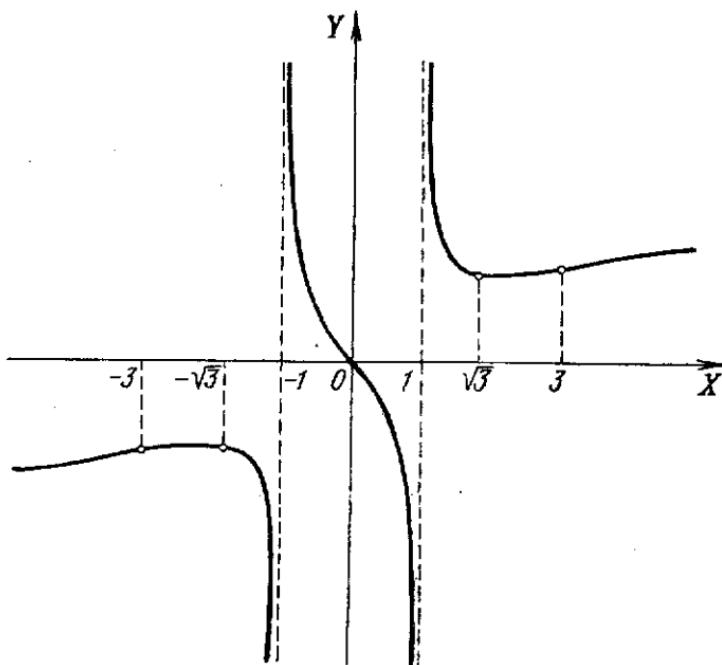



FIG. 33

Fazemos a tabela, na qual colocamos os pontos característicos (tabela II). Neste caso, além dos pontos característicos encontrados é conveniente achar os pontos de interseção do gráfico com os eixos das coordenadas. Fazendo $y = 0$, encontramos $x = 1$ (ponto de interseção da curva com o eixo das abscissas); o gráfico não cruza com o eixo das ordenadas.

e) Com os resultados obtidos construimos o gráfico da função (fig. 34).

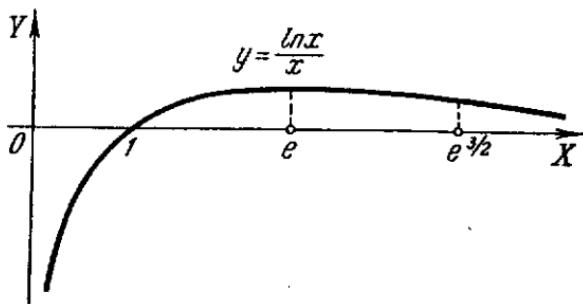



FIG. 34

Tabela II

x	0	$(0, 1)$	1	$(1, e)$	$e \approx 2,72$	$\left(e, e^{\frac{3}{2}}\right)$	$e^{\frac{3}{2}} \approx 4,49$	$\left(e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$
y	$-\infty$	$-$	0	$+$	$\frac{1}{e} \approx 0,37$	$+$	$\frac{3}{2\sqrt{e^3}} \approx 0,33$	$+$
y'	não existe	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	não existe	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
Conclusões	Ponto fronteira do campo de definição da função. Assíntota vertical	A função cresce; o gráfico é côncavo para baixo	Ponto de interseção do gráfico com o eixo OX	A função cresce; o gráfico é côncavo para baixo	Ponto máximo da função	A função decresce; o gráfico é côncavo para baixo	Ponto de inflexão	A função decresce; o gráfico é côncavo para cima

Construir os gráficos das funções que se indicam abaixo, determinando o campo de existência de cada função, os pontos de descontinuidade, os pontos extremos, os intervalos de crescimento e decrescimento, os pontos de inflexão de seus gráficos, a direção da concavidade e da assíntota dos gráficos:

916. $y = x^3 - 3x^2$.

917. $y = \frac{6x^2 - x^4}{9}$.

918. $y = (x - 1)^2 (x + 2)$.

919. $y = \frac{(x - 2)^2 (x + 4)}{4}$.

920. $y = \frac{(x^2 - 5)^3}{125}$.

921. $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

922. $y = \frac{x^4 - 3}{x}$.

923. $y = \frac{x^4 + 3}{x}$.

924. $y = x^2 + \frac{2}{x}$.

925. $y = \frac{1}{x^2 + 3}$.

926. $y = \frac{8}{x^2 - 4}$.

927. $y = \frac{4x}{4 + x^2}$.

928. $y = \frac{4x - 12}{(x - 2)^2}$.

929. $y = -\frac{x}{x^2 - 4}$.

930. $y = \frac{16}{x^2(x - 4)}$.

931. $y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$.

932. $y = \sqrt{x} + \sqrt{4 - x}$.

933. $y = \sqrt{8 + x} - \sqrt{8 - x}$.

934. $y = x\sqrt{x + 3}$.

935. $y = \sqrt{x^3 - 3x}$.

936. $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$.

937. $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$.

938. $y = 2x + 2 - 3\sqrt[3]{(x + 1)^2}$.

939. $y = \sqrt[3]{x + 1} - \sqrt[3]{x - 1}$.

940. $y = \sqrt[3]{(x + 4)^2} - \sqrt[3]{(x - 4)^2}$.

941. $y = \sqrt[3]{(x - 2)^2} + \sqrt[3]{(x - 4)^2}$.

942. $y = \frac{4}{\sqrt{4 - x^2}}$.

943. $y = \frac{8}{x\sqrt{x^2 - 4}}$.

944. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$.

945. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{(x - 2)^2}}$.

946. $y = xe^{-x}$.

947. $y = \left(a + \frac{x^2}{a}\right) e^{\frac{x}{a}}$.

948. $y = e^{8x - x^2 - 14}$.

949. $y = (2 + x^2) e^{-x^2}$.

950. $y = 2|x| - x^2$.

951. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

952. $y = \frac{x^2}{2} \ln \frac{x}{a}$.

953. $y = \frac{x}{\ln x}$.

954. $y = (x + 1) \ln^2 (x + 1)$.

955. $y = \ln (x^2 - 1) + \frac{1}{x^2 - 1}$.

956. $y = \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$.

957. $y = \ln(1 + e^{-x})$.

958. $y = \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$.

959. $y = \operatorname{sen} x + \cos x$.

960. $y = \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}$.

961. $y = \cos x - \cos^2 x$.

962. $y = \operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x$.

963. $y = \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}$.

964. $y = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$.

965. $y = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} 2x$.

966. $y = \cos x \cdot \cos 2x$.

967. $y = x + \operatorname{sen} x$.

968. $x = \operatorname{arcsen}(1 - \sqrt[3]{x^2})$.

969. $y = \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}$.

970. $y = 2x - \operatorname{tg} x$.

971. $y = x \operatorname{arctg} x$.

972. $y = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$, quando $x \neq 0$.
e $y = 0$, quando $x = 0$.

973. $y = x + 2 \operatorname{arcctg} x$.

974. $y = \frac{x}{2} + \operatorname{arcctg} x$.

975. $y = \ln \operatorname{senh} x$.

976. $y = \operatorname{Arcosh}\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

977. $y = e^{\operatorname{sen} x}$.

978. $y = e^{\operatorname{arcsen} \sqrt{x}}$.

979. $y = e^{\operatorname{arctg} x}$.

980. $y = \ln \operatorname{sen} x$.

981. $y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$.

982. $y = \ln x - \operatorname{arctg} x$.

983. $y = \cos x - \ln \cos x$.

984. $y = \operatorname{arctg}(\ln x)$.

985. $y = \operatorname{arcsen} \ln(x^2 + 1)$.

986. $y = x^x$.

987. $y = x^{\frac{1}{x}}$.

Recomenda-se também construir os gráficos das funções indicadas nos n°s. **826 — 848.**

Construir os gráficos das seguintes funções, dadas em forma paramétrica:

988. $x = t^2 - 2t,\ y = t^2 + 2t$.

989. $x = a \cos^3 t,\ y = a \operatorname{sen} t\ (a > 0)$.

990. $x = te^t,\ y = te^{-t}$.

991. $x = t + e^{-t},\ y = 2t + e^{-2t}$.

992. $x = a(\operatorname{senh} t - t),\ y = a(\cosh t - 1)\ (a > 0)$.

§ 5. Diferencial de arco. Curvatura

1°. **Diferencial de arco.** A diferencial do arco s de uma curva plana e regular dada por uma equação em coordenadas cartesianas x e y é expressa pela fórmula

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2};$$

se a equação da curva tem a forma (todas as funções derivam-se continuamente):

a) $y = f(x)$, então, $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$, quando $dx > 0$;

b) $x = f_1(y)$, então $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$, quando $dy > 0$;

c) $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, então $ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$, quando $dt > 0$;

d) $F(x, y) = 0$, então $ds = \frac{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2}}{|F_y'|}|dx| = \frac{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2}}{|F_x'|}|dy|$*.

Chamando de α o ângulo que forma a direção positiva da tangente (isto é, dirigida no sentido de crescimento do arco variável da curva s) com a direção positiva do eixo OX, teremos:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds},$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{dy}{ds}.$$

Em coordenadas polares,

$$ds = \sqrt{(dr)^2 + (r\,d\varphi)^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi.$$

Chamando de β o ângulo formado pelo raio polar de um ponto da curva e a tangente à curva neste mesmo ponto, teremos:

$$\cos\beta = \frac{dr}{ds},$$

$$\operatorname{sen}\beta = r\frac{d\varphi}{ds}.$$

2°. **Curvatura de uma curva.** Chama-se *curvatura* K de uma curva regular, em seu ponto M, o limite da razão do ângulo que formam as direções positivas das tangentes a esta curva nos pontos M e N *(ângulo de adjacência)* ao comprimento do arco $MN = \Delta s$, quando $N \to M$ (fig. 35), isto é,

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds},$$

onde α é o ângulo entre a direção positiva da tangente no ponto M e o eixo OX.

---

*) A definição das derivadas parciais F_x' e F_y' deve-se ver no cap. VI, § 3, 1°.

Raio de curvatura R. Recebe o nome de raio de curvatura R a quantidade inversa do valor absoluto da curvatura, isto é,

$$R = \frac{1}{|K|}.$$

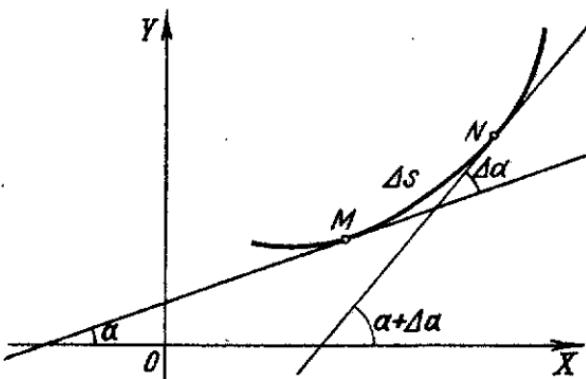



FIG. 35

A circunferência $K = \left(\frac{1}{a}\text{, onde } a \text{ é o raio da circunferência}\right)$, o mesmo que a linha reta ($K = 0$) são linhas de curvatura constante.

As fórmulas para calcular as curvaturas em coordenadas cartesianas são as seguintes (exatas, excepto o sinal):

1) se a curva é dada por uma equação explícita $y = f(x)$, a fórmula será

$$K = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}};$$

2) se a curva é dada por uma equação implícita $F(x, y) = 0$, emprega-se a fórmula

$$K = \frac{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{xy} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}{(F'^2_x + F'^2_y)^{3/2}}; {}^{*)}$$

3) se a curva é dada em forma paramétrica pelas equações $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$, então

$$K = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}},$$

onde

$$x' = \frac{dx}{dt}, \quad y' = \frac{dy}{dt}, \quad x'' = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

Em coordenadas polares, quando a curva se dá pela equação $r = f(\varphi)$, teremos

$$K = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}},$$

*) A definição das derivadas parciais F''_{xx}, F''_{xy} e F''_{yy} deve-se ver no cap. VI, § 7, 1°

onde

$$r' = \frac{dr}{d\varphi} \quad \text{e} \quad r'' = \frac{d^2r}{d\varphi^2}.$$

3°. **Circunferência osculatriz.** Chama-se *circunferência osculatriz* (ou *círculo osculador*) da curva em seu ponto M à posição limite da circunferência que passa pelo ponto M e por outros dois pontos P e Q da mesma curva, quando $P \to M$ e $Q \to M$.

O raio da circunferência osculatriz é igual ao raio da curvatura e o centro (centro de curvatura) se encontra na normal à curva, traçada no ponto M, até o lado de sua concavidade.

As coordenadas X e Y do centro de curvatura são calculadas pelas fórmulas

$$X = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}, \quad Y = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

A *evoluta* de uma curva é o lugar geométrico dos centros de curvatura desta curva

Se nas fórmulas para determinação das coordenadas do centro de curvatura se consideram X e Y como as coordenadas variáveis do ponto da evoluta, estas fórmulas nos darão as equações paramétricas desta evoluta com parâmetro x ou y (ou t, se a própria curva é dada por equações em forma paramétrica).

Exemplo 1. Achar a equação da evoluta da parábola $y = x^2$.

Solução. $X = -4x^3$, $Y = \frac{1 + 6x^2}{2}$. Eliminando o parâmetro x, achamos a equação da evoluta em forma explícita $Y = \frac{1}{2} + 3\left(\frac{X}{4}\right)^{2/3}$.

Evolvente de uma curva. Dá-se este nome a uma curva tal, que em relação a ela a curva dada resulta ser a evoluta.

A normal MC da evolvente Γ_2 é tangente à evoluta Γ_1; o comprimento do arco $\overset{\frown}{CC_1}$ da evoluta é igual ao acréscimo correspondente do raio de curvatura $\overset{\frown}{CC_1} = |M_1C_1 - MC|$, por cuja razão a evolvente Γ_2 recebe, também, o nome de *desenvolvimento* da curva Γ_1, que se obtém desenrolando um fio tenso enrolado na evoluta Γ_1 (fig. 36). A cada evoluta corresponde uma infinidade de evolventes, que respondem aos diversos comprimentos iniciais que pode ter o fio.

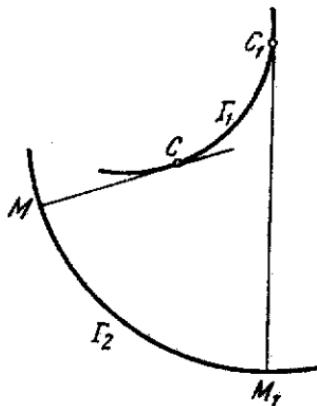



FIG. 36

4°. **Vértices de uma curva.** Chama-se *vértice* de uma curva ao ponto da mesma, no qual a curvatura tem o máximo ou o mínimo. Para determinar os vértices de uma curva se forma a expressão da curvatura K e se encontram seus pontos extremos. Em lugar da curvatura K pode-se tomar o raio da curvatura $R = \frac{1}{|K|}$ e procura-se seu ponto extremo, se neste caso é mais fácil o cálculo.

Exemplo 2. Achar o vértice da catenária

$$y = a \cosh \frac{x}{a} \quad (a > 0).$$

Solução. Como $y' = \operatorname{senh} \frac{x}{a}$ e $y'' = \frac{1}{a} \cosh \frac{x}{a}$, teremos que $K = \frac{1}{\cosh^2 \frac{x}{a}}$ y, portanto, $R = a \cosh^2 \frac{x}{a}$. Teremos que $\frac{dR}{dx} = \operatorname{senh} \frac{2x}{a}$. Igualando a zero a derivada $\frac{dR}{dx}$, obtemos $\operatorname{senh} \frac{2x}{a} = 0$, donde achamos o único ponto crítico $x = 0$. Calculando a segunda derivada $\frac{d^2R}{dx^2}$ e substituindo o valor de $x = 0$, obtemos $\left.\frac{d^2R}{dx^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{2}{a} \cosh \frac{2x}{a}\right|_{x=0} = \frac{2}{a} > 0$. Portanto, $x = 0$ é o ponto mínimo do raio de curvatura ou máximo da curvatura) da catenária. O vértice da catenária $y = a \cosh \frac{x}{a}$ será o ponto $A(0, a)$.

Achar a diferencial do arco, bem como o cosseno e o seno do ângulo que forma, com a direção positiva do eixo OX, a tangente a cada uma das seguintes curvas (os parâmetros são positivos):

993. $x^2 + y^2 = a^2$ (circunferência).

994. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (elipse). **995.** $y^2 = 2px$ (parábola).

996. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (astróide).

997. $y = a \cosh \frac{x}{a}$ (catenária).

998. $x = a(t - \operatorname{sen} t)$; $y = a(1 - \cos t)$ (ciclóide).

999. $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$ (astróide).

Achar a diferencial do arco, bem como o cosseno e o seno do ângulo, que forma o raio polar com a tangente a cada uma das seguintes curvas (os parâmetros são positivos):

1000. $r = a\varphi$ (espiral de Arquimedes).

1001. $r = \frac{a}{\varphi}$ (espiral hiperbólica).

1002. $r = a \sec^2 \frac{\varphi}{2}$ (parábola). **1003.** $r = a \cos^2 \frac{\varphi}{2}$ (cardióide).

1004. $r = a^{\varphi}$ (espiral logarítmica).

1005. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (lemniscata).

Calcular a curvatura das seguintes curvas nos pontos indicados:

1006. $y = x^4 - 4x^3 - 18x^2$ na origem das coordenadas.

1007. $x^2 + xy + y^2 = 3$ na ponto $(1;\ 1)$.

1008. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ nos vértices $A(a,\ 0)$ e $B(0,\ b)$.

1009. $x = t^2$, $y = t^3$ no ponto $(1;\ 1)$.

1010. $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ nos vértices, cujos ângulos polares são $\varphi = 0$ e $\varphi = \pi$.

1011. Em que ponto da parábola $y^2 = 8x$ sua curvatura é igual a 0,128?

1012. Achar o vértice da curva $y = e^x$.

Achar os raios de curvatura (em qualquer ponto) das seguintes linhas:

1013. $y = x^3$ (parábola cúbica).

1014. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (elipse).

1015. $x = \frac{y^2}{4} - \frac{\ln y}{2}$.

1016. $x = a \cos^3 t;\ y = a \operatorname{sen}^3 t$ (astróide).

1017. $x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t);\ y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t)$ # (evolvente da circunferência).

1018. $r = ae^{k\varphi}$ (espiral logarítmica).

1019. $r = a(1 + \cos \varphi)$ (cardióide).

1020. Achar o valor mínimo do raio de curvatura da parábola $y^2 = 2px$.

1021. Demonstrar que o raio de curvatura da catenária $y = a \cosh \frac{x}{a}$ é igual ao comprimento do segmento da normal.

Calcular as coordenadas do centro de curvatura das seguintes curvas nos pontos indicados:

1022. $xy = 1$ no ponto $(1;\ 1)$.

1023. $ay^2 = x^3$ no ponto $(a,\ a)$.

Escrever as equações das circunferências osculatrizes das seguintes curvas, nos pontos indicados:

1024. $y = x^2 - 6x + 10$ no ponto $(3;\ 1)$.

1025. $y = e^x$ no ponto $(0;\ 1)$.

Achar as evolutas das curvas:

1026. $y^2 = 2px$ (parábola).

1027. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (elipse; $0 < b < a$).

1028. Demonstrar que a evoluta da ciclóide

$$x = a(t - \text{sen } t); \; y = a(1 - \cos t)$$

é uma ciclóide deslocada.

1029. Demonstrar que a evoluta da espiral logarítmica

$$r = ae^{k\varphi}$$

é também uma espiral logarítmica com o mesmo polo.

1030. Demonstrar que a curva (*desenvolvimento da circunferência*)

$$x = a(\cos t + t \text{ sen } t); \; y = a(\text{sen } t - t \cos t)$$

é a evolvente da circunferência $x = a \cos t$; $y = a \text{ sen } t$.

Capítulo IV
INTEGRAL INDEFINIDA

§ 1. Integração direta

1°. Regras principais para integração.

1) Se $F'(x) = f(x)$, então

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

onde C é uma constante arbitrária.

2) $\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx$, onde A é uma constante ($A \neq 0$).

3) $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx.$

4) Se $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ e $u = \varphi(x)$ é diferenciável, então

$$\int f(u)\,du = F(u) + C.$$

Em particular,

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \quad (a \neq 0).$$

2° Tabela de integrais imediatas.

I. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1.$

II. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

III. $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C_1 \quad (a \neq 0).$

IV. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C \quad (a \neq 0).$

$\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C \quad (a \neq 0).$

V. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C \quad (a \neq 0).$

VI. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C_1 \quad (a > 0).$

VII. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0)$; $\int e^x\,dx = e^x + C.$

VIII. $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C.$ IX. $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C.$

X. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$ XI. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

XII. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C = \ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x| + C.$

XIII. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C = \ln|\operatorname{tg} x + \sec x| + C.$

XIV. $\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C.$ XV. $\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C.$

XVI. $\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \operatorname{tgh} x + C.$ XVII. $\int \frac{dx}{\operatorname{senh}^2 x} = -\operatorname{ctgh} x + C.$

Exemplo 1. $\int (ax^2 + bx + c)\,dx = \int ax^2\,dx + \int bx\,dx + \int c\,dx =$

$$= a\int x^2\,dx + b\int x\,dx + c\int dx = a\,\frac{x^3}{3} + b\,\frac{x^2}{2} + cx + C.$$

Achar as seguintes integrais, aplicando-se as regras principais 1), 2) e 3) e as fórmulas de integração:

1031. $\int 5a^2x^6\,dx.$

1032. $\int (6x^2 + 8x + 3)\,dx.$

1033. $\int x(x + a)(x + b)\,dx.$

1034. $\int (a + bx^3)^2\,dx.$

1035. $\int \sqrt{2px}\,dx.$

1036. $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}}.$

1037. $\int (nx)^{\frac{1-n}{n}}\,dx.$

1038. $\int (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^3\,dx.$

1039. $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)\,dx.$

1040. $\int \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 2)}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx.$

1041. $\int \frac{(x^m - x^n)^2}{\sqrt{x}}\,dx.$

1042. $\int \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{x})^4}{\sqrt{ax}}\,dx.$

1043. $\int \frac{dx}{x^2 + 7}.$

1044. $\int \frac{dx}{x^2 - 10}.$

1045. $\int \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}}.$

1046. $\int \frac{dx}{\sqrt{8 - x^2}}.$

1047. $\int \frac{\sqrt{2 + x^2} - \sqrt{2 - x^2}}{\sqrt{4 - x^4}}\,dx.$

1048*. a) $\int \text{tg}^2 x\,dx$; b) $\int \text{tgh}^2 x\,dx$.

1049. a) $\int \text{ctg}^2 x\,dx$; b) $\int \text{ctgh}^2 x\,dx$.

1050. $\int 3^x e^x\,dx$.

3°. **Integração mediante a introdução sob o sinal de diferencial.** A regra 4) amplia consideravelmente a tabela das integrais imediatas. Precisamente graças a esta regra a tabela das integrais é válida, independentemente de que a variável de integração seja uma variável independente ou uma função diferenciável.

Exemplo 2. $$\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}} = \frac{1}{5}\int (5x-2)^{-\frac{1}{2}} d(5x-2) =$$
$$= \frac{1}{5}\int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{5}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{5}\,\frac{(5x-2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{5x-2} + C,$$

onde se supôs $u = 5x - 2$. Empregou-se a regra 4) e a integral I da tabela.

Exemplo 3. $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{\sqrt{1+(x^2)^2}} = \frac{1}{2}\ln(x^2 + \sqrt{1+x^4}) + C.$$

De forma implícita se considerou que $u = x^2$ e empregou-se a regra 4) e a integral V da tabela.

Exemplo 4. $$\int x^2 e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int e^{x^3}\,d(x^3) = \frac{1}{3}e^{x^3} + C,$$

de acordo com a regra 4) e a integral VII da tabela.

Nos exemplos 2, 3 e 4, antes de aplicar-se as integrais da tabela, transformamos a integral dada na forma:

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int f(u)\,du, \quad \text{onde} \quad u = \varphi(x).$$

Este tipo de transformação se chama *introdução sob o sinal de diferencial*.

Convém assinalar as transformações das diferenciais que se empregam com frequência, como são, por exemplo, as que se utilizaram nos exemplos 2 e 3:

a) $dx = \frac{1}{a}\,d(ax+b)$ $(a \neq 0)$; b) $x\,dx = \frac{1}{2}\,d(x^2)$, etc.

Achar as seguintes integrais, utilizando as regras principais e as fórmulas de integração:

1051.** $\int \frac{a\,dx}{a-x}$.

1052.** $\int \frac{2x+3}{2x+1}\,dx$.

1053. $\int \frac{1-3x}{3+2x}\,dx$.

1054. $\int \frac{x\,dx}{a+bx}$.

1055. $\int \frac{ax+b}{\alpha x+\beta}\,dx$.

1056. $\int \frac{x^2+1}{x-1}\,dx$.

1057. $\int \frac{x^2+5x+7}{x+3}\,dx.$

1058. $\int \frac{x^4+x^2+1}{x-1}\,dx.$

1059. $\int \left(a+\frac{b}{x-a}\right)^2 dx.$

1060*. $\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx.$

1061. $\int \frac{b\,dy}{\sqrt{1-y}}.$

1062. $\int \sqrt{a-bx}\,dx.$

1063.** $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx.$

1064. $\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}\,dx.$

1065. $\int \frac{dx}{3x^2+5}.$

1066. $\int \frac{dx}{7x^2-8}.$

1067. $\int \frac{dx}{(a+b)-(a-b)x^2}$ $(0<b<a).$

1068. $\int \frac{x^2}{x^2+2}\,dx.$

1069. $\int \frac{x^3}{a^2-x^2}\,dx.$

1070. $\int \frac{x^2-5x+6}{x^2+4}\,dx.$

1071. $\int \frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}}.$

1072. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}}.$

1073. $\int \frac{2x-5}{3x^2-2}\,dx.$

1074. $\int \frac{3-2x}{5x^2+7}\,dx.$

1075. $\int \frac{3x+1}{\sqrt{5x^2+1}}\,dx.$

1076. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}}\,dx.$

1077. $\int \frac{x\,dx}{x^2-5}.$

1078. $\int \frac{x\,dx}{2x^2+3}.$

1079. $\int \frac{ax+b}{a^2x^2+b^2}\,dx \quad (a>0).$

1080. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}} \quad (a>0).$

1081. $\int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx.$

1082. $\int \frac{x^2\,dx}{x^6-1}.$

1083. $\int \sqrt{\frac{\operatorname{arcsen} x}{1-x}}\,dx.$

1084. $\int \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{4+x^2}\,dx.$

1085. $\int \frac{x-\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2}\,dx.$

1086. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)\ln(x+\sqrt{1+x^2})}}.$

1087. $\int a\,e^{-mx}\,dx.$

1088. $\int 4^{2-3x}\,dx.$

1089. $\int (e^t-e^{-t})\,dt.$

1090. $\int \left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 dx.$

1091. $\int \frac{(a^x-b^x)^2}{a^xb^x}\,dx.$

1092. $\int \frac{a^{2x}-1}{\sqrt{a^x}}\,dx.$

1093. $\int e^{-(x^2+1)}\,x\,dx.$

1094. $\int x\cdot 7^{x^2}\,dx.$

1095. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx.$

1096. $\int 5^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}.$

1097. $\int \frac{e^x}{e^x-1}\,dx.$

1098. $\int e^x\sqrt{a-be^x}\,dx.$

1099. $\int (e^{\frac{x}{a}}+1)^{\frac{1}{3}}\,e^{\frac{x}{a}}\,dx.$

1100*. $\int \frac{dx}{2^x+3}.$

1101. $\int \frac{a^x dx}{1+a^{2x}}.$

1102. $\int \frac{e^{-bx}}{1-e^{-2bx}}\,dx.$

1103. $\int \frac{e^t\,dt}{\sqrt{1-e^{2t}}}.$

1104. $\int \operatorname{sen}(a+bx)\,dx.$

1105. $\int \cos\frac{x}{\sqrt{2}}\,dx.$

1106. $\int (\cos ax+\operatorname{sen} ax)^2\,dx.$

1107. $\int \cos\sqrt{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}.$

1108. $\int \operatorname{sen}(\lg x)\,\frac{dx}{x}.$

1109*. $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx.$

1110*. $\int \cos^2 x\,dx.$

1111. $\int \sec^2(ax+b)\,dx.$

1112. $\int \operatorname{ctg}^2 ax\,dx.$

1113. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}\frac{x}{a}}.$

1114. $\int \frac{dx}{3\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)}.$

1115. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(ax+b)}.$

1116. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x^2}.$

1117. $\int x\operatorname{sen}(1-x^2)\,dx.$

1118. $\int \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x\sqrt{2}}-1\right)^2 dx.$

1119. $\int \operatorname{tg} x\,dx.$

1120. $\int \operatorname{ctg} x\,dx.$

1121. $\int \operatorname{ctg}\frac{x}{a-b}\,dx.$

1122. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}\frac{x}{5}}.$

1123. $\int \operatorname{tg}\sqrt{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}.$

1124. $\int x\operatorname{ctg}(x^2+1)\,dx.$

1125. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x\cos x}.$

1126. $\int \cos\frac{x}{a}\operatorname{sen}\frac{x}{a}\,dx.$

1127. $\int \operatorname{sen}^3 6x\cos 6x\,dx.$

1128. $\int \frac{\cos ax}{\operatorname{sen}^5 ax}\,dx.$

1129. $\int \frac{\operatorname{sen} 3x}{3+\cos 3x}\,dx.$

1130. $\int \frac{\operatorname{sen} x\cos x}{\sqrt{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}}\,dx.$

1131. $\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\,\operatorname{sen} 2x\,dx.$

1132. $\int \operatorname{tg}^3\frac{x}{3}\sec^2\frac{x}{3}\,dx.$

1133. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx.$

1134. $\int \frac{\operatorname{ctg}^{\frac{2}{3}} x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx.$

1135. $\int \frac{1+\operatorname{sen} 3x}{\cos^2 3x}\,dx.$

1136. $\int \frac{(\cos ax+\operatorname{sen} ax)^2}{\operatorname{sen} ax}\,dx.$

1137. $\int \frac{\operatorname{cosec}^2 3x}{b-a\operatorname{ctg} 3x}\,dx.$

1138. $\int (2\operatorname{senh} 5x-2\cosh 5x)\,dx.$

1139. $\int \operatorname{senh}^2 x\,dx.$

1140. $\int \frac{dx}{\operatorname{senh} x}.$

1141. $\int \frac{dx}{\cosh x}.$

1142. $\int \frac{dx}{\cosh x\operatorname{senh} x}.$

1143. $\int \operatorname{tgh} x\,dx.$

1144. $\int \operatorname{ctgh} x\,dx.$

Achar as seguintes integrais indefinidas:

1145. $\int x\sqrt[5]{5-x^2}\,dx.$

1146. $\int \frac{x^3-1}{x^4-4x+1}\,dx.$

1147. $\int \frac{x^3}{x^8+5}\,dx.$

1148. $\int xe^{-x^2}\,dx.$

1149. $\int \frac{3-\sqrt{2+3x^2}}{2+3x^2}\,dx.$

1150. $\int \frac{x^3-1}{x+1}\,dx.$

1151. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x}}.$

1152. $\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{x+\cos x}\,dx.$

1153. $\int \frac{\operatorname{tg} 3x-\operatorname{ctg} 3x}{\operatorname{sen} 3x}\,dx.$

1154. $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}.$

1155. $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x-2}}\,dx.$

1156. $\int \left(2+\frac{x}{2x^2+1}\right)\frac{dx}{2x^2+1}.$

1157. $\int a^{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx.$

1158. $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}\,dx.$

1159. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}.$

1160. $\int \operatorname{tg}^2 ax\,dx.$

1161. $\int \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}\,dx.$

1162. $\int \frac{\sec^2 x\,dx}{\sqrt{4-\operatorname{tg}^2 x}}.$

1163. $\int \frac{dx}{\cos\frac{x}{a}}.$

1164. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}\,dx.$

1165. $\int \operatorname{tg}\sqrt{x-1}\,\frac{dx}{\sqrt{x-1}}.$

1166. $\int \frac{x\,dx}{\operatorname{sen}(x^2)}.$

1167. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}+x\ln(1+x^2)+1}{1+x^2}\,dx.$

1168. $\int \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\, dx.$

1169. $\int \frac{\left(1 - \operatorname{sen} \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}{\operatorname{sen} \frac{x}{\sqrt{2}}}\, dx.$

1170. $\int \frac{x^2}{x^2 - 2}\, dx.$

1171. $\int \frac{(1 + x)^2}{x(1 + x^2)}\, dx.$

1172. $\int e^{\operatorname{sen}^2 x} \operatorname{sen} 2x\, dx.$

1173. $\int \frac{5 - 3x}{\sqrt{4 - 3x^2}}\, dx.$

1174. $\int \frac{dx}{e^x + 1}.$

1175. $\int \frac{dx}{(a + b) + (a - b)\, x^2}.$ $(0 < b < a).$

1176. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} - 2}}\, dx.$

1177. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} ax \cos ax}.$

1178. $\int \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0\right) dt.$

1179. $\int \frac{dx}{x(4 - \ln^2 x)}.$

1180. $\int \frac{\arccos \frac{x}{2}}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx.$

1181. $\int e^{-\operatorname{tg} x} \sec^2 x\, dx.$

1182. $\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\sqrt{2 - \operatorname{sen}^4 x}}\, dx.$

1183. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}.$

1184. $\int \frac{\operatorname{arcsen} x + x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx.$

1185. $\int \frac{\sec x \operatorname{tg} x}{\sqrt{\sec^2 x + 1}}\, dx.$

1186. $\int \frac{\cos 2x}{4 + \cos^2 2x}\, dx.$

1187*. $\int \frac{dx}{1 + \cos^2 x}.$

1188. $\int \sqrt{\frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{1 + x^2}}\, dx.$

1189. $\int x^2 \cosh(x^3 + 3)\, dx.$

1190. $\int \frac{3^{\operatorname{tgh} x}}{\cosh^2 x}\, dx.$

§ 2. Método de substituição

1°. Substituição ou troca de variável na integral indefinida. Supondo

$$x = \varphi(t),$$

onde t é uma nova variável e φ uma função contínua diferenciável ($\varphi'(t) \neq 0$), teremos

$$\int f(x)\, dx = \int f[\varphi(t)]\, \varphi'(t)\, dt. \tag{1}$$

Deve-se escolher a função φ de tal maneira, que o segundo membro da fórmula (1) tome uma forma mais adequada para a integração.

8*

Exemplo 1. Achar

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx.$$

Solução. É natural fazer $t = \sqrt{x-1}$, donde $x = t^2 + 1$, e $dx = 2t\,dt$. Portanto,

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx = \int (t^2+1)\,t\cdot 2t\,dt = 2\int (t^4+t^2)\,dt =$$

$$= \frac{2}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + C = \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Às vezes usa-se a substituição do tipo

$$u = \varphi(x).$$

Vamos supor que conseguimos transformar a expressão subintegral $f(x)\,dx$ na seguinte forma:

$$f(x)\,dx = g(u)\,du, \qquad \text{onde} \quad u = \varphi(x).$$

Se $\int g(u)\,du$ é conhecida, isto é,

$$\int g(u)\,du = F(u) + C,$$

então, teremos

$$\int f(x)\,dx = F[\varphi(x)] + C.$$

Este método é idêntico ao utilizado no § 1,3°.

Os exemplos 2, 3 e 4 (§ 1) poderiam ter sido resolvidos da seguinte forma:

Exemplo 2. $u = 5x - 2$; $du = 5\,dx$; $dx = \frac{1}{5}\,du$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}} = \frac{1}{5}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{5}\,\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{5x-2} + C.$$

Exemplo 3. $u = x^2$; $du = 2x\,dx$; $x\,dx = \frac{du}{2}$.

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{1}{2}\ln(u + \sqrt{1+u^2}) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2 + \sqrt{1+x^4}) + C.$$

Exemplo 4. $u = x^3$; $du = 3x^2\,dx$; $x^2\,dx = \frac{du}{3}$.

$$\int x^2 e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int e^u\,du = \frac{1}{3}e^u + C = \frac{1}{3}e^{x^3} + C.$$

2°. **Substituições trigonométricas.**

1) Se a integral contém o radical $\sqrt{a^2 - x^2}$, geralmente se faz $x = a \operatorname{sen} t$; daí

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t.$$

2) Se a integral contém o radical $\sqrt{x^2 - a^2}$, se faz $x = a \sec t$; daí

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a \operatorname{tg} t.$$

3) Se a integral contém o radical $\sqrt{x^2 + a^2}$, se faz $x = a \operatorname{tg} t$; daí

$$\sqrt{x^2 + a^2} = a \sec t.$$

Observaremos que as substituições trigonométricas não são sempre as mais convenientes.

Em certos casos, em lugar das substituições trigonométricas, é preferível empregar as *substituições hiperbolicas*, cujo caráter é análogo (ver o ex. 1209).

No 9 veremos mais detalhadamente as substituições trigonométricas e hiperbólicas.

Exemplo 5. Achar

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx.$$

Solucao. Fazemos $x = \operatorname{tg} t$. Portanto, $dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t}$.

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx = \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 t + 1}}{\operatorname{tg}^2 t}\,\frac{dt}{\cos^2 t} = \int \frac{\sec t \cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t}\,\frac{dt}{\cos^2 t} =$$

$$= \int \frac{dt}{\operatorname{sen}^2 t \cos t} = \int \frac{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t \cdot \cos t}\,dt = \int \frac{dt}{\cos t} + \int \frac{\cos t}{\operatorname{sen}^2 t}\,dt =$$

$$= \ln|\operatorname{tg} t + \sec t| - \frac{1}{\operatorname{sen} t} + C = \ln|\operatorname{tg} t + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}\,| -$$

$$- \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}{\operatorname{tg} t} + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| - \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C.$$

1191. Achar as seguintes integrais, utilizando as substituições indicadas:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$, $\qquad x = \dfrac{1}{t}$;

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x + 1}$, $\qquad x = -\ln t$;

c) $\displaystyle\int x(5x^2 - 3)^7\,dx$, $\qquad 5x^2 - 3 = t$;

d) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}$, $\qquad t = \sqrt{x+1}$;

e) $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}$, $\qquad t = \operatorname{sen} x$.

Achar as seguintes integrais, utilizando as substituições mais adequadas:

1192. $\displaystyle\int x(2x+5)^{10}\,dx.$

1193. $\displaystyle\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx.$ **1194.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}.$

1195. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$. **1196.** $\int \frac{\ln 2x\, dx}{\ln 4x\, x}$.

1197. $\int \frac{(\operatorname{arcsen} x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$. **1198.** $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}}\, dx$.

1199. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}\, dx$. **1200*.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 + x^2}}$.

Achar as seguintes integrais, utilizando substituições trigonométricas:

1201. $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1 - x^2}}$. **1202.** $\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{2 - x^2}}$.

1203. $\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}\, dx$. **1204*.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$.

1205. $\int \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}\, dx$. **1206*.** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 - x^2}}$.

1207. $\int \sqrt{1 - x^2}\, dx$.

1208. Calcular a integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}},$$

fazendo a substituição $x = \operatorname{sen}^2 t$.

1209. Achar

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx,$$

utilizando a substituição hiperbólica $x = a \operatorname{senh} t$.

Solução. Temos: $\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{senh}^2 t} = a \cosh t$ e $dx = a \cosh t\, dt$. Daí

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx = \int a \cosh t \cdot a \cosh t\, dt = a^2 \int \cosh^2 t\, dt =$$

$$= a^2 \int \frac{\cosh 2t + 1}{2}\, dt = \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{2} \operatorname{senh} 2t + t\right) + C =$$

$$= \frac{a^2}{2} (\operatorname{senh} t \cosh t + t) + C.$$

Já que

$$\operatorname{senh} t = \frac{x}{a}, \quad \cosh t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a}$$

$$e^t = \cosh t + \operatorname{senh} t = \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a},$$

teremos, finalmente:

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C_1,$$

onde $C_1 = C - \frac{a^2}{2}\ln a$ é uma nova constante arbitrária.

1210. Achar

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}},$$

fazendo $x = a\cosh t$.

§ 3. Integração por partes

Fórmula para integração por partes. Se $u = \varphi(x)$ e $v = \psi(x)$ são funções diferenciáveis continuamente, teremos que

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Exemplo 1. Achar

$$\int x\ln x\,dx.$$

Supondo $u = \ln x$; $dv = x\,dx$, teremos $dv = \frac{dx}{x}$; $v = \frac{x^2}{2}$. Daí

$$\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\,\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Às vezes, para reduzir a integral dada a uma imediata, é preciso empregar várias vezes a fórmula de integração por partes. Em alguns casos, valendo-se da integração por partes se obtém uma equação da qual se determina a integral procurada.

Exemplo 2. Achar

$$\int e^x\cos x\,dx.$$

Temos $\int e^x\cos x\,dx = \int e^x\,d(\operatorname{sen} x) = e^x\operatorname{sen} x - \int e^x\operatorname{sen} x\,dx = e^x\operatorname{sen} x +$

$+\int e^x\,d(\cos x) = e^x\operatorname{sen} x + e^x\cos x - \int e^x\cos x\,dx.$

Portanto,

$$\int e^x\cos x\,dx = e^x\operatorname{sen} x + e^x\cos x - \int e^x\cos x\,dx,$$

daí

$$\int e^x\cos x\,dx = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x) + C.$$

Achar as seguintes integrais, utilizando a fórmula de integração por partes:

1211. $\int \ln x \, dx.$ **1212.** $\int \operatorname{arctg} x \, dx.$

1213. $\int \operatorname{arcsen} x \, dx.$ **1214.** $\int x \operatorname{sen} x \, dx$

1215. $\int x \cos 3x \, dx$ **1216.** $\int \frac{x}{e^x} dx.$

1217. $\int x \cdot 2^{-x} dx.$ **1218**.** $\int x^2 e^{3x} dx.$

1219*. $\int (x^2 - 2x + 5) e^{-x} dx.$ **1220*.** $\int x^3 e^{-\frac{x}{3}} dx.$

1221. $\int x \operatorname{sen} x \cos x \, dx.$ **1222*.** $\int (x^2 + 5x + 6) \cos 2x \, dx.$

1223. $\int x^2 \ln x \, dx.$ **1224.** $\int \ln^2 x \, dx.$

1225. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx.$ **1226.** $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx.$

1227. $\int x \operatorname{arctg} x \, dx.$ **1228.** $\int x \operatorname{arcsen} x \, dx.$

1229. $\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \, dx.$ **1230.** $\int \frac{x \, dx}{\operatorname{sen}^2 x}.$

1231. $\int \frac{x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} dx.$ **1232.** $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx.$

1233. $\int 3^x \cos x \, dx.$ **1234.** $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx \, dx.$

1235. $\int \operatorname{sen}(\ln x) \, dx.$

Achar as seguintes integrais, utilizando-se diferentes métodos:

1236. $\int x^3 e^{-x^2} dx.$ **1237.** $\int e^{\sqrt{x}} dx.$

1238. $\int (x^2 - 2x + 3) \ln x \, dx$ **1239.** $\int x \ln \frac{1-x}{1+x} dx.$

1240. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx.$ **1241.** $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx.$

1242. $\int x^2 \operatorname{arctg} 3x \, dx.$ **1243.** $\int x (\operatorname{arctg} x)^2 dx.$

1244. $\int (\operatorname{arcsen} x)^2 dx.$ **1245.** $\int \frac{\operatorname{arcsen} x}{x^2} dx.$

1246. $\int \frac{\operatorname{arcsen} \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx.$ **1247.** $\int x \operatorname{tg}^2 2x \, dx.$

1248. $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{e^x}\,dx.$ **1249.** $\int \cos^2(\ln x)\,dx.$

1250.** $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx.$ **1251*.** $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}.$

1252.** $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$ **1253*.** $\int \sqrt{A+x^2}\,dx.$

1254*. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}}.$

§ 4. Integrais elementares que contêm o trinômio ao quadrado

1°. **Integrais do tipo** $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx$. O procedimento principal de cálculo consiste em reduzir o trinômio de segundo grau à forma

$$ax^2+bx+c=a(x+k)^2+l, \qquad (1)$$

onde k e l são constantes. Para efetuar a transformação (1) o mais cômodo é separar o quadrado exato do trinômio de segundo grau. Pode-se também empregar a substituição

$$2ax+b=t.$$

Se $m=0$, reduzindo o trinômio de segundo grau à forma (1), obtemos as integrais imediatas III ou IV (ver o § 1, 2°, tabela das integrais elementares).

Exemplo 1.

$$\int \frac{dx}{2x^2-5x+7}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x^2-2\cdot\frac{5}{4}x+\frac{25}{16}\right)+\left(\frac{7}{2}-\frac{25}{16}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{d\left(x-\frac{5}{4}\right)}{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{31}{16}}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\frac{\sqrt{31}}{4}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{5}{4}}{\frac{\sqrt{31}}{4}}+C=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{4x-5}{\sqrt{31}}+C.$$

Se $m \neq 0$, do numerador separa-se a derivada $2ax+b$ do trinômio de segundo grau

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx=\int \frac{\frac{m}{2a}(2ax+b)+\left(n-\frac{mb}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}\,dx=$$

$$=\frac{m}{2a}\ln|ax^2+bx+c|+\left(n-\frac{mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c},$$

e, desta forma, chegamos à integral acima analizada.

Exemplo 2.

$$\int \frac{x-1}{x^2-x-1}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{1}{2}}{x^2-x-1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-x-1| -$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}} = \frac{1}{2}\ln|x^2-x-1| - \frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right| + C.$$

2°. **Integrais do tipo** $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx.$

Os métodos de cálculo são análogos aos acima examinados. Definitivamente a integral se reduz à V integral imediata, se $a > 0$, e à VI, se $a < 0$.

Exemplo 3.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{16}-\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{arcsen}\,\frac{4x-3}{5} + C.$$

Exemplo 4.

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}} =$$

$$= \sqrt{x^2+2x+2} + 2\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}) + C.$$

3°. **Integrais do tipo** $\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Utilizando a substituição da fração linear

$$\frac{1}{mx+n} = t$$

estas integrais se reduzem ao tipo 2°.

Exemplo 5. Achar

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}\,.$$

Solução. Supomos

$$x+1 = \frac{1}{t},$$

donde

$$dx = -\frac{dt}{t^2}\,.$$

Teremos

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-2t+2t^2}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+\frac{1}{2}}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2(x^2+1)}}{x+1}\right| + C.$$

4°. **Integrais do tipo** $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$. Separando quadrado exato no trinômio de segundo grau, esta integral se reduz a uma das duas integrais principais ver n°s. **1252** e **1253**):

1) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + C,\quad (a > 0),$

2) $\int \sqrt{x^2+A}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+A} + \frac{A}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right| + C.$

Exemplo 6.

$$\int \sqrt{1-2x-x^2}\,dx = \int \sqrt{2-(1+x)^2}\,d(1+x) =$$

$$= \frac{1+x}{2}\sqrt{1-2x-x^2} + \operatorname{arcsen}\frac{1+x}{\sqrt{2}} + C.$$

Achar as integrais:

1255. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

1256. $\int \frac{dx}{x^2+2x}$.

1257. $\int \frac{dx}{3x^2-x+1}$.

1258. $\int \frac{x\,dx}{x^2-7x+13}$.

1259. $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}\,dx$.

1260. $\int \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}\,dx$.

1261. $\int \frac{x^2\,dx}{x^2-6x+10}$.

1262. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$.

1263. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$.

1264. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$.

1265. $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx$.

1266. $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx$.

1267. $\int \frac{x}{\sqrt{5x^2-2x+1}}\,dx$.

1268. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$.

1269. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$.

1270. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$.

1271. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$.

1272. $\int \sqrt{x^2+2x+5}\,dx$.

1273. $\int \sqrt{x-x^2}\,dx$.

1274. $\int \sqrt{2-x-x^2}\,dx$.

1275. $\int \frac{x\,dx}{x^4-4x^2+3}$.

1276. $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x-6\operatorname{sen} x+12}\,dx$.

1277. $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}$.

1278. $\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\sqrt{\cos^2 x+4\cos x+1}}$.

1279. $\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}}$.

§ 5. Integração de funções racionais

1°. **Método dos coeficientes indeterminados.** A integração de uma função racional, depois de separar a parte inteira, se reduz à integração de uma *fração racional própria*

$$\frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{1}$$

onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios inteiros e o grau do numerador $P(x)$ é menor que o do denominador $Q(x)$. Se

$$Q(x) = (x-a)^{\alpha} \ldots (x-l)^{\lambda},$$

onde $a, \ldots, l$ são diferentes raízes reais do polinômio $Q(x)$ e $\alpha, \ldots, \lambda$ são números naturais (graus de multiplicidade das raízes), a fração (1) poderá decompor-se em frações simples:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{L_1}{x-l} + \frac{L_2}{(x-l)^2} + \ldots + \frac{L_\lambda}{(x-l)^\lambda}. \tag{2}$$

Para calcular os coeficientes indeterminados $A_1, A_2, \ldots, L_\lambda$ ambas as partes da identidade (2) se reduzem à forma inteira e, a seguir, se igualam os coeficientes de cada uma das potências iguais da variável x (*primeiro método*). Pode-se também calcular estes coeficientes igualando x, na igualdade (2) ou em seu equivalente, a certos números devidamente escolhidos (*segundo método*).

Exemplo 1. Achar

$$\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x+1)^2} = I.$$

Solução. Teremos:

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2}.$$

Dai

$$x \equiv A(x+1)^2 + B_1(x-1)(x+1) + B_2(x-1). \tag{3}$$

a). *Primeiro método para a determinação dos coeficientes.* Copiamos a identidade (3) dando-lhe a forma:

$$x \equiv (A+B_1)x^2 + (2A+B_2)x + (A-B_1-B_2).$$

Igualando os coeficientes de cada uma das potências iguais a x, teremos:

$$0 = A + B_1; \quad 1 = 2A + B_2; \quad 0 = A - B_1 - B_2.$$

Daí

$$A = \frac{1}{4}; \quad B_1 = -\frac{1}{4}; \quad B_2 = \frac{1}{2}.$$

b) *Segundo método para a determinação dos coeficientes.* Fazendo $x = 1$ na identidade (3), teremos:

$$1 = A \cdot 4, \text{ isto é, } A = \frac{1}{4}.$$

Fazendo $x = -1$, teremos:

$$-1 = -B_2 \cdot 2, \text{ isto é, } B_2 = \frac{1}{2}.$$

Fazendo, a seguir, $x = 0$, teremos:

$$0 = A - B_1 - B_2,$$

sito é, $B_1 = A - B_2 = -\frac{1}{4}$.

Portanto,

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2(x+1)} + C =$$

$$= -\frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$$

Exemplo 2. Achar

$$\int \frac{dx}{x^3 - 2x^2 + x} = I.$$

Solução. Teremos:

$$\frac{1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

e

$$1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx. \tag{4}$$

Ao resolver-se este exemplo recomendamos combinar os dois métodos para a determinação dos coeficientes. Utilizando o segundo método, fazemos $x = 0$ na identidade (4), e obtemos $1 = A$. Depois, fazendo $x = 1$, teremos que $1 = C$. A seguir, empregando o primeiro método, igualamos na identidade (4) os coeficientes de x^2. Teremos:

$$0 = A + B, \text{ isto é, } B = -1.$$

Desta forma

$$A = 1, \; B = -1 \text{ e } C = 1.$$

Portanto

$$I = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} + \frac{dx}{(x-1)^2} = \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

Se o polinômio $Q(x)$ tem raízes complexas $a \pm ib$ de multiplicidade k onde i é uma grandeza imaginária, na decomposição (2) entram complementarmente frações simples da forma

$$\frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \ldots + \frac{M_kx + N_k}{(x^2 + px + q)^k}, \tag{5}$$

onde

$$x^2 + px + q = [x - (a + ib)]\,[x - (a - ib)].$$

e $M_1, N_1, \ldots, M_k, N_k$ são coeficientes indeterminados que se calculam pelos métodos supra indicados. Quando $k = 1$, a fração (5) se integra diretamente; quando $k > 1$ se usa *o método de redução*, recomendando-se que se dê, previamente, ao trinômio de segundo grau $x^2 + px + q$ a forma $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$ e se faça a substituição $x + \frac{p}{2} = z$.

Exemplo 3. Achar

$$\int \frac{x + 1}{(x^2 + 4x + 5)^2}\,dx = I.$$

Solução. Como

$$x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1,$$

então, fazendo $x + 2 = z$, teremos:

$$I = \int \frac{z - 1}{(z^2 + 1)^2}\,dz = \int \frac{z\,dz}{(z^2 + 1)^2} - \int \frac{(1 + z^2) - z^2}{(z^2 + 1)^2}\,dz =$$

$$= -\frac{1}{2(z^2 + 1)} - \int \frac{dz}{z^2 + 1} + \int z\,d\left[-\frac{1}{2(z^2 + 1)}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2(z^2 + 1)} - \operatorname{arctg} z - \frac{z}{2(z^2 + 1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} z + C =$$

$$= -\frac{z + 1}{2(z^2 + 1)} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} z + C = -\frac{x + 3}{2(x^2 + 4x + 5)} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x + 2) + C.$$

2°. **Método de Ostrogradski.** Se $Q(x)$ tem raízes múltiplas, então

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{X(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{Y(x)}{Q_2(x)}\,dx, \tag{6}$$

onde $Q_1(x)$ é o máximo divisor comum do polinômio $Q(x)$ e de sua derivada $Q'(x)$,

$$Q_2(x) = Q(x) : Q_1(x),$$

$X(x)$ e $Y(x)$ são polinômios com coeficientes indeterminados, cujos graus são menores em uma unidade que os de $Q_1(x)$ e $Q_2(x)$, respectivamente.

Os coeficientes indeterminados dos polinômios $X(x)$ e $Y(x)$ são calculados derivando-se a identidade (6).

Exemplo 4. Achar

$$\int \frac{dx}{(x^3 - 1)^2}.$$

Solução.

$$\int \frac{dx}{(x^3 - 1)^2} = \frac{Ax^2 + Bx + C}{x^3 - 1} + \int \frac{Dx^2 + Ex + F}{x^3 - 1}\,dx.$$

Derivando esta identidade, teremos:

$$\frac{1}{(x^3-1)^2}=\frac{(2Ax+B)(x^3-1)-3x^2(Ax^2+Bx+C)}{(x^3-1)^2}+\frac{Dx^2+Ex+F}{x^3-1}$$

ou

$$1=(2Ax+B)(x^3-1)-3x^2(Ax^2+BX+C)+(Dx^2+Ex+F)(x^3-1).$$

Igualando os coeficientes das respectivas potências de x, teremos:

$D=0;\ E-A=0;\ F-2B=0;\ D+3C=0;\ E+2A=0;\ B+F=-1;$

daí

$$A=0;\ B=-\frac{1}{3};\ C=0;\ D=0;\ E=0;\ F=-\frac{2}{3}$$

e, portanto

$$\int\frac{dx}{(x^3-1)^2}=-\frac{1}{3}\frac{x}{x^3-1}-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^3-1}. \tag{7}$$

Para calcular a integral do segundo membro da igualdade (7), decompomos a fração $\frac{1}{x^3-1}$ em frações elementares:

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{L}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1},$$

isto é,

$$1=L(x^2+x+1)+Mx(x-1)+N(x-1). \tag{8}$$

Fazendo $x=1$, teremos que $L=\frac{1}{3}$.

Igualando os coeficientes das potências iguais de x em ambos os membros da igualdade (8), achamos

$$L+M=0;\quad L-N=1,$$

isto é,

$$M=-\frac{1}{3};\quad N=-\frac{2}{3}.$$

Por isso

$$\int\frac{dx}{x^3-1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{3}\int\frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

e

$$\int\frac{dx}{(x^3-1)^2}=-\frac{x}{3(x^3-1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Achar as integrais:

1280. $\int\frac{dx}{(x+a)(b+x)}$.

1281. $\int\frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,dx.$

1282. $\int\frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$.

1283. $\int\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx.$

1284. $\int\frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}\,dx.$

1285. $\int\frac{dx}{x(x+1)^2}$.

1286. $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\,dx.$

1287. $\int \frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}\,dx.$

1288. $\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2\,(x+1)^2}\,dx.$

1289. $\int \frac{x^2-8x+7}{(x^2-3x-10)^2}\,dx.$

1290. $\int \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^3}\,dx.$

1291. $\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}\,dx.$

1292. $\int \frac{x^4}{x^4-1}\,dx.$

1293. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+3)\,(x^2+4x+5)}.$

1294. $\int \frac{dx}{x^3+1}.$

1295. $\int \frac{dx}{x^4+1}.$

1296. $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}.$

1297. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$

1298. $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}\,dx.$

1299. $\int \frac{dx}{(x+1)\,(x^2+x+1)^2}.$

1300. $\int \frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2}\,dx.$

Achar as seguintes integrais, utilizando o método de Ostrogradski:

1301. $\int \frac{dx}{(x+1)^2\,(x^2+1)^2}.$

1302. $\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}.$

1303. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^4}.$

1304. $\int \frac{x^4-2x^2+2}{(x^2-2x+2)^2}\,dx.$

Achar as seguintes integrais, utilizando diferentes métodos:

1305. $\int \frac{x^5}{(x^3+1)\,(x^3+8)}\,dx.$

1306. $\int \frac{x^7+x^3}{x^{12}-2x^4+1}\,dx.$

1307. $\int \frac{x^2-x+14}{(x-4)^3\,(x-2)}\,dx.$

1308. $\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)^2}.$

1309. $\int \frac{dx}{x^3-4x^2+5x-2}.$

1310*. $\int \frac{dx}{x(x^7+1)}.$

1311. $\int \frac{dx}{x(x^5+1)^2}.$

1312. $\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)\,(x^2+2x+5)}.$

1313. $\int \frac{x^2\,dx}{(x-1)^{10}}.$

1314. $\int \frac{dx}{x^8+x^6}.$

§ 6. Integração de algumas funções irracionais

1°. Integrais do tipo

$$\int R\left[x,\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}},\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}},\ \ldots\right]dx, \tag{1}$$

onde R é uma função racional e $p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots$ são números inteiros.

As integrais do tipo (1) são achadas através da substituição

$$\frac{ax+b}{cx+d} = z^n,$$

onde n é o mínimo múltiplo comum dos números $q_1, q_2, \ldots$

Exemplo 1. Achar $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}}$.

Solução. A substituição $2x - 1 = z^4$ reduz a integral à forma

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}} = \int \frac{2z^3\,dz}{z^2 - z} = 2\int \frac{z^2\,dz}{z-1} =$$

$$= 2\int \left(z + 1 + \frac{1}{z-1}\right) dz = (z+1)^2 + 2\ln|z-1| + C =$$

$$= (1 + \sqrt[4]{2x-1})^2 + \ln(\sqrt[4]{2x-1} - 1)^2 + C.$$

Achar as integrais:

1315. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx.$

1316. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{ax+b}}.$

1317. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}.$

1318. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$

1319. $\int \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} + 1}\,dx.$

1320. $\int \frac{\sqrt{x+1} + 2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}}\,dx.$

1321. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}\,dx.$

1322. $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$

1323. $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx.$

1324. $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx.$

1325. $\int \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}\,dx.$

2°. **Integrais do tipo**

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,dx, \qquad (2)$$

onde $P_n(x)$ é um polinômio de grau n.

Supõe-se que

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (3)$$

onde $Q_{n-1}(x)$ é um polinômio de grau $(n-1)$ com coeficiente indeterminado e λ é um número.

Os coeficientes do polinômio $Q_{n-1}(x)$ e o número λ são encontrados através da derivação da identidade (3).

Exemplo 2. $\int x^2\sqrt{x^2+4}\,dx = \int \frac{x^4 + 4x^2}{\sqrt{x^2+4}}\,dx =$

$$= (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sqrt{x^2+4} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}.$$

Daí

$$\frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}} = (3Ax^2+2Bx+C)\sqrt{x^2+4} + \frac{(Ax^3+Bx^2+Cx+D)\,x}{\sqrt{x^2+4}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+4}}.$$

Multiplicando por $\sqrt{x^2+4}$ e igualando os coeficientes das potências iguais de x, teremos:

$$A = \frac{1}{4}; \quad B = 0; \quad C = \frac{1}{2}; \quad D = 0; \quad \lambda = -2.$$

Portanto,

$$\int x^2\sqrt{x^2+4}\,dx = \frac{x^3+2x}{4}\sqrt{x^2+4} - 2\ln(x+\sqrt{x^2+4}) + C$$

3°. **Integrais do tipo**

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}} \tag{4}$$

reduzem-se ao tipo de integrais (2), valendo-se da substituição

$$\frac{1}{x-\alpha} = t.$$

Achar as integrais:

1326. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$. **1327.** $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

1328. $\int \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$. **1329.** $\int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$.

1330. $\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}$. **1331.** $\int \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}\,dx$.

4°. **Integrais dos binômios diferenciais**

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx, \tag{5}$$

onde, m, n e p são **números racionais**.

Condições de Tchebichev. A integral (5) pode ser expressa por meio de uma combinação finita de funções elementares somente nos seguintes três casos:

1) quando p é um número inteiro;

2) quando $\frac{m+1}{n}$ é um número inteiro. Aqui se emprega a substituição $a+bx^n = z^s$, onde s é o denominador da fração p;

3) quando $\frac{m+1}{n}+p$ é um número inteiro. Neste caso emprega-se a substituição $ax^{-n}+b = z^s$.

Exemplo 3. Achar

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = I.$$

Solução. Temos $m = -\frac{1}{2}$; $n = \frac{1}{4}$; $p = \frac{1}{3}$; $\frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2.$

Portanto, tem lugar o 2° caso de integrabilidade.

A substituição

$$1 + x^{\frac{1}{4}} = z^3$$

nos dá: $x = (z^3 - 1)^4$; $dx = 12z^2(z^3 - 1)^3\,dz$. De forma que

$$I = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(1 + x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} dx = 12\int \frac{z^3(z^3-1)^3}{(z^3-1)^2}\,dz =$$

$$= 12\int (z^6 - z^3)\,dz = \frac{12}{7}z^7 - 3z^4 + C,$$

onde $z = \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}$.

Achar as integrais:

1332. $\int x^3(1 + 2x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx.$

1333. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1 + x^4}}.$

1334. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1 + x^2}}.$

1335. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1 + x^5}}.$

1336. $\int \frac{dx}{x^2(2 + x^3)^{\frac{5}{3}}}.$

1337. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x^3}}}.$

§ 7. Integração de funções trigonométricas

1°. Integrais do tipo

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx = I_{m,n}, \tag{1}$$

onde m e n são números inteiros.

1) Se $m = 2k + 1$ é um número ímpar e positivo, então

$$I_{m,n} = -\int \operatorname{sen}^{2k} x \cos^n x\,d(\cos x) = -\int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x\,d(\cos x).$$

Agimos da mesma forma, quando n é um número ímpar positivo.

Exemplo 1. $\int \operatorname{sen}^{10} x \cos^3 x\,dx = \int \operatorname{sen}^{10} x(1 - \operatorname{sen}^2 x)\,d(\operatorname{sen} x) =$

$$= \frac{\operatorname{sen}^{11} x}{11} - \frac{\operatorname{sen}^{13} x}{13} + C.$$

2) Se m e n são números pares e positivos, a expressão subintegral (!) se transforma através das fórmulas:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x),$$

$$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x.$$

Exemplo 2. $$\int \cos^2 3x \operatorname{sen}^4 3x\, dx = \int (\cos 3x \operatorname{sen} 3x)^2 \operatorname{sen}^2 3x\, dx =$$

$$= \int \frac{\operatorname{sen}^2 6x}{4}\,\frac{1-\cos 6x}{2}\,dx = \frac{1}{8}\int (\operatorname{sen}^2 6x - \operatorname{sen}^2 6x \cos 6x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int\left(\frac{1-\cos 12x}{2} - \operatorname{sen}^2 6x \cos 6x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 12x}{24} - \frac{1}{18}\operatorname{sen}^3 6x\right) + C.$$

3) Quando $m = -\mu$ e $n = -\nu$ são números inteiros, negativos e pares da mesma ordem, sendo $\mu + \nu \geqslant 2$, teremos:

$$I_{m,n} = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^{\mu} x \cos^{\nu} x} = \int \operatorname{cosec}^{\mu} x \sec^{\nu-2} x\, d(\operatorname{tg} x) =$$

$$= \int \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\right)^{\frac{\mu}{2}} (1+\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{\nu-2}{2}}\, d(\operatorname{tg} x) = \int \frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{\mu+\nu}{2}-1}}{\operatorname{tg}^{\mu} x}\, d(\operatorname{tg} x).$$

A este caso se reduzem, em particular, as integrais:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^{\mu} x} = \frac{1}{2^{\mu-1}} \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{sen}^{\mu}\frac{x}{2}\cos^{\mu}\frac{x}{2}} \quad \text{e} \quad \int \frac{dx}{\cos^{\nu} x} = \int \frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}^{\nu}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Exemplo 3. $$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \sec^2 x\, d(\operatorname{tg} x) = \int (1+\operatorname{tg}^2 x)\, d(\operatorname{tg} x) =$$

$$= \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C$$

Exemplo 4. $$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x} = \frac{1}{2^3}\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}} = \frac{1}{8}\int \operatorname{tg}^{-3}\frac{x}{2}\sec^6\frac{x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)^2}{\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}}\sec^2\frac{x}{2}\,dx = \frac{2}{8}\int\left[\operatorname{tg}^{-3}\frac{x}{2} + \frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right] d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + 2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2}\right] + C.$$

4) As integrais da forma $\int \operatorname{tg}^m x\,dx$ $\left(\text{ou } \int \operatorname{ctg}^m x\,dx\right)$, onde m é um número inteiro e positivo, se calculam pela fórmula

$$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$$

(ou correspondentemente $\operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1$).

Exemplo 5. $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx = \int \operatorname{tg}^2 x(\sec^2 x - 1)\,dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \int \operatorname{tg}^2 x\,dx =$

$$= \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \int (\sec^2 x - 1)\,dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C.$$

5) No caso geral as integrais $I_{m,n}$ de forma (1) se calculam através de *fórmulas de redução* (*fórmulas de recorrência*), que se deduzem comumente pela integração por partes.

Exemplo 6. $\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^3 x}\,dx = \int \operatorname{sen} x \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}\,dx + \int \frac{dx}{\cos x} =$

$$= \operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx + \int \frac{dx}{\cos x} = \frac{\operatorname{sen} x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x + \sec x| + C.$$

Achar as integrais:

1338. $\int \cos^3 x\,dx.$

1339. $\int \operatorname{sen}^5 x\,dx.$

1340. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\,dx.$

1341. $\int \operatorname{sen}^3 \frac{x}{2} \cos^5 \frac{x}{2}\,dx.$

1342. $\int \frac{\cos^5 x}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx.$

1343. $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx.$

1344. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\,dx.$

1345. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\,dx.$

1346. $\int \cos^6 3x\,dx.$

1347. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^4 x}.$

1348. $\int \frac{dx}{\cos^6 x}.$

1349. $\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^6 x}\,dx.$

1350. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^4 x}.$

1351. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^5 x \cos^3 x}.$

1352. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}}.$

1353. $\int \frac{\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{sen} x \cos x}\,dx.$

1354. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^5 x}.$

1355. $\int \sec^5 4x\,dx.$

1356. $\int \operatorname{tg}^2 5x\,dx.$

1357. $\int \operatorname{ctg}^3 x\,dx.$

1358. $\int \operatorname{ctg}^4 x\,dx.$

1359. $\int \left(\operatorname{tg}^3 \frac{x}{3} + \operatorname{tg}^4 \frac{x}{3}\right) dx.$

1360. $\int x \operatorname{sen}^2 x^2\, dx.$

1361. $\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^4 x}\, dx.$

1362. $\int \operatorname{sen}^5 x \sqrt[3]{\cos x}\, dx.$

1363. $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x \cos^3 x}}.$

1364. $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}.$

2°. **Integrais do tipo** $\int \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx$, $\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx$ e $\int \cos mx \cos nx\, dx$.

Nestes casos se usam as fórmulas:

1) $\operatorname{sen} mx \cos nx = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x]$;

2) $\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$;

3) $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$.

Exemplo 7. $\int \operatorname{sen} 9x \operatorname{sen} x\, dx = \int \frac{1}{2}[\cos 8x - \cos 10x]\, dx =$

$$= \frac{1}{16}\operatorname{sen} 8x - \frac{1}{20}\operatorname{sen} 10x + C.$$

Achar as integrais:

1365. $\int \operatorname{sen} 3x \cos 5x\, dx.$

1366. $\int \operatorname{sen} 10x \operatorname{sen} 15x\, dx.$

1367. $\int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3}\, dx.$

1368. $\int \operatorname{sen} \frac{x}{3} \cos \frac{2x}{3}\, dx.$

1369. $\int \cos(ax+b)\cos(ax-b)\, dx.$

1370. $\int \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)\, dt.$

1371. $\int \cos x \cos^2 3x\, dx.$

1372. $\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x\, dx.$

3° **Integrais do tipo**

$$\int R = (\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx, \qquad (2)$$

onde R e uma função racional.

1) Valendo-se da substituição

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t,$$

donde

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

as integrais da forma (2) se reduzem a integrais de funções racionais da nova variável t.

Exemplo 8. Achar

$$\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x + \cos x} = I.$$

Solução. Fazendo $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, teremos:

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln |1 + t| + C = \ln \left| 1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

2) Se verifica-se a identidade

$$R(-\operatorname{sen} x, \ -\cos x) \equiv R(\operatorname{sen} x, \ \cos x),$$

então, para reduzir a integral (2) à forma racional, se pode usar a substituição $\operatorname{tg} x = t$.

Neste caso

$$\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

e

$$x = \operatorname{arctg} t, \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Exemplo 9. Achar

$$\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen}^2 x} = I.$$

Solução. Fazendo

$$\operatorname{tg} x = t; \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}; \quad dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

teremos:

$$I = \int \frac{dt}{(1+t^2)\left(1 + \frac{t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{1+2t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(t\sqrt{2})}{1+(t\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(t\sqrt{2}) + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C.$$

Convém assinalar que a integral (3) é calculada mais rapidamente se dividirmos previamente o numerador e o denominador da fração por $\cos^2 x$.

Em casos concretos é conveniente o emprego de métodos artificiais (ver o ex. nº. 1379).

Achar as integrais:

1373. $\int \frac{dx}{3 + 5\cos x}$.

1374. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x}$.

1375. $\int \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx$.

1376. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} dx$.

1377. $\int \frac{dx}{8 - 4\operatorname{sen} x + 7\cos x}$.

1378. $\int \frac{dx}{\cos x + 2\operatorname{sen} x + 3}$.

1379.** $\int \frac{3 \operatorname{sen} x + 2 \cos x}{2 \operatorname{sen} x + 3 \cos x}\, dx.$ **1380.** $\int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}\, dx.$

1381*. $\int \frac{dx}{1 + 3 \cos^2 x}.$ **1382*.** $\int \frac{dx}{3 \operatorname{sen}^2 x + 5 \cos^2 x}.$

1383*. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x \cos x - \cos^2 x}.$

1384*. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x - 5 \operatorname{sen} x \cos x}.$ **1385.** $\int \frac{\operatorname{sen} x}{(1 - \cos x)^3}\, dx.$

1386. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}\, dx.$ **1387.** $\int \frac{\cos 2x}{\cos^4 x + \operatorname{sen}^4 x}\, dx.$

1388. $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x - 6 \operatorname{sen} x + 5}\, dx.$ **1389*.** $\int \frac{dx}{(2 - \operatorname{sen} x)(3 - \operatorname{sen} x)}.$

1390*. $\int \frac{1 - \operatorname{sen} x + \cos x}{1 + \operatorname{sen} x - \cos x}\, dx.$

§ 8. Integração de funções hiperbólicas

A integração de funções hiperbólicas é completamente análoga à integração de funções trigonométricas.

Deve-se ter em conta as fórmulas principais:

1) $\cosh^2 x - \operatorname{sen} h^2 x = 1;$

2) $\operatorname{senh}^2 x = \frac{1}{2} (\cosh 2x - 1);$

3) $\cosh^2 x = \frac{1}{2} (\cosh 2x + 1);$

4) $\operatorname{senh} x \cosh x = \frac{1}{2} \operatorname{senh} 2x.$

Exemplo 1. Achar

$$\int \cosh^2 x\, dx.$$

Solução. Teremos:

$$\int \cosh^2 x\, dx = \int \frac{1}{2} (\cosh 2x + 1)\, dx = \frac{1}{4} \operatorname{senh} 2x + \frac{1}{2} x + C.$$

Exemplo 2. Achar

$$\int \cosh^3 x\, dx.$$

Solução. Teremos:

$$\int \cosh^3 x\, dx = \int \cosh^2 x\, d(\operatorname{senh} x) = \int (1 + \operatorname{senh}^2 x)\, d(\operatorname{senh} x) =$$

$$= \operatorname{senh} x + \frac{\operatorname{senh}^3 x}{3} + C.$$

Achar as integrais:

1391. $\int \operatorname{senh}^3 x\, dx.$

1392. $\int \cosh^4 x\, dx.$

1393. $\int \operatorname{senh}^3 x \cosh x\, dx.$

1394. $\int \operatorname{senh}^2 x \cosh^2 x\, dx.$

1395. $\int \frac{dx}{\operatorname{senh} x \cosh^2 x}.$

1396. $\int \frac{dx}{\operatorname{senh}^2 x \cosh^2 x}.$

1397. $\int \operatorname{tgh}^3 x\, dx.$

1398. $\int \operatorname{ctgh}^4 x\, dx.$

1399. $\int \frac{dx}{\operatorname{senh}^2 x + \cosh^2 x}.$

1400. $\int \frac{dx}{2 \operatorname{senh} x + 3 \cosh x}.$

1401*. $\int \frac{dx}{\operatorname{tgh} x - 1}.$

1402. $\int \frac{\operatorname{senh} x\, dx}{\sqrt{\cosh 2x}}.$

§ 9. Emprego das substituições trigonométricas e hiperbólicas para o cálculo de integrais do tipo

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx, \tag{1}$$

onde R é uma **função racional.**

Transformando o trinômio de segundo grau $ax^2 + bx + c$ numa soma ou diferença de quadrados, reduzimos a integral (1) a uma das integrais das formas seguintes:

1) $\int R(z, \sqrt{m^2 - z^2})\, dz;$ 2) $\int R(z, \sqrt{m^2 + z^2})\, dz;$ 3) $\int R(z, \sqrt{z^2 - m^2})\, dz.$

Estas integrais são resolvidas respectivamente através das substituições:

1) $z = m \operatorname{sen} t$ ou $z = m \operatorname{tgh} t$,

2) $z = m \operatorname{tg} t$ ou $z = m \operatorname{senh} t$,

3) $z = m \sec t$ ou $z = m \cosh t$.

Exemplo 1. Achar

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{x^2 + 2x + 2}} = I.$$

Solução. Teremos:

$$x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1.$$

Fazendo $x + 1 = \operatorname{tg} t$, temos: $dx = \sec^2 t\, dt$ e

$$I = \int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{(x+1)^2 + 1}} = \int \frac{\sec^2 t\, dt}{\operatorname{tg}^2 t \sec t} = \int \frac{\cos t}{\operatorname{sen}^2 t}\, dt =$$

$$= -\frac{1}{\operatorname{sen} t} + C = -\frac{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}{x + 1} + C.$$

Exemplo 2. Achar

$$\int x\sqrt{x^2+x+1}\,dx = I.$$

Solução. Teremos:

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}.$$

Fazendo

$$x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{senh} t \quad \text{e} \quad dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\cosh t\,dt,$$

obtemos:

$$I=\int\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{senh} t-\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\cosh t\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cosh t\,dt=$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{8}\int\operatorname{senh} t\cosh^2 t\,dt-\frac{3}{8}\int\cosh^2 t\,dt=$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{\cosh^3 t}{3}-\frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\operatorname{senh} t\cosh t+\frac{1}{2}t\right)+C.$$

Como

$$\operatorname{senh} t=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right),\qquad \cosh t=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+x+1}$$

e

$$t=\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+\ln\frac{2}{\sqrt{3}},$$

definitivamente teremos:

$$I=\frac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1}-$$

$$-\frac{3}{16}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C.$$

Achar as integrais:

1403. $\int\sqrt{3-2x-x^2}\,dx.$

1404. $\int\sqrt{2+x^2}\,dx.$

1405. $\int\frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}\,dx.$

1406. $\int\sqrt{x^2-2x+2}\,dx.$

1407. $\int\sqrt{x^2-4}\,dx.$

1408. $\int\sqrt{x^2+x}\,dx.$

1409. $\int\sqrt{x^2-6x-7}\,dx.$

1410. $\int(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}\,dx.$

1411. $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}.$

1412. $\int\frac{dx}{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}}.$

1413. $\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}.$

1414. $\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}.$

§ 10. Integração de diferentes funções transcendentais

Achar as integrais:

1415. $\int (x^2+1)^2 e^{2x}\,dx.$

1416. $\int x^2 \cos^2 3x\,dx.$

1417. $\int x \operatorname{sen} x \cos 2x\,dx.$

1418. $\int e^{2x} \operatorname{sen}^2 x\,dx.$

1419. $\int e^x \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x\,dx.$

1420. $\int xe^x \cos x\,dx.$

1421. $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}.$

1422. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}.$

1423. $\int x^2 \ln\frac{1+x}{1-x}\,dx.$

1424. $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})\,dx.$

1425. $\int x \arccos(5x-2)\,dx.$

1426. $\int \operatorname{sen} x \operatorname{senh} x\,dx.$

§ 11. Emprego das fórmulas de redução

Deduzir as fórmulas de redução das integrais:

1427. $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$; achar I_2 e I_3.

1428. $I_n = \int \operatorname{sen}^n x\,dx$; achar I_4 e I_5.

1429. $I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$; achar I_3 e I_4.

1430. $I_n = \int x^n e^{-x}\,dx$; achar I_{10}.

§ 12. Integração de diferentes funções

1431. $\int \frac{dx}{2x^2-4x+9}.$

1432. $\int \frac{x-5}{x^2-2x+2}\,dx.$

1433. $\int \frac{x^3}{x^2+x+\frac{1}{2}}\,dx.$

1434. $\int \frac{dx}{x(x^2+5)}.$

1435. $\int \frac{dx}{(x+2)^2(x+3)^2}.$

1436. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}.$

1437. $\int \frac{dx}{(x^2+2)^2}.$

1438. $\int \frac{dx}{x^4-2x^2+1}.$

1439. $\int \frac{x\,dx}{(x^2-x+1)^3}.$

1440. $\int \frac{3-4x}{(1-2\sqrt{x})^2}\,dx.$

1441. $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{x^3}\,dx.$

1442. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$

1443. $\int \frac{1-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}}\,dx.$

1444. $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x})^2}.$

1445. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{(4x^2-2x+1)^3}}\,dx.$

1446. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{5-x}}.$

1447. $\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-1)^3}}\,dx.$

1448. $\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}.$

1449. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-2x^2-x^4}}.$

1450. $\int \frac{x+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\,dx.$

1451*. $\int \frac{dx}{(x^2+4x)\sqrt{4-x^2}}.$

1452. $\int \sqrt{x^2-9}\,dx.$

1453. $\int \sqrt{x-4x^2}\,dx.$

1454. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}.$

1455. $\int x\sqrt{x^2+2x+2}\,dx.$

1456. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}.$

1457. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}}.$

1458. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$

1459. $\int \frac{5x}{\sqrt{1+x^4}}\,dx.$

1460. $\int \cos^4 x\,dx.$

1461. $\int \frac{dx}{\cos x \operatorname{sen}^5 x}.$

1462. $\int \frac{1+\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx.$

1463. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}\,dx.$

1464. $\int \operatorname{cosec}^5 5x\,dx.$

1465. $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^6 x}\,dx.$

1466. $\int \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)dx.$

1467. $\int \operatorname{tg}^3\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)dx.$

1468. $\int \frac{dx}{2\operatorname{sen} x+3\cos x-5}.$

1469. $\int \frac{dx}{2+3\cos^2 x}.$

1470. $\int \frac{dx}{\cos^2 x+2\operatorname{sen} x\cos x+2\operatorname{sen}^2 x}.$

1471. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x}.$

1472. $\int \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}.$

1473. $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+4\operatorname{tg} x+1}}\,dx.$

1474. $\int \frac{\cos ax}{\sqrt{a^2+\operatorname{sen}^2 ax}}\,dx.$

1475. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 3x}.$

1476. $\int x\operatorname{sen}^2 x\,dx.$

1477. $\int x^2 e^{x^3}\,dx.$

1478. $\int xe^{2x}\,dx.$

1479. $\int x^2\ln\sqrt{1-x}\,dx.$

1480. $\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$

1481. $\int \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2}\, dx.$

1482. $\int \frac{dx}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}.$

1483. $\int \frac{dx}{(\operatorname{tg} x + 1) \operatorname{sen}^2 x}.$

1484. $\int \operatorname{senh} x \cosh x\, dx.$

1485. $\int \frac{\operatorname{senh} \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}\, dx.$

1486. $\int \frac{\operatorname{senh} x \cosh x}{\operatorname{senh}^2 x + \cosh^2 x}\, dx.$

1487. $\int \frac{x}{\operatorname{senh}^2 x}\, dx.$

1488. $\int \frac{dx}{e^{2x} - 2e^x}.$

1489. $\int \frac{e^x}{e^{2x} - 6e^x + 13}\, dx.$

1490. $\int \frac{e^{2x}}{(e^x + 1)^{\frac{1}{4}}}\, dx.$

1491. $\int \frac{2^x}{1 - 4^x}\, dx.$

1492. $\int (x^2 - 1)\, 10^{-2x}\, dx.$

1493. $\int \sqrt{e^x + 1}\, dx.$

1494. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\, dx.$

1495. $\int x^3 \operatorname{arcsen} \frac{1}{x}\, dx.$

1496. $\int \cos(\ln x)\, dx.$

1497. $\int (x^2 - 3x) \operatorname{sen} 5x\, dx.$

1498. $\int x \operatorname{arctg}(2x + 3)\, dx.$

1499. $\int \operatorname{arcsen} \sqrt{x}\, dx.$

1500. $\int |x|\, dx.$

Capítulo V
INTEGRAL DEFINIDA

§ 1. Integral definida como limite da soma

1°. **Soma integral.** Seja $f(x)$ uma função definida no segmento $a \leqslant x \leqslant b$ e $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, uma divisão arbitrária deste segmento em n partes (fig. 37). A soma da forma

$$S_n = \sum_{r=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i, \tag{1}$$

onde $x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}$; $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$; $i = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$, recebe o nome de *soma integral* da função $f(x)$ em $[a, b]$. S_m representa geometricamente a soma algébrica das áreas dos retângulos correspondentes (ver a fig. 37).

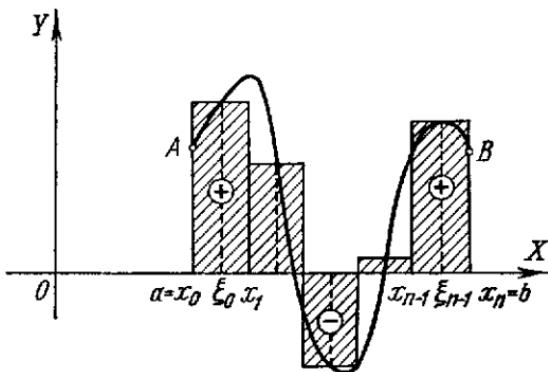



FIG. 37

2°. **Integral definida.** O limite da soma S_n, quando o número de partes n de divisões tende ao infinito e a maior das diferenças Δx_i tende a zero, se chama *integral definida* da função $f(x)$ entre os limites $x = a$ e $x = b$, isto é,

$$\lim_{\text{máx } \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{2}$$

Se a função $f(x)$ é contínua em $[a, b]$, também será integrável em $[a, b]$, isto é, o limite (2) existe, independentemente do método que se use para dividir o segmento de integração $[a, b]$ em segmentos parciais e da escolha dos pontos ξ_i dentro destes segmentos. A integral (2), definida geometricamente, é a soma algébrica de áreas de figuras que formam o trapézio mistilíneo $aABb$, no qual as áreas das partes, situadas sobre o eixo OX, são tomadas com sinal positivo, enquanto que as áreas das partes que se encontram abaixo do eixo OX são tomadas com sinal negativo (ver a fig. 37).

A definição de soma integral e de integral definida transferem-se, naturalmente, no caso do segmento $[a, b]$, quando $a > b$.

Exemplo 1. Formar a soma integral S_n para a função

$$f(x) = 1 + x$$

no segmento $[1, 10]$, dividindo este intervalo em n partes iguais e escholhendo os pontos ξ_i de forma que coincidam com os extremos esquerdos dos segmentos parciais $[x_i, x_{i+1}]$. A que é igual o $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$?

Solução. Temos $\Delta x_i = \dfrac{10-1}{n} = \dfrac{9}{n}$ e $\xi_i = x_i = x_0 + i\Delta x_i = 1 + \dfrac{9i}{n}$. Daí $f(\xi_i) = 1 + 1 + \dfrac{9i}{n} = 2 + \dfrac{9i}{n}$. Portanto (fig. 38),

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1}\left(2 + \frac{9i}{n}\right)\frac{9}{n} = \frac{18}{n}n + \frac{81}{n^2}(0 + 1 + \ldots + n - 1) =$$

$$= 18 + \frac{81}{n^2}\,\frac{n(n-1)}{2} = 18 + \frac{81}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 58\,\frac{1}{2} - \frac{81}{2n},$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 58\,\frac{1}{2}\,.$$

Exemplo 2. Achar a área do triângulo mistilíneo, limitado pelo arco da paráboa $y = x^2$, pelo eixo OX e pela vertical $x = a$ $(a > 0)$.

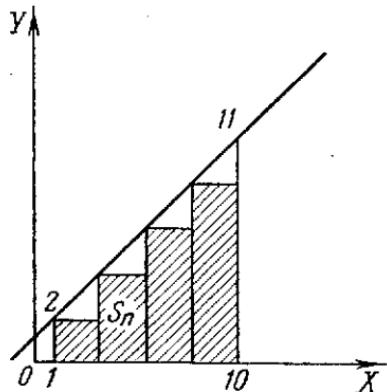



FIG. 38

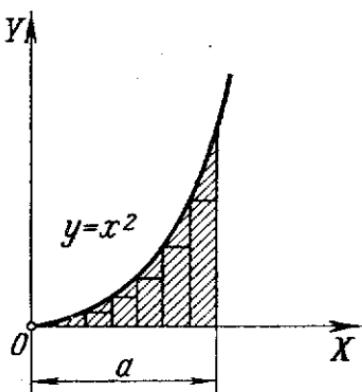



FIG. 39

Solução. Dividimos a base a em n partes iguais $\Delta x = \dfrac{a}{n}$. Escolhendo o valor da função no início de cada segmento, teremos:

$$y_1 = 0;\; y_2 = \left(\frac{a}{n}\right)^2;\; y_3 = \left[2\left(\frac{a}{n}\right)^2\right];\; \ldots;\; y_n = \left[(n-1)\,\frac{a}{n}\right]^2.$$

A área dos retângulos inscritos é calculada, multiplicando cada y_k pela base $\Delta_x = \dfrac{a}{n}$ (fig. 39). Somando, obtemos a área da figura escalonada

$$S_n = \frac{a}{n}\left(\frac{a}{n}\right)^2[1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2].$$

Utilizando a fórmula da soma dos quadrados dos números inteiros

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

achamos

$$S_n = \frac{a^3(n-1)\,n(2n-1)}{6n^3};$$

donde, passando ao limite, obtemos:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a^3(n-1)\,n(2n-1)}{6n^3} = \frac{a^3}{3}.$$

Calcular as seguintes integrais definidas, considerando-as como limite das respectivas somas integrais:

1501. $\int_a^b dx.$

1502. $\int_0^T (v_0 + gt)\,dt$

v_0 e g são constantes.

1503. $\int_{-2}^{1} x^2\,dx.$

1504. $\int_0^{10} 2^x\,dx.$

1505*. $\int_1^5 x^3\,dx.$

1506*. Achar a área do trapézio mistilíneo, limitado pela hipérbole

$$y = \frac{1}{x},$$

pelo eixo OX e pelas ordenadas: $x = a$ e $x = b$ $(0 < a < b)$.

1507*. Achar

$$f(x) = \int_0^x \operatorname{sen} t\,dt.$$

§ 2. Cálculo de integrais definidas através de indefinidas

1°. **Integral definida com o limite superior variável.** Se a função $f(x)$ é contínua no segmento $[a, b]$, a função

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

é uma função primitiva de $f(x)$, isto é,

$$F'(x) = f(x), \text{ quando } a \leqslant x \leqslant b.$$

2°. Fórmula de Newton — Leibniz. Se $F'(x) = f(x)$, temos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

A função primitiva $F(x)$ é calculada, achando-se a integral indefinida.

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Exemplo 1. Achar a integral $\int_{-1}^{3} x^4\,dx$.

Solução. $\int_{-1}^{3} x^4 dx = \frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{3} = \frac{3^5}{5} - \frac{(-1)^5}{5} = 48\frac{4}{5}$.

1508. Seja

$$I = \int_a^b \frac{dx}{\ln x}\ (b > a > 1).$$

Achar

$$1)\ \frac{dI}{da};\qquad 2)\ \frac{dI}{db}.$$

Achar as derivadas das seguintes funções:

1509. $F(x) = \int_1^x \ln t\,dt\ (x > 0)$.

1510. $F(x) = \int_x^0 \sqrt{1 + t^4}\,dt$.

1511. $F(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2}\,dt$.

1512. $I = \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos(t^2)\,dt\ (x > 0)$.

1513. Achar os pontos extremos da função

$$y = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt \text{ no campo } x > 0.$$

Utilizando a fórmula de Newton — Leibniz, achar as seguintes integrais:

1514. $\int_0^1 \frac{dx}{1 + x}$.

1515. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^3}$.

1516. $\int_{-x}^{x} e^t\,dt$.

1517. $\int_0^x \cos t\,dt$.

Valendo-se das integrais definidas, achar os limites das somas:

1518.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right).$

1519.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right).$

1520. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}\ (p>0).$

Calcular as integrais:

1521. $\int\limits_1^2(x^2-2x+3)\,dx.$

1522. $\int\limits_0^8(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x})\,dx$

1523. $\int\limits_1^4\frac{1+\sqrt{y}}{y^2}\,dy.$

1524. $\int\limits_2^6\sqrt{x-2}\,dx.$

1525. $\int\limits_0^{-3}\frac{dx}{\sqrt{25+3x}}.$

1526. $\int\limits_{-2}^{-3}\frac{dx}{x^2-1}.$

1527. $\int\limits_0^1\frac{x\,dx}{x^2+3x+2}.$

1528. $\int\limits_{-1}^1\frac{y^5\,dy}{y+2}.$

1529. $\int\limits_0^1\frac{dx}{x^2+4x+5}.$

1530. $\int\limits_3^4\frac{dx}{x^2-3x+2}.$

1531. $\int\limits_0^1\frac{z^3}{z^8+1}\,dz.$

1532. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\sec^2\alpha\,d\alpha.$

1533. $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

1534. $\int\limits_2^{3,5}\frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}.$

1535. $\int\limits_0^1\frac{y^2\,dy}{\sqrt{y^6+4}}.$

1536. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\alpha\,d\alpha.$

1537. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^3\varphi\,d\varphi.$

1538. $\int\limits_c^{c^2}\frac{dx}{x\ln x}.$

1539. $\int\limits_1^e \frac{\text{sen}(\ln x)}{x}\,dx.$ **1540.** $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \text{tg}\,x\,dx.$

1541. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \text{ctg}^4\,\varphi\,d\varphi.$ **1542.** $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx.$

1543. $\int\limits_0^1 \cosh x\,dx.$ **1544.** $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{\cos\text{h}^2 x}.$

1545. $\int\limits_0^{\pi} \text{senh}^2\,x\,dx.$

§ 3. Integrais impróprias

1°. **Integrais de funções não demarca s.** Se uma função $f(x)$ não está demarcadal em qualquer entorno do ponto interno c do segmento $[a, b]$ e é contínua, quando $a \leqslant x < c$ e $c < x \leqslant b$, de acordo com a definição se supõe:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\eta\to+0}\int\limits_{c+\eta}^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Se existem e são finitos os limites do segundo membro da igualdade (1), a integral inprópria recebe o nome de *convergente*, em caso contrário será *divergente*. Quando $c = a$ ou $c = b$, a determinação se simplifica de forma correspondente.

Se existe uma função $F(x)$ contínua no segmento $[a, b]$ tal que $F'(x) = f(x)$ para $x \neq c$ (*primitiva generalizada*), teremos:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (2)$$

Se $|f(x)| \leqslant \Phi(x)$, quando $a \leqslant x \leqslant b$, e $\int\limits_a^b \Phi(x)\,dx$ converge, a integral (1) também converge (*critério de comparação*).

Se $f(x) \geqslant 0$ e $\lim\limits_{x\to c}\{f(x)|c-x|^m\} = A \neq \infty$, $A \neq 0$, isto é $f(x) \sim \frac{A}{|c-x|^m}$ quando $x \to c$, então: 1) quando $m < 1$, a integral (1) é convergente, 2) quando $m \geqslant 1$ a integral (1) é divergente.

2°. **Integrais com limites infinitos.** Se a função $f(x)$ é contínua para $a \leqslant x < \infty$, supomos que

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx \qquad (3)$$

e em dependência da existência ou não existência do limite finito do segundo mem bro da igualdade (3), a integral correspondente receberá o nome de *convergente* ou de *divergente*.

Por analogia,

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}}\int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

Se $|f(x)| \leqslant F(x)$ e a integral $\int_{a}^{\infty} F(x)dx$ converge, a integral (3) também convergerá.

Se $f(x) \geqslant 0$ e $\lim_{x\to\infty}\{f(x)\,x^m\} = A \neq \infty$, $A \neq 0$, isto é, $f(x) \sim \dfrac{A}{x^m}$ quando $x \to \infty$, então: 1) quando $m > 1$ a integral (3) é convergente, 2) se $m \leqslant 1$ a integral (3) é divergente.

Exemplo 1.

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\eta\to 0}\left(\frac{1}{\eta} - 1\right) + \lim_{\eta\to 0}\left(\frac{1}{\eta} - 1\right) = \infty$$

a integral é divergente.

Exemplo 2.

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Exemplo 3. Investigar a convergência da *integral de Euler—Poisson*

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx. \tag{4}$$

Solução. Fazemos

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_{0}^{1} e^{-x^2}\,dx + \int_{1}^{\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

A primeira das duas integrais do segundo membro não é imprópria e a segunda é convergente, já que $e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$, quando $x \geqslant 1$, e

$$\int_{1}^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}(-e^{-b} + e^{-1}) = e^{-1};$$

portanto, a integral (4) é convergente.

Exemplo 4. Investigar se é convergente a integral

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}. \tag{5}$$

Solução. Quando $x \to +\infty$, teremos:

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}} \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

Como a integral

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$$

é convergente, a nossa integral (5) também a é.

Exemplo 5. Investigar se é convergente a integral elíptica

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}. \tag{6}$$

Solução. O ponto de descontinuidade da função subintegral é: $x = 1$. Aplicando a fórmula

$$1 - x^4 = (1-x)(1+x)(1+x^2),$$

teremos

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}} = \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}}.$$

Portanto, quando $x \to 1$, teremos:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \sim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Como a integral

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

é convergente, a integral dada (6) também convergerá.

Calcular as seguintes integrais impróprias (ou determinar sua divergência):

1546. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

1547. $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$.

1548. $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$.

1549. $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

1550. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

1551. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$.

1552. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$.

1553. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$.

1554. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

1555. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$. **1556.** $\int_{0}^{\infty} \operatorname{sen} x\, dx$. **1557.** $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln x}$.

1558. $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln^2 x}$. **1559.** $\int_{a}^{\infty} \frac{ax}{x \ln x}\ (a>1)$. **1560.** $\int_{a}^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} (a>1)$.

1561. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x\, dx$. **1562.** $\int_{0}^{\infty} e^{-kx}\, dx\ (k>0)$.

1563. $\int_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}\, dx$. **1564.** $\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-1)^2}$.

1565. $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}$. **1566.** $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^3-5x^2}$.

Verificar se as integrais são convergentes:

1567. $\int_{0}^{100} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}+x^3}$. **1568.** $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}$.

1569. $\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}$. **1570.** $\int_{0}^{\infty} \frac{x\, dx}{\sqrt{x^5+1}}$.

1571. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$. **1572.** $\int_{1}^{2} \frac{dx}{\ln x}$.

1573. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\, dx$.

1574*. Demonstrar que a integral de Euler, de 1a. espécie *(função beta)*

$$\mathrm{B}(p, q) = \int_{0}^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx$$

é convergente, quando $p>0$ e $q>0$.

1575*. Demonstrar que a integral de Euler, de 2a. espécie *(função gama)*

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}\ e^{-x}\,dx$$

é convergente quando $p > 0$.

§ 4. Troca de variável na integral definida

Se a função $f(x)$ é contínua no segmento $a \leqslant x \leqslant b$ e $x = \varphi(t)$ é uma função contínua junto com sua derivada $\psi'(t)$, no segmento $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, onde $a = \varphi(\alpha)$ e $b = \varphi(\beta)$, e a função $f[\varphi(t)]$ é definida e contínua no segmento $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, teremos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

Exemplo 1. Achar

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx \quad (a > 0).$$

Solução. Fazemos

$$x = a \operatorname{sen} t;$$
$$dx = a \cos t\, d.$$

Então $t = \operatorname{arcsen} \dfrac{x}{a}$ e, portanto, pode-se tomar $\alpha = \operatorname{arcsen} 0 = 0$, $\beta = \operatorname{arcsen} 1 = \dfrac{\pi}{2}$. Por isso, teremos:

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \operatorname{sen}^2 t\sqrt{a^2 - a^2\operatorname{sen}^2 t}\, a\cos t\,dt =$$

$$= a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 2t\,dt = \frac{a^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t)\,dt =$$

$$= \frac{a^4}{8}\left(t - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^4}{16}.$$

1576. Pode-se calcular a integral

$$\int_0^2 \sqrt[3]{1 - x^2}\,dx,$$

usando-se a substituição $x = \cos t$?

Transformar as seguintes integrais definidas, usando-se as substituições indicadas:

1577. $\int\limits_{1}^{3} \sqrt{x+1}\, dx,\ x = 2t - 1.$ **1578.** $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}},\ x = \operatorname{sen} t.$

1579. $\int\limits_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}},\quad x = \operatorname{senh} t,$ **1580.** $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx,\ x = \operatorname{arctg} t.$

1581. Para a integral

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx \qquad (b > a)$$

indicar uma substituição linear inteira,

$$x = \alpha t + \beta,$$

em cujo resultado os limites de integração se tornem respectivamente iguais a 0 e 1.

Utilizando as substituições indicadas, calcular as seguintes integrais:

1582. $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{x}},\qquad x = t^2.$

1583. $\int\limits_{3}^{29} \frac{(x-2)^{2/3}}{(x-2)^{2/3}+3}\, dx,\qquad x - 2 = z^3.$

1584. $\int\limits_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx,\qquad e^x - 1 = z^2.$

1585. $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{dt}{3 + 2\cos t},\qquad \operatorname{tg} \frac{t}{2} = z.$

1586. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + a^2 \operatorname{sen}^2 x},\qquad \operatorname{tg} x = t.$

Valendo-se de substituições adequadas, calcular as integrais:

1587. $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx.$ **1588.** $\int\limits_{1}^{2} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx.$

1589. $\int\limits_{0}^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx.$ **1590.** $\int\limits_{0}^{5} \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}.$

Calcular as integrais:

1591. $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}.$ **1592.** $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$

1593. $\int\limits_{0}^{a} \sqrt{ax-x^2}\,dx.$ **1594.** $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{5-3\cos x}.$

1595. Demonstrar que se $f(x)$ é uma função par,

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Se, ao contrário, $f(x)$ for uma função ímpar, então

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

1596. Demonstrar que

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

1597. Demonstrar que

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\arccos x} = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx.$$

1598. Demonstrar que

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{sen} x)\,dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx.$$

§ 5. Integração por partes

Se as funções $u(x)$ e $v(x)$ têm derivadas contínuas no segmento $[a, b]$, teremos

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx. \qquad (1)$$

Calcular as seguintes integrais, empregando-se a fórmula de integração por partes:

1599. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx.$ **1600.** $\int_1^{e} \ln x\,dx.$

1601. $\int_0^{1} x^3 e^{2x}\,dx.$ **1602.** $\int_0^{\pi} e^{x}\operatorname{sen} x\,dx.$

1603. $\int_0^{\infty} xe^{-x}\,dx.$ **1604.** $\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx \quad (a > 0).$

1605. $\int_0^{\infty} e^{-ax}\operatorname{sen} bx\,dx \quad (a > 0).$

1606.** Demonstrar que para a função gama (ver o n° **1575**) é válida a fórmula da redução:

$$\Gamma(p + 1) = p\Gamma(p) \qquad (p > 0).$$

Deduzir daí que $\Gamma(n + 1) = n!$, se n é um número natural.

1607. Demonstrar que para a integral

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$$

é válida a *fórmula de redução*

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Achar I_n, se n é um número natural. Usando a fórmula obtida calcular I_9 e I_{10}.

1608. Calcular a integral (ver o n° **1574**), empregando reiteradamente a integração por partes

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1 - x)^{q-1}\,dx,$$

onde p e q são números inteiros positivos.

1609*. Expressar por meio de β (função beta) a integral

$$I_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx,$$

se m e n são números inteiros não negativos.

§ 6. Teorema do valor médio

1°. Apreciação das integrais. Se $f(x) \leqslant F(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, então,

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b F(x)\,dx. \tag{1}$$

Se $f(x)$ e $\varphi(x)$ são contínuas para $a \leqslant x \leqslant b$, além disso, $\varphi(x) \geqslant 0$, então,

$$m\int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx \leqslant M\int_a^b \varphi(x)\,dx, \tag{2}$$

onde m é o valor mínimo absoluto e M é o valor máximo absoluto da função $f(x)$ no segmento $[a, b]$.

Em particular, se $\varphi(x) \equiv 1$, temos

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \tag{3}$$

As desigualdades (2) e (3) podem ser substituídas respectivamente por suas igualdades equivalentes:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(c)\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

e

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a),$$

onde c e ξ são números que se encontram entre a e b.

Exemplo 1. Apreciar a integral

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x}\,dx.$$

Solução. Como $0 \leqslant \operatorname{sen}^2 x \leqslant 1$, teremos:

$$\frac{\pi}{2} < I < \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{2}},$$

isto é,

$$1{,}57 < I < 1{,}91.$$

2°. **Valor médio da função.** O número

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

chama-se *valor médio* da função $f(x)$ no segmento $a \leqslant x \leqslant b$.

1610*. Determinar o sinal das seguintes integrais, sem calculá-las:

a) $\int_{-1}^{2} x^3\,dx$; b) $\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$; c) $\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$.

1611. Esclarecer (sem calcular) qual das seguintes integrais é maior:

a) $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$ ou $\int_0^1 x\,dx$;

b) $\int_0^1 x^2\operatorname{sen}^2 x\,dx$ ou $\int_0^1 x\operatorname{sen}^2 x\,dx$;

c) $\int_1^2 e^{x^2}\,dx$ ou $\int_1^2 e^x\,dx$.

Achar os valores médios das seguintes funções nos segmentos indicados:

1612. $f(x) = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

1613. $f(x) = a + b\cos x$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

1614. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

1615. $f(x) = \operatorname{sen}^4 x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

1616. Demonstrar que a integral $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$ está compreendida entre $\frac{2}{3} \approx 0{,}67$ e $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}70$. Achar seu valor exato.

Apreciar as integrais:

1617. $\int_0^1 \sqrt{4+x^2}\,dx$. **1618.** $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{8+x^3}$.

1619. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x}$. **1620*.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx$. **1621.** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$.

1622. Integrando por partes, demonstrar que

$$0 < \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\cos x}{x}\, dx < \frac{1}{100\pi}.$$

§ 7. Áreas de figuras planas

1°. A área em coordenadas cartesianas. Se uma curva contínua é dada em coordenadas cartesianas pela equação $y = f(x)$ $[f(x) \geqslant 0]$, a área do trapézio mistilíneo, limitado por esta curva, por duas verticais nos pontos $x = a$ e $x = b$ e pelo segmento do eixo das abscissas $a \leqslant x \leqslant b$ (fig. 40) é determinada pela fórmula

$$S = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{1}$$

Exemplo 1. Calcular a área da figura limitada pela parábola $y = \frac{x^2}{2}$, pelas retas $x = 1$ e $x = 3$ e pelo eixo das abscissas (fig. 41).

Solução. A área procurada é expressa pela integral

$$S = \int_1^3 \frac{x^2}{2}\, dx = 4\frac{1}{3}.$$

Exemplo 2. Calcular a área da figura limitada pela curva $x = 2 - y - y^2$ e pelo eixo das ordenadas (fig. 42).

Solução. Neste caso os eixos das coordenadas estão trocados e por isso a área procurada é expressa pela integral

$$S = \int_{-2}^{1} (2 - y - y^2)\, dy = 4\frac{1}{2},$$

onde os limites de integração $y_1 = -2$ e $y_2 = 1$ são as ordenadas dos pontos de interseção da curva dada com o eixo das ordenadas.

Em um caso mais geral, quando a área S da figura está limitada por duas curvas contínuas $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$ e por duas verticais $x = a$ e $x = b$, onde $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$ (fig. 43), teremos:

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\, dx. \tag{2}$$

Exemplo 3. Calcular a área S da figura plana compreendida entre as curvas

$$y = 2 - x^2 \text{ e } y^3 = x^2 \tag{3}$$

(fig. 44).

Solução. Resolvendo simultaneamente o sistema de equações (3), achamos os limites de integração: $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$. De acordo com a fórmula (2), teremos:

$$S = \int_{-1}^{1} (2 - x^2 - x^{2/3})\, dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}}\right)_{-1}^{1} = 2\frac{2}{15}.$$

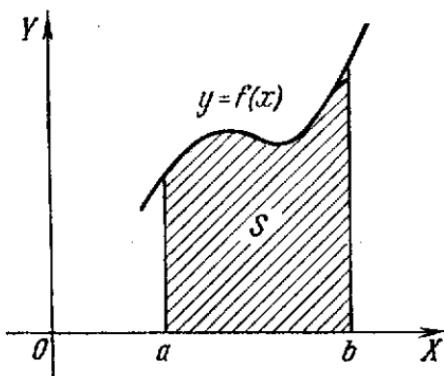



FIG. 40

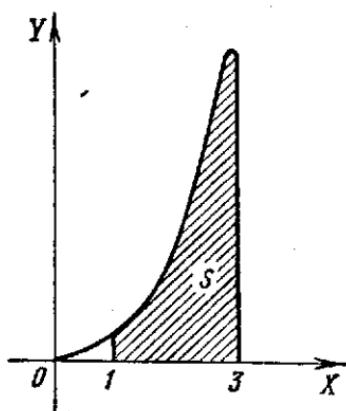



FIG. 41

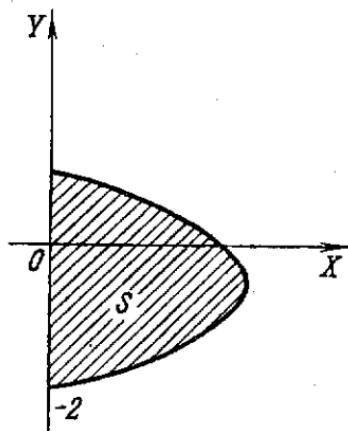



FIG. 42

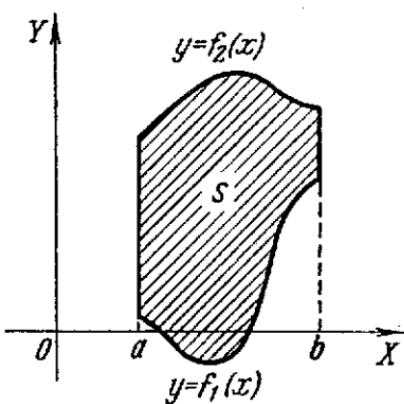



FIG. 43

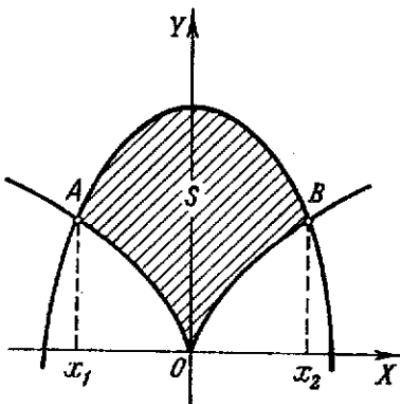



FIG. 44

Se a curva regular a pedaços é dada por equações em forma paramétrica, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, a área do trapézio mistilíneo, limitado por esta curva, por duas verticais, respectivamente $x = a$ e $x = b$, e pelo segmento do eixo OX, é expressa pela integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt,$$

onde t_1 e t_2 são determinados pelas equações

$$a = \varphi(t_1) \text{ e } b = \varphi(t_2) \quad [\psi(t) \geqslant 0 \text{ no segmento } [t_1, t_2]].$$

Exemplo 4. Achar a área da elipse S (fig. 45) utilizando suas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \operatorname{sen} t, \ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi). \end{cases}$$

Solução. Considerando-se a simetria é suficiente calcular a área de apenas uma quarta parte e, a seguir, quadruplicar o resultado. Fazendo na equação $x = a \cos t$ primeiramente $x = 0$ e depois $x = a$, obteremos os limites de integração $t_1 = \frac{\pi}{2}$ e $t_2 = 0$. Por isso

$$\frac{1}{4} S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b \operatorname{sen} a(-\operatorname{sen} t)\,dt = ab \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 t\,dt \, \frac{\pi ab}{4}$$

e, portanto, $S = \pi ab$.

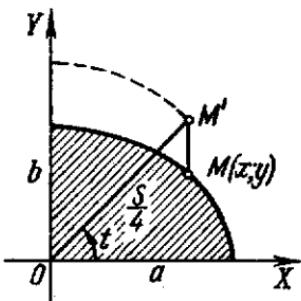



FIG. 45

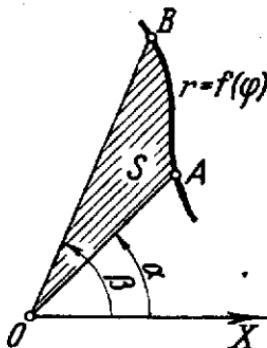



FIG. 46

2°. **A área em coordenadas polares.** Se a curva contínua é dada em coordenadas polares por uma equação $r = f(\varphi)$, a área do setor AOB (fig. 46), limitada pelo arco da curva e por dois raios polares OA e OB, respectivamente aos valores $\varphi_1 = \alpha$ e $\varphi_2 = \beta$, é expressa pela integral

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\varphi)]^2\,d\varphi.$$

Exemplo 5. Achar a área da figura encerrada no interior da lemniscata de Bernoulli $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (fig. 47).

Solução. Como a curva é simétrica, determinamos inicialmente a área de um de seus quadrantes

$$\frac{1}{4} S = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi \, d\varphi = \frac{a^2}{2} \left[\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4}.$$

Daí $S = a^2$.

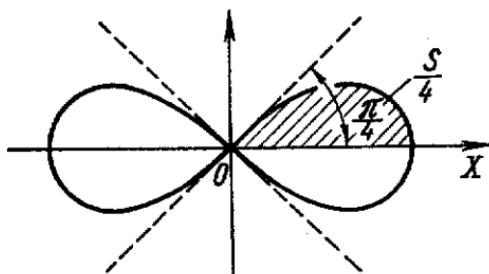



FIG. 47

1623. Calcular a área da figura limitada pela parábola $y = 4x - x^2$ e pelo eixo das abscissas.

1624. Calcular a área da figura limitada pela curva $y = \ln x$, pelo eixo OX e pela reta $x = e$.

1625*. Achar a área da figura limitada pela curva $y = x(x - 1)(x - 2)$ e pelo eixo OX.

1626. Achar a área da figura limitada pela curva $y^3 = x$, pela reta $y = 1$ e pela vertical $x = 8$.

1627. Calcular a área da figura compreendida entre uma semionda da sinusóide $y = \operatorname{sen} x$ e o eixo OX.

1628. Calcular a área da figura compreendida entre a curva $y = \operatorname{tg} x$, o eixo OX e a reta $x = \frac{\pi}{3}$.

1629. Calcular a área da figura compreendida entre a hipérbole $xy = m^2$, as verticais $x = a$ e $x = 3a$ $(a > 0)$ e o eixo OX.

1630. Achar a área da figura compreendida entre a curva de Agnesi $y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$ e o eixo das abscissas.

1631. Calcular a área da figura limitada pela curva $y = x^3$, a reta $y = 8$ e o eixo OY.

1632. Achar a área da figura limitada pelas parábolas $y^2 = 2px$ e $x^2 = 2py$.

1633. Achar a área da figura limitada pela parábola $y = 2x - x^2$ e pela reta $y = -x$.

1634. Calcular a área do segmento da parábola $y = x^2$, que corta a reta $y = 3 - 2x$.

1635. Calcular a área da figura compreendida entre as parábolas $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ e a reta $y = 2x$.

1636. Calcular a área da figura compreendida entre as parábolas $y = \frac{x^2}{3}$ e $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$.

1637. Calcular a área da figura compreendida entre a curva de Agnesi $y = \frac{1}{1+x^2}$ e a parábola $y = \frac{x^2}{2}$.

1638. Calcular a área da figura limitada pelas curvas $y = e^x$, $y = e^{-x}$ e a reta $x = 1$.

1639. Calcular a área da figura limitada pela hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ e a reta $x = 2a$.

1640*. Achar a área limitada pelo astróide

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

1641. Achar a área da figura compreendida entre a catenária

$$y = a \cosh \frac{x}{a},$$

o eixo OY e a reta $y = \frac{a}{2e}(e^2 + 1)$.

1642. Achar a área da figura limitada pela curva $a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$.

1643. Calcular a área da figura compreendida dentro da curva

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

1644. Achar a área da figura compreendida entre a hipérbole equilátera $x^2 - y^2 = 9$, o eixo OX e o diâmetro que passa pelo ponto $(5; 4)$.

1645. Achar a área da figura compreendida entre a curva

$$y = \frac{1}{x^2}, \text{ o eixo } OX \text{ e a reta } x = 1 \ (x > 1).$$

1646*. Achar a área da figura limitada pela cissóide $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ e sua assíntota $x = 2a$ $(a > 0)$.

1647*. Achar a área da figura compreendida entre o estrofóide $y^2 = \frac{x(x-a)^2}{2a-x}$ e sua assíntota $(a > 0)$.

1648. Calcular a área das duas partes em que a parábola $y^2 = 2x$ divide o círculo $x^2 + y^2 = 8$.

1649. Calcular a área da superfície compreendida entre a circunferência $x^2 + y^2 = 16$ e a parábola $x^2 = 12(y - 1)$.

1650. Achar a área contida no interior do astróide

$$x = a \cos^3 t; \qquad y = b \operatorname{sen}^3 t.$$

1651. Achar a área da superfície compreendida entre o eixo OX e um arco da ciclóide

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \qquad y = a(1 - \cos t).$$

1652. Achar a área da figura limitada por um ramo da trocóide

$$\begin{cases} x = at - b \operatorname{sen} t, \\ y = a - b \cos t \end{cases} \qquad (0 < b \leqslant a)$$

e a tangente da mesma em seus pontos inferiores.

1653. Achar a área da figura limitada pela cardióide

$$\begin{cases} x = a(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = a(2 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t). \end{cases}$$

1654*. Achar a área da figura limitada pelo laço da folha de Descartes

$$x = \frac{3at}{1 + t^3}; \qquad y = \frac{3at^2}{1 + t^3}.$$

1655*. Achar a área da figura limitada pela cardióide

$$r = a(1 + \cos \varphi).$$

1656*. Achar a área compreendida entre a primeira e a segunda espira da espiral de Arquimedes $r = a\varphi$ (fig. 48).

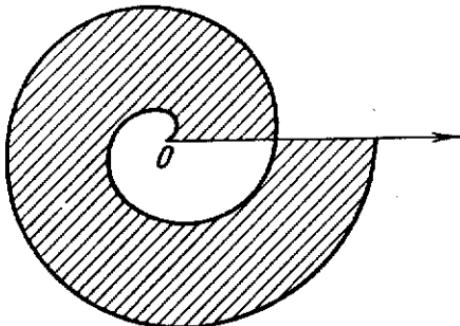



FIG. 48

1657. Achar a área de uma das pétalas da curva $r = a \cos 2\varphi$.

1658. Achar a área limitada pela curva $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 4\varphi$.

1659*. Achar a área limitada pela curva $r = a \operatorname{sen} 3\varphi$.

1660. Achar a área limitada pelo caracol de Pascal

$$r = 2 + \cos \varphi.$$

1661. Achar a área limitada pela parábola $r = a \sec^2 \frac{\varphi}{2}$ e as semi-retas $\varphi = \frac{\pi}{4}$ e $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

1662. Achar a área da figura limitada pela elipse

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad (0 \leqslant \varepsilon < 1).$$

1663. Achar a área da figura limitada pela curva $r = 2a \cos 3\varphi$ que está fora do círculo $r = a$.

1664*. Achar a área limitada pela curva $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.

§ 8. Comprimento do arco da curva

1°. **Comprimento do arco em coordenadas retangulares.** O comprimento s do arco de uma curva regular $y = f(x)$, compreendida entre dois pontos cujas abscissas sejam $x = a$ e $x = b (a < b)$, é igual a

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Exemplo 1. Achar o comprimento do astróide (fig. 49)

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

Solução. Derivando a equação do astróide, teremos:

$$y' = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}.$$

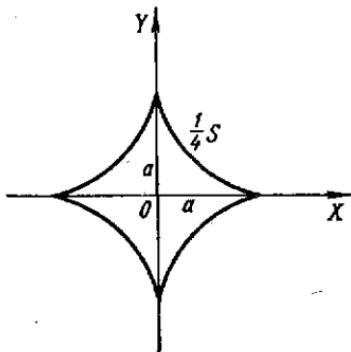
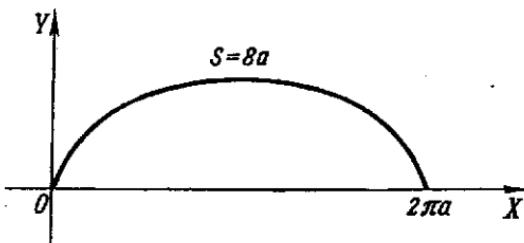



FIG. 49 FIG. 50

Portanto, para o comprimento do arco de um quarto do astróide, teremos:

$$\frac{1}{4} s = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}}\, dx = \int_0^a \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}\, dx = \frac{3}{2} a.$$

Daí, $s = 6a$.

2°. Comprimento do arco de uma curva dada em forma paramétrica. Se a curva é dada em equações de forma paramétrica $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$ (em que $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ têm derivadas contínuas), o comprimento s do arco da curva será igual a

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt,$$

onde t_1 e t_2 são os valores do parâmetro, correspondentes aos extremos do arco $(t_1 < t_2)$.

Exemplo 2. Achar o comprimento do arco da ciclóide (fig. 50):

$$\begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

Solução. Temos $x' = \dfrac{dx}{dt} = a(1 - \cos t)$ e $y' = \dfrac{dy}{dt} = a \operatorname{sen} t.$

Portanto

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \operatorname{sen}^2 t}\, dt = 2a \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \frac{t}{2}\, dt = 8a.$$

Os limites de integração $t_1 = 0$ e $t_2 = 2\pi$ correspondem a pontos extremos do arco da ciclóide.

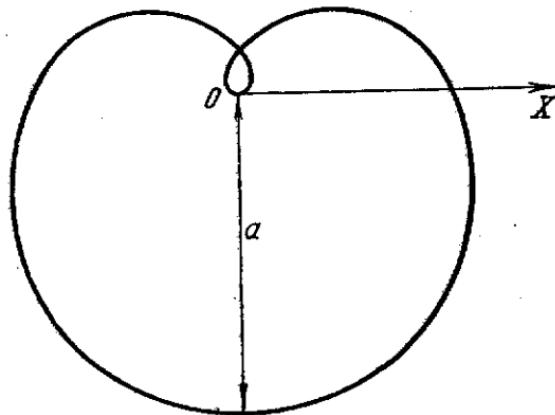



FIG. 51

Se uma curva regular é dada por uma equação $r = f(\varphi)$ em coordenadas polares r e φ, o comprimento s do arco será igual a

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi,$$

onde α e β são os valores do ângulo polar nos pontos extremos do arco $(\alpha < \beta)$.

Exemplo 3. Achar o comprimento total da curva $r = a \operatorname{sen}^3 \dfrac{\varphi}{3}$ (fig. 51). Toda a curva é descrita pelo ponto (r, φ) ao variar φ desde 0 até 3π.

Solução. Temos $r' = a \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{3} \cos \frac{\varphi}{3}$, por isso o comprimento de toda a curva será

$$s = \int_0^{3\pi} \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^6 \frac{\varphi}{3} + a^2 \operatorname{sen}^4 \frac{\varphi}{3} \cos^2 \frac{\varphi}{3}}\, d\varphi = a \int_0^{3\pi} \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{3}\, d\varphi = \frac{3\pi a}{2}.$$

1665. Calcular o comprimento do arco da parábola semicúbica $y^2 = x^3$ desde a origem das coordenadas até o ponto, cujas coordenadas são $x = 4$, $y = 8$.

1666*. Achar o comprimento do arco da catenária $y = a \cosh \frac{x}{a}$ desde o vértice $A(0;\ a)$ até o ponto $B(b;\ h)$.

1667. Calcular o comprimento do arco da parábola $y = 2\sqrt{x}$ desde $x = 0$ até $x = 1$.

1668. Achar o comprimento do arco da curva $y = e^x$, compreendido entre os pontos $(0;\ 1)$ e $(1;\ e)$.

1669. Achar o comprimento do arco da curva $y = \ln x$ desde $x = \sqrt{3}$ até $x = \sqrt{8}$.

1670. Achar o comprimento do arco $y = \operatorname{arcsen}\ (e^{-x})$ desde $x = 0$ até $x = 1$.

1671. Calcular o comprimento do arco da curva $x = \ln \sec y$, compreendido entre $y = 0$ e $y = \frac{\pi}{3}$.

1672. Achar o comprimento do arco da curva $x = \frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{2} \ln y$ desde $y = 1$ até $y = e$.

1673. Achar o comprimento do arco do ramo direito da tractiz $x = \sqrt{a^2 - y^2} + a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \right|$ desde $y = a$ até $y = b (0 < b < a)$.

1674. Achar o comprimento da parte fechada da curva $9ay^2 = x(x - 3a)^2$.

1675. Achar o comprimento do arco da curva $y = \ln \left(\operatorname{ctgh} \frac{x}{2} \right)$ desde $x = a$ até $x = b$ $(0 < a < b)$.

1676*. Achar o comprimento do arco da evolvente do círculo

$$\left.\begin{aligned} x &= a(\cos t + t \operatorname{sen} t), \\ y &= a(\operatorname{sen} t - t \cos t) \end{aligned}\right\} \text{ desde } t = 0 \text{ até } t = T.$$

1677. Achar o comprimento da evoluta da elipse

$$x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t; \quad y = \frac{c^2}{b} \operatorname{sen}^3 t \ (c^2 = a^2 - b^2,\ \ 0 < b < a).$$

1678. Achar o comprimento da curva

$$\left.\begin{aligned} x &= a(2\cos t - \cos 2t), \\ y &= a(2\,\text{sen}\, t - \text{sen}\, 2t). \end{aligned}\right\}$$

1679. Achar o comprimento da primeira espira da espiral de Arquimedes $r = a\varphi$.

1680. Achar o comprimento total da cardióide $r = a(1 + \cos\varphi)$.

1681. Achar o comprimento do arco da parábola $r = a\sec^2\frac{\varphi}{2}$, cortada da mesma por uma reta vertical que passa pelo polo.

1682. Achar o comprimento do arco da espiral hiperbólica $r\varphi = 1$ desde o ponto $\left(2; \frac{1}{2}\right)$ até o ponto $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

1683. Achar o comprimento do arco da espiral logarítmica $r = ae^{m\varphi}$ $(m > 0)$, que se encontra dentro do círculo $r = a$.

1684. Achar o comprimento do arco da curva $\varphi = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$ desde $r = 1$ até $r = 3$.

§ 9. Volumes dos corpos sólidos

1°. Volume de um corpo de revolução. Os volumes dos corpos formados pela revolução de um trapézio mistilíneo, limitado por uma curva contínua $y = f(x)$, pelo eixo OX e duas verticais $x = a$ e $x = b$, em torno dos eixos OX e OY, são expressos, respectivamente, pelas fórmulas:

$$1)\ V_X = \pi\int_a^b y^2\,dx; \qquad 2)\ V_Y = 2\pi\int_a^b xy\,dx^{*)}.$$

Exemplo 1. Calcular os volumes dos corpos formados pela rotação da figura limitada por uma semionda da sinusóide $y = \text{sen}\,x$ e pelo segmento $0 \leqslant x \leqslant \pi$ do eixo OX em torno: a) do eixo OX e b) do eixo OY.

Solução.

$$\text{a)}\ V_X = \pi\int_0^\pi \text{sen}^2 x\,dx = \frac{\pi^2}{2};$$

$$\text{b)}\ V_Y = 2\pi\int_0^\pi x\,\text{sen}\,x\,dx = 2\pi(-x\cos x + \text{sen}\,x)\Big|_0^\pi = 2\pi^2.$$

---

*) Seja um corpo formado pela revolução em torno do eixo OY de um trapézio mistilíneo, limitado pela curva $y = f(x)$ e pelas retas $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ e $y = 0$. Como elemento do volume deste corpo se toma o volume de uma parte do mesmo, formada pela rotação em torno do eixo OY de um retângulo de lados y e dx, que se encontra a uma distância x do eixo OY. Neste caso o elemento de volume é:

$$dV_Y = 2\pi xy\,dx, \text{ donde } V_Y = 2\pi\int_a^b xy\,dx.$$

O volume do corpo formado pela rotação em torno do eixo OY da figura limitada pela curva $x = g(y)$, o eixo OY e as duas paralelas $y = c$ e $y = d$ $(c < d)$, é determinado pela fórmula:

$$V_Y = \pi \int_c^d x^2\, dy,$$

que se obtém da fórmula 1), acima exposta, trocando as coordenadas x e y.

Se a curva é dada de outro modo (em forma paramétrica, em coordenadas polares, etc.), é necessário fazer nas fórmulas anteriores a troca correspondente de variável de integração.

No caso mais geral os volumes dos corpos formados pela rotação de uma figura limitada pelas curvas $y_1 = f_1(x)$ e $y_2 = f_2(x)$ (sendo $f_1(x) \leqslant f_2(x)$) e pelas retas $x = a$, $x = b$, $(a < b)$, em torno dos eixos de coordenadas OX e OY, serão respectivamente

$$V_X = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\, dx$$

e

$$V_Y = 2\pi \int_a^b x(y_2 - y_1)\, dx.$$

Exemplo 2. Achar o volume do toro, formado pela rotação do círculo $x^2 + (y - b)^2 \leqslant a^2 (b \geqslant a > 0)$ em torno do eixo OX (fig. 52).

Solução. Temos:

$$y_1 = b - \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{e} \quad y_2 = b + \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Por isso

$$V_X = \pi \int_{-a}^{a} [(b + \sqrt{a^2 - x^2})^2 - (b - \sqrt{a^2 - x^2})^2]\, dx = 4\pi b \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = 2\pi^2 a^2 b$$

(esta última integral é resolvida fazendo-se a substituição $x = a$ sen t).

O volume de um corpo, obtido ao girar um setor limitado por um arco de curva $r = F(\varphi)$ e dois raios polares $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$, em torno do eixo polar, é calculado pela fórmula

$$V_P = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta r^3 \operatorname{sen} \varphi\, d\varphi.$$

Esta mesma fórmula pode ser aplicada quando se procura o volume dos corpos, formados por rotação em torno do eixo polar, de figuras limitadas por qualquer curva fechada, dada em coordenadas polares.

Exemplo 3. Determinar o volume formado pela rotação da curva $r = a$ sen 2φ em torno do eixo polar.

Solução.

$$V_P = 2 \cdot \frac{2}{3}\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \operatorname{sen} \varphi\, d\varphi = \frac{4}{3}\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 2\varphi \operatorname{sen} \varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{32}{3}\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 \varphi \cos^3 \varphi\, d\varphi = \frac{64}{105}\pi a^3.$$

2°. Cálculo dos volumes dos corpos sólidos quando são conhecidas suas seções transversais. Se $S = S(x)$ é a área da seção do corpo, feita por um plano, perpendicular a uma reta qualquer (que se toma como eixo OX), no ponto da abscissa x, o volume do corpo será igual a

$$V = \int_{x_1}^{x_2} S(x)\, dx,$$

onde x_1 e x_2 são as abscissas das seções extremas deste corpo $(x_1 < x_2)$.

Exemplo 4. Determinar o volume de uma cunha, cortada de um cilindro circular por um plano que, passando pelo diâmetro da base, está inclinado em relação a ela, formando um ângulo α. O raio da base é igual a R (fig. 53).

Solução. Tomamos como eixo OX o diâmetro da base, pela qual passa o plano de corte e como eixo OY o diâmetro da base, perpendicular ao anterior. A equação da circunferência da base será $x^2 + y^2 = R^2$.

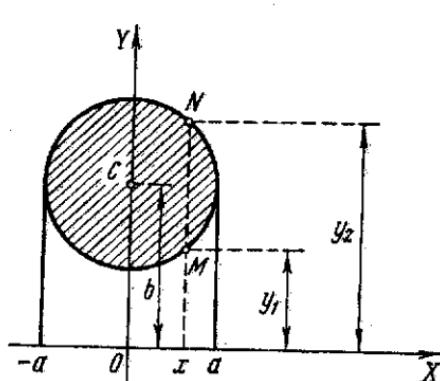
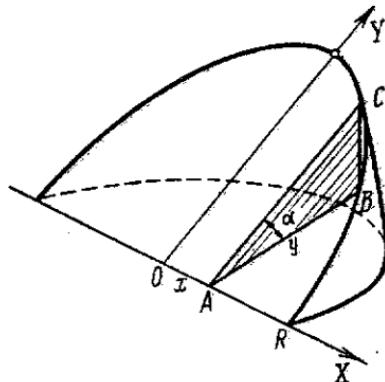



FIG. 52 FIG. 53

A área da seção ABC, que se encontra à distância x da origem das coordenadas O, será igual a

$$S(x) = \text{ár.}\triangle ABC = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} yy \operatorname{tg} \alpha = \frac{y^2}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Portanto, o volume procurado da cunha é

$$V = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^R y^2 \operatorname{tg} \alpha\, dx = \operatorname{tg} \alpha \int_0^R (R^2 - x^2)\, dx = \frac{2}{3} \operatorname{tg} \alpha R^3.$$

1685. Achar o volume do corpo formado pela rotação em torno do eixo OX, da superfície limitada pelo eixo OX e a parábola $y = ax - x^2 (a > 0)$.

1686. Achar o volume do elipsóide, formado pela rotação da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, em torno do eixo OX.

1687. Achar o volume do corpo, formado ao girar em torno do eixo OX, a superfície limitada pela catenária $y = a \cosh \frac{x}{a}$, o eixo OX e as retas $x = \pm a$.

1688. Achar o volume do corpo, formado ao girar em torno do eixo OX, a curva $y = \text{sen}^2 x$, no intervalo de $x = 0$ até $x = \pi$.

1689. Achar o volume do corpo formado pela rotação da superfície limitada pela parábola semicúbica $y^2 = x^3$, o eixo OX e a reta $x = 1$, em torno do eixo OX.

1690. Achar o volume do corpo, formado ao girar a mesma superfície do problema **1689**, em torno do eixo OY.

1691. Achar os volumes dos corpos, formados pela rotação da superfície limitada pelas linhas $y = e^x$, $x = 0$ e $y = 0$, em torno: a) do eixo OX e b) do eixo OY.

1692. Achar o volume do corpo formado pela rotação em torno do eixo OY, da parte da parábola $y^2 = 4ax$, que intercepta a reta $x = a$.

1693. Achar o volume do corpo formado pela rotação em torno da reta $x = a$, da parte da parábola $y^2 = 4ax$, que se intercepta pela mesma reta.

1694. Achar o volume do corpo formado pela rotação em torno da reta $y = -p$, da figura limitada pela parábola $y^2 = 2px$ e pela reta $x = \frac{p}{2}$.

1695. Achar o volume do corpo formado pela rotação em torno do eixo OX, da superfície compreendida entre as parábolas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

1696. Achar o volume do corpo formado pela rotação em torno do eixo OX, do laço da curva $(x - 4a)\, y^2 = ax(x - 3a)$ $(a > 0)$.

1697. Achar o volume do corpo que se forma ao girar a cissóide $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ em torno de sua assíntota $x = 2a$.

1698. Achar o volume do parabolóide de revolução, se o raio de sua base é R e sua altura é H.

1699. Um segmento parabólico reto, de base igual a $2a$ e de altura h, gira em torno de sua base. Determinar o volume do corpo de revolução que se forma ("limão" de Cavalieri).

1700. Demonstrar que o volume da parte do corpo de revolução, formado ao girar a hipérbole equilátera $x^2 - y^2 = a^2$ em torno do eixo OX, que intercepta o plano $x = 2a$, é igual ao volume de uma esfera de raio a.

1701. Achar os volumes dos corpos formados pela rotação da figura limitada por um arco da ciclóide $x = a(t - \text{sen}\, t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ e pelo eixo OX em torno: a) do eixo OX; b) do eixo OY e c) do eixo de simetria da figura.

1702. Achar o volume do corpo formado pela rotação do astróide $x = a \cos^3 t$, $y = a\, \text{sen}^3 t$ em torno do eixo OY.

1703. Achar o volume do corpo formado pela rotação da cardióide $r = a(1 + \cos\varphi)$ em torno do eixo polar.

1704. Achar o volume do corpo formado pela rotação da curva $r = a\cos^2\varphi$ em torno do eixo polar.

1705. Achar o volume do obelisco, cujas bases paralelas são retângulos de lados A, B e a, b, sendo a altura igual a h.

1706. Achar o volume do cone elíptico reto, cuja base é uma elipse de semi-eixos a e b e cuja altura é igual a h.

1707. Sobre as cordas do astróide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, paralelas ao eixo OX, construiram-se quadrados, cujos lados são iguais aos comprimentos das cordas e os planos em que se encontram são perpendiculares ao plano XOY. Achar o volume do corpo que formam estes quadrados.

1708. Um círculo deformável se desloca de tal forma que um dos pontos de sua circunferência descansa sobre o eixo OY, o centro descreve a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, enquanto que o plano do círculo é perpendicular ao eixo OY. Achar o volume do corpo formado por este círculo.

1709. O plano de um triângulo móvel permanece perpendicular ao diâmetro fixo de um círculo de raio a. A base do triângulo é a corda deste círculo, enquanto que seu vértice resvala por uma reta paralela ao diâmetro fixo, que se encontra a uma distância h do plano do círculo. Achar o volume do corpo (chamado *conóide*) formado pelo movimento deste triângulo desde um extremo do diâmetro ao outro.

1710. Achar o volume do corpo limitado pelos cilindros $x^2 + z^2 = a^2$ e $y^2 + z^2 = a^2$.

1711. Achar o volume do segmento do parabolóide elíptico $\frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2q} \leqslant x$ interceptado pelo plano $x = a$.

1712. Achar o volume do corpo limitado pelo hiperbolóide de uma folha $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ e os planos $z = 0$ e $z = h$.

1713. Achar o volume do elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

§ 10. Área da superfície de revolução

A área de uma superfície formada pela rotação em torno do eixo OX do arco de uma curva regular $y = f(x)$, entre os pontos $x = a$ e $x = b$ $(a < b)$, é expressa pela fórmula:

$$S_X = 2\pi \int_a^b |y| \frac{ds}{dx}\, dx = 2\pi \int_a^b |y| \sqrt{1 + y'^2}\, dx \qquad (1)$$

(ds é a diferencial do arco da curva).

Quando a equação da curva é dada de outra forma, a área da superfície S_X é obtida da fórmula (1), efetuando-se as trocas correspondentes de variáveis.

Exemplo 1. Achar a área da superfície formada pela rotação em torno do eixo OX do laço da curva $9y^2 = x(3 - x)^2$ (fig. 54).

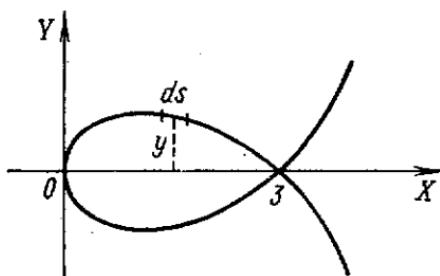



FIG. 54

Solução. Para a parte superior da curva, quando $0 \leqslant x \leqslant 3$, temos: $y = \frac{1}{3}(3 - x)\sqrt{x}$. Daí a diferencial do arco $ds = \frac{x + 1}{2\sqrt{x}}\,dx$. Partindo da fórmula (1), a área da superfície será

$$S = 2\pi \int_0^3 \frac{1}{3}(3 - x)\sqrt{x}\,\frac{x + 1}{2\sqrt{x}}\,dx = 3\pi.$$

Exemplo 2. Achar a área da superfície formada ao girar um arco da ciclóide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$; $y = a(1 - \cos t)$; em torno de seu eixo de simetria (fig. 55).

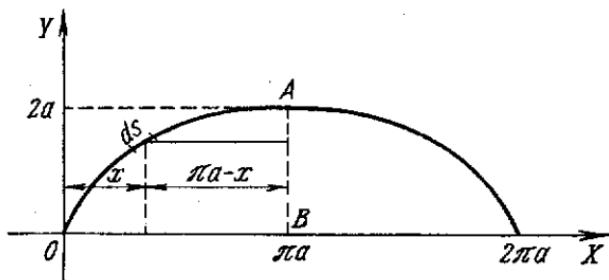



FIG. 55

Solução. A superfície procurada é formada pela rotação do arco OA em torno da reta AB, cuja equação é $x = \pi a$. Tomando y como variável independente e tendo em conta que o eixo de rotação AB está deslocado em relação ao eixo das coordenadas OY a uma distância πa, teremos

$$S = 2\pi \int_0^{2a} (\pi a - x)\,\frac{ds}{dy} \cdot dy.$$

Passando à variável t, obtemos:

$$S = 2\pi \int_0^\pi (\pi a - at + a \operatorname{sen} t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt =$$

$$= 2\pi \int_0^\pi (\pi a - at + a \operatorname{sen} t)\, 2a \operatorname{sen} \frac{t}{2}\, dt =$$

$$= 4\pi a^2 \int_0^\pi \left(\pi \operatorname{sen} \frac{t}{2} - t \operatorname{sen} \frac{t}{2} + \operatorname{sen} t \operatorname{sen} \frac{t}{2}\right) dt =$$

$$= 4\pi a^2 \left[-2\pi \cos \frac{t}{2} + 2t \cos \frac{t}{2} - 4 \operatorname{sen} \frac{t}{2} + \frac{4}{3} \operatorname{sen}^3 \frac{t}{2}\right]_0^\pi =$$

$$= 8\pi\left(\pi - \frac{4}{3}\right) a^2.$$

1714. Na fig. 56 são dadas as dimensões de um espelho parabólico AOB. Achar a área da superfície deste espelho.

1715. Achar a área da superfície do "fuso" que forma ao girar uma semionda da sinusóide $y = \operatorname{sen} x$ em torno do eixo OX.

1716. Achar a área da superfície formada pela rotação da parte da tangentóide $y = \operatorname{tg} x$, compreendida entre $x = 0$ e $\frac{\pi}{4}$, em torno do eixo OX.

FIG. 56

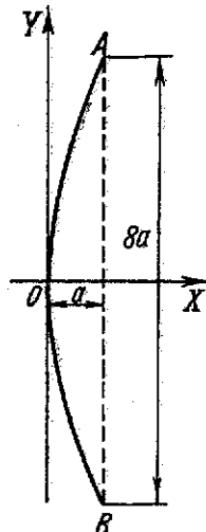
1717. Achar a área da superfície, formada pela rotação em torno do eixo OX, do arco da curva $y = e^{-x}$ compreendido entre $x = 0$ e $x = +\infty$.

1718. Achar a área da superfície (denominada *catenóide*) formada pela rotação da catenária $y = \cosh \frac{x}{a}$ em torno do eixo OX, entre os limites $x = 0$ e $x = a$.

1719. Achar a área da superfície de revolução do astróide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ em torno do eixo OY.

1720. Achar a área da superfície de revolução da curva $x = \frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{2} \ln y$ em torno do eixo OX, compreendida entre $y = 1$ e $y = e$.

1721*. Achar a área da superfície do toro formado pela rotação do círculo $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ em torno do eixo OX $(b > a)$.

1722. Achar a área da superfície formada ao girar a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ em torno: 1) do eixo OX; 2) do eixo OY $(a > b)$.

1723. Achar a área da superfície formada ao girar um dos arcos da ciclóide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ em torno: a) do eixo OX; b) do eixo OY; c) da tangente da ciclóide em seu ponto superior.

1724. Achar a área da superfície formada pela rotação, em torno do eixo OX, da cardióide

$$\left.\begin{array}{l} x = a(2\cos t - \cos 2t), \\ y = a(2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t). \end{array}\right\}$$

1725. Achar a área da superfície formada ao girar a lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ em torno do eixo polar.

1726. Achar a área da superfície formada pela rotação da cardióide $r = 2a(1 + \cos\varphi)$ em torno do eixo polar.

§ 11. Momentos. Centro de gravidade. Teoremas de Guldin

1°. **Momento estático.** Chama-se *momento estático* de um ponto material A, de massa m, situado a uma distância d do eixo l, em relação a este mesmo eixo l, à grandeza $M_l = md$.

Denomina-se *momento estático* de um sistema de n pontos materiais, de massas $m_1, m_2, \ldots, m_n$, situados no mesmo plano que o eixo l, em relação ao qual são tomados e dele separados pelas distâncias $d_1, d_2, \ldots, d_n$, à soma

$$M_l = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i, \tag{1}$$

sendo que tomam-se as distâncias dos pontos que se encontram de um lado do eixo l com o sinal (+), e os que estão do outro, com o sinal (−). Do mesmo modo se determina o *momento estático de um sistema de pontos* em relação a um plano.

Se as massas ocupam continuamente toda uma linha ou uma figura do plano XOY, os momentos estáticos M_X e M_Y em relação aos eixos de coordenadas OX e OY, em lugar da soma (1), são expressos pelas integrais correspondentes. Quando se trata de figuras geométricas, a densidade se considera igual a unidade.

Em particular: 1) para a curva $x = x(s)$; $y = y(s)$, onde o parâmetro s é o comprimento do arco, e L é o comprimento de toda a curva, teremos

$$M_X = \int_0^L y(s)\, ds; \qquad M_Y = \int_0^L x(s)\, ds \tag{2}$$

($ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ é a diferencial do arco);

2) para uma figura plana, limitada pela curva $y = y(x)$, pelo eixo OX e por duas verticais $x = a$ e $y = b$ $(a < b)$, obtemos

$$M_X = \frac{1}{2}\int_a^b y\,|\,y\,|\,dx; \qquad M_Y = \int_a^b x\,|\,y\,|\,dx \tag{3}$$

Exemplo 1. Achar os momentos estáticos em relação aos eixos OX e OY do triângulo limitado pelas retas: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $x = 0$, $y = 0$ (fig. 57).

Solução. Neste caso $y = b\left(1 - \frac{x}{a}\right)$. Aplicando a fórmula (3), teremos:

$$M_X = \frac{b^2}{2}\int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 dx = \frac{ab^2}{6}$$

e

$$M_Y = b\int_0^a x\left(1 - \frac{x}{a}\right) dx = \frac{a^2 b}{6}.$$

2°. **Momento de inércia.** Chama-se *momento de inércia* em relação ao eixo l, de um ponto material de massa m, situado à distância d do eixo l, ao número $I_l = md^2$.

Denomina-se *momento de inércia* em relação ao eixo l, de um sistema de n pontos materiais de massas $m_1, m_2, \ldots, m_n$, à soma

$$I_l = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2,$$

onde $d_1, d_2, \ldots, d_n$ são as distâncias desde os pontos ao eixo l. Quando a massa é contínua, em lugar da soma obteremos a integral correspondente.

Exemplo 2. Achar o momento de inércia de um triângulo de base b e altura h, em relação à sua própria base.

Solução. Tomamos a base do triângulo como eixo OX e sua altura como eixo OY (fig. 58).

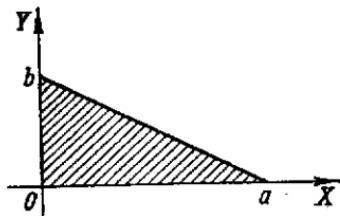



FIG. 57

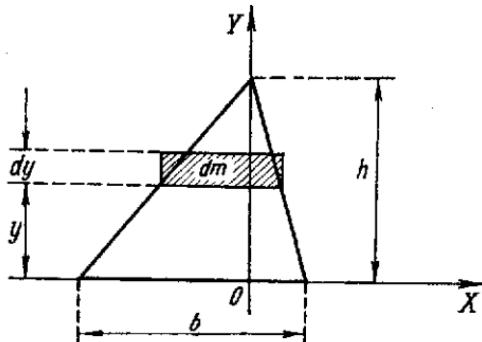



FIG. 58

Dividimos o triângulo em faixas horizontais infinitamente finas, de espessura dy, que desempenham o papel de massas elementares dm. Empregando a semelhança de triângulos, obteremos:

$$dm = b\frac{h-y}{h}dy$$

e

$$dI_X = y^2\,dm = \frac{b}{h}\,y^2(h-y)\,dy.$$

Daí

$$I_X = \frac{b}{h}\int_0^h y^2(h-y)\,dy = \frac{1}{12}bh^3.$$

3°. **Centro de gravidade.** *As coordenadas do centro de gravidade* de uma figura plana (seja seu arco ou campo), de massa M, são calculadas pelas fórmulas

$$\bar{x} = \frac{M_Y}{M}, \qquad \bar{y} = \frac{M_X}{M},$$

onde M_X e M_Y são os momentos estáticos das massas. Quando se trata de figuras geométricas, a massa M é numericamente igual ao arco correspondente ou ao campo.

Para as coordenadas do centro de gravidade $(\bar{x}, \bar{y})$ de um arco regular da curva plana $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, que une os pontos $A(a; f(a))$ e $B(b; f(b))$, temos

$$\bar{x} = \frac{\int\limits_A^B x\,ds}{s} = \frac{\int\limits_a^b x\sqrt{1+(y')^2}\,dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx}, \qquad \bar{y} = \frac{\int\limits_A^B y\,ds}{s} = \frac{\int\limits_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx}, \text{*)}$$

onde $s = \int\limits_a^b y\,dx$ é a área da figura.

As coordenadas do centro de gravidade $(\bar{x}, \bar{y})$ do trapézio curvilíneo $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$, podem ser calculadas pelas fórmulas

$$\bar{x} = \frac{\int\limits_a^b xy\,dx}{S}, \qquad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b y^2\,dx}{S},$$

onde $S = \int\limits_a^b y\,dx$ é a área da figura.

Empregam-se fórmulas análogas para achar as coordenadas do centro de gravidade dos corpos sólidos.

Exemplo 3. Achar o centro de gravidade do arco da semicircunferência $x^2 + y^2 = a^2 (y \geqslant 0)$ (fig. 59).

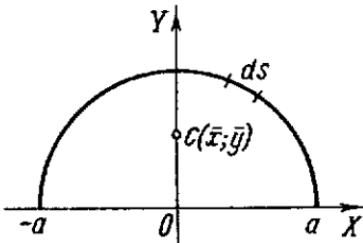



FIG. 59

*) A determinação das integrais curvilíneas $\int\limits_A^B x\,ds$ e $\int\limits_A^B y\,ds$, ver o cap. VII, § 9, 1°.

Solução. Temos

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \qquad y' = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \text{e} \quad ds = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \frac{a\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Portanto,

$$M_Y = \int_{-a}^{a} x\, ds = \int_{-a}^{a} \frac{ax}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = 0,$$

$$M_X = \int_{-a}^{a} y\, ds = \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, \frac{a\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2a^2, \quad M = \int_{-a}^{a} \frac{a\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \pi a.$$

Portanto,

$$\bar{x} = 0; \quad \bar{y} = \frac{2}{\pi} a.$$

4°. Teoremas de Guldin.

Teorema 1°. A área da superfície obtida pela rotação do arco de uma curva plana em torno de um eixo, situado num mesmo plano que a curva, mas não interceptado por ela, é igual ao produto do comprimento deste arco pelo comprimento da circunferência descrita pelo centro de gravidade da mesma.

Teorema 2°. O volume do corpo obtido pela rotação de uma figura plana em torno de um eixo, situado num mesmo plano que a figura, mas não interceptada por ela, é igual ao produto da área desta figura pelo comprimento da circunferência descrita pelo centro de gravidade da mesma.

1727. Achar os momentos estáticos em relação aos eixos das coordenadas, do segmento da linha reta

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

compreendido entre estes eixos de coordenadas.

1728. Achar os momentos estáticos do retângulo de lados a e b, em relação a estes mesmos lados.

1729. Achar os momentos estáticos em relação aos eixos OX e OY e as coordenadas do centro de gravidade do triângulo limitado pelas retas: $x + y = a$, $x = 0$ e $y = 0$.

1730. Achar os momentos estáticos em relação aos eixos OX e OY e as coordenadas do centro de gravidade do arco do astróide

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},$$

situado no primeiro quadrante.

1731. Achar o momento estático da circunferência

$$r = 2a \operatorname{sen} \varphi$$

em relação ao eixo polar.

1732. Achar as coordenadas do centro de gravidade do arco da catenária

$$y = a \cosh \frac{x}{a},$$

compreendido entre $x = -a$ e $x = a$.

1733. Achar o centro de gravidade do arco da circunferência, de raio a, que subtende o ângulo 2α.

1734. Achar as coordenadas do centro de gravidade do primeiro arco da ciclóide

$$x = a(t - \operatorname{sen} t); \quad y = a(1 - \cos t),$$

$(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

1735. Achar as coordenadas do centro de gravidade da figura limitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e pelos eixos das coordenadas OX e OY $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$.

1736. Achar as coordenadas do centro de gravidade da figura limitada pelas curvas

$$y = x^2; \quad y = \sqrt{x}.$$

1737. Achar as coordenadas do centro de gravidade da figura limitada pelo primeiro arco da ciclóide

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

e o eixo OX.

1738.** Achar o centro de gravidade do hemisfério de raio a, com centro na origem das coordenadas, situado sobre o plano XOY.

1739.** Achar o centro de gravidade de um cone circular reto, homogêneo, se o raio da base é r e a altura é h.

1740.** Achar o centro de gravidade da metade de um globo homogêneo de raio a, com centro na origem das coordenadas, situado sobre o plano XOY.

1741. Achar o momento de inércia de uma circunferência de raio a em relação ao seu próprio diâmetro.

1742. Achar o momento de inércia de um retângulo de lados a e b em relação a estes lados.

1743. Achar o momento de inércia de um segmento parabólico reto em relação ao seu eixo de simetria, se a base é $2b$ e a altura é h.

1744. Achar o momento de inércia da superfície da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ em relação a seus eixos principais.

1745.** Achar o momento polar de inércia de um anel circular de raios R_1 e R_2 $(R_1 < R_2)$, isto é, o momento de inércia em relação ao eixo que passa pelo centro do anel e é perpendicular ao plano do mesmo.

1746.** Achar o momento de inércia de um cone circular reto, homogêneo, em relação a seu eixo, se o raio da base é R e a altura é H.

1747.** Achar o momento de inércia de um globo homogêneo de raio a e massa M, em relação ao seu diâmetro.

1748. Achar a área e o volume de um toro obtido pela rotação de um círculo de raio a em torno de um eixo situado no mesmo plano que o círculo e que se encontra a uma distância b ($b \geqslant a$) do centro deste.

1749. a) Determinar a posição do centro de gravidade do arco do astróide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, situado no primeiro quadrante.

b) Achar o centro de gravidade da figura limitada pelas curvas $y^2 = 2px$ e $x^2 = 2py$.

1750.** a) Achar o centro de gravidade do semicírculo, aplicando o teorema de Guldin.

b) Demonstrar, aplicando o teorema de Guldin, que o centro de gravidade do triângulo dista de sua base em um terço da altura.

§ 12. Aplicação das integrais definidas na resolução de problemas da Física

1°. **Trajetória percorrida por um ponto.** Se um ponto se move sobre uma curva e a grandeza absoluta de sua velocidade $v = f(t)$ é uma função conhecida do tempo t, o *espaço* percorrido por este ponto em um intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ será igual a

$$s = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt.$$

Exemplo 1. A velocidade de um ponto é igual a

$$v = 0,1\ {}^3\mathrm{m}/s.$$

Achar o espaço s, percorrido pelo ponto, durante um intervalo de tempo $T = 10$ s, transcorrido desde o início de seu movimento. A que será igual a velocidade média do movimento durante este intervalo?

Solução. Temos

$$s = \int_0^{10} 0,1\, t^3\, dt = 0,1 \left.\frac{t^4}{4}\right|_0^{10} = 250 \text{ m}$$

e

$$v_{med.} = \frac{8}{T} = 25 \text{ m/s}.$$

2°. **Trabalho de uma força.** Se uma forca variável $X = f(x)$ atua na direçao do eixo OX, o *trabalho desta força* no segmento $[x_1, x_2]$, será

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx.$$

Exemplo 2. Que trabalho é necessário empregar para estirar uma mola em 6 cm, se a força de 1 kgf a estira em 1 cm?

Solução. De acordo com a lei de Hooke, a força X kgf que estira em x m a mola é igual a $X = kx$, onde k é o coeficiente de proporcionalidade.

Supondo que $x = 0{,}01$ m e $X = 1$ kgf teremos que $k = 100$ e, portanto, $X = 100\,x$. Assim, o trabalho procurado será

$$A = \int_0^{0,06} 100\,x\,dx = 50\,x^2 \Big|_0^{0,06} = 0{,}18 \text{ kgf m}.$$

3°. **Energia cinética.** Denomina-se *energia cinética* de um ponto material de massa m e velocidade v, a expressão

$$K = \frac{mv^2}{2}.$$

A *energia cinética* de um sistema de n pontos materiais, de massas $m_1, m_2, \ldots, m_n$, com velocidades respectivas $v_1, v_2, \ldots, v_n$, é igual a

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}. \tag{1}$$

Para calcular a energia cinética de um corpo é preciso dividi-lo convenientemente em partes elementares (que desempenham o papel de pontos materiais) e, a seguir, somando a energia cinética destas partes e passando a limites, em lugar da soma (1), teremos a integral correspondente.

Exemplo 3. Achar a energia cinética de um cilindro circular homogêneo (maciço) de densidade δ, com raio da base igual a R e altura h, que gira com uma velocidade angular ω em torno de seu eixo.

Solução. Como massa elementar dm toma-se a massa de um cilindro oco, de altura h, raio interior r e espessura das paredes dr (fig. 60). Teremos:

$$dm = 2\pi r \cdot h\delta\,dr.$$

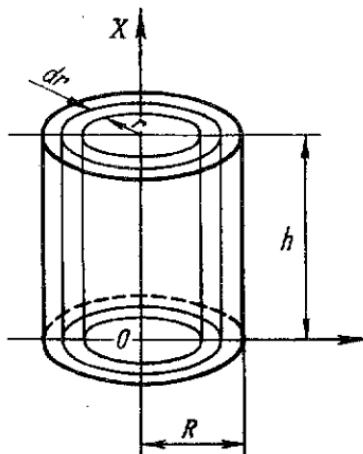



FIG. 60

Como a velocidade linear da massa dm é igual a $v = r\omega$, a energia cinética elementar é

$$dK = \frac{v^2\,dm}{2} = \pi r^3 \omega^2 h\delta\,dr.$$

Portanto

$$K = \pi\omega^2 h\delta \int_0^R r^3\, dr = \frac{\pi\omega^2\delta R^4 h}{4}.$$

4°. **Pressão do líquido.** Para calcular a força de *pressão do líquido*, emprega-se a lei de Pascal, pela qual a pressão que exerce o líquido sobre uma área S submersa a uma profundidade h é igual a

$$P = \gamma h S,$$

onde γ é o peso específico do líquido.

Exemplo 4. Achar a pressão que suporta um semicírculo de raio r, submerso verticalmente em água, de tal forma que seu diâmetro coincide com a superfície livre da água (fig. 61).

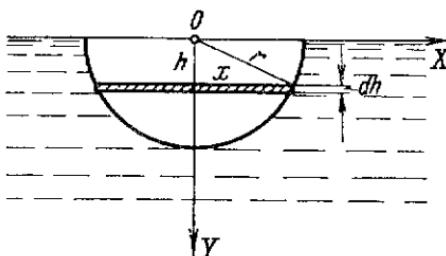



FIG. 61

Solução. Dividimos a superfície do semicírculo em elementos — faixas paralelas à superfície da água. A área de um destes elementos (se omitirmos os infinitésimos de ordem superior), situada à distância h da superfície da água, é igual a

$$dS = 2x\, dh = 2\sqrt{r^2 - h^2}\, dh.$$

A pressão que suporta este elemento é

$$dP = \gamma h\, dS = 2\gamma h\sqrt{r^2 - h^2}\, dh,$$

onde γ é o peso específico da água, igual à unidade.

Portanto, a pressão total será:

$$P = 2\int_0^r h\sqrt{r^2 - h^2}\, dh = -\frac{2}{3}(r^2 - h^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^r = \frac{2}{3}r^3.$$

1751. A velocidade de um corpo lançado para cima verticalmente com uma velocidade inicial v_0, não se considerando a resistência do ar, é expressa pela fórmula

$$v = v_0 - gt,$$

onde t é o tempo transcorrido e g, a aceleração da gravidade. A que distância da posição inicial se encontrará este corpo depois de t s de ter sido lançado?

1752. A velocidade de um corpo lançado verticalmente para cima com uma velocidade inicial v_0, considerando-se a resistência do ar, é expressa pela fórmula

$$v = c \cdot \operatorname{tg}\left(-\frac{g}{c}t + \operatorname{arctg}\frac{v_0}{c}\right),$$

onde t é o tempo transcorrido; g, a aceleração da gravidade e c é uma constante. Achar a que altura se eleva o corpo.

1753. Um ponto do eixo OX vibra harmonicamente em torno da origem das coordenadas com uma velocidade que é dada pela fórmula

$$v = v_0 \cos \omega t,$$

onde t é o tempo e v_0 e ω são constantes.

Achar a lei de vibração do ponto, se para $t = 0$ a abscissa era $x = 0$. A que será igual o valor médio da grandeza absoluta da velocidade do ponto, durante o período de oscilação?

1754. A velocidade do movimento do ponto é $v = te^{-0,01t}$ m/s. Achar o trajeto percorrido pelo ponto desde que começou a mover-se até que pare por completo.

1755. Um foguete eleva-se verticalmente. Supondo que sendo constante a força de tração, a aceleração de foguete aumenta em virtude da diminuição de seu peso segundo a lei $j = \frac{A}{a - bt}$ $(a - bt > 0)$; achar a velocidade do foguete em qualquer instante t, se sua velocidade inicial é igual a zero. Achar também a altura que alcança o foguete no instante $t = t_1$.

1756*. Calcular o trabalho necessário para retirar a água que se encontra em uma cuba cilíndrica vertical que tem um raio de base R e uma altura H.

1757. Calcular o trabalho necessário para retirar a água que se encontra em uma cuba cônica, com o vértice para baixo, sendo o raio da base R e uma altura H.

1758. Calcular o trabalho necessário para retirar a água de uma caldeira semi-esférica que tem um raio $R = 10$ m.

1759. Calcular o trabalho necessário para retirar, pelo orifício superior, o óleo contido em uma cisterna de forma cilíndrica com o eixo horizontal, se o peso específico do óleo é γ, o comprimento da cisterna H e o raio da base R.

1760.** Que trabalho é necessário realizar para levantar um corpo de massa m da superfície da Terra, cujo raio é R, a uma altura h? A que será igual este trabalho se é necessário levar este corpo ao infinito?

1761.** Duas cargas elétricas $e_0 = 100$ CGSE e $e_1 = 200$ CGSE se encontram no eixo OX, respectivamente nos pontos $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$ cm. Que trabalho se realizará se a segunda carga for trasladada ao ponto $x_2 = 10$ cm?

1762.** Um cilindro com um êmbolo móvel, de diâmetro $D = 20$ cm e comprimento $l = 80$ cm, está cheio de vapor a uma pressão $p = 10$ kgf/cm². Que trabalho é necessário realizar para diminuir o volume do vapor em duas vezes, se a temperatura é constante (*processo isotérmico*)?

1763.** Determinar o trabalho realizado na expansão adiabática do ar, até ocupar um volume $V_1 = 10$ m³, se o volume inicial é $V_0 = 1$ m³ e a pressão $p_0 = 1$ kgf/cm².

1764.** Um eixo vertical de peso P e raio a se apoia num pedestal AB (fig. 62). A fricção entre uma parte pequena σ da base do eixo e a superfície de apoio que está em contacto com ela é igual a $F = \mu p \sigma$, onde p é constante e é a pressão do eixo sobre a superfície de apoio, levada à unidade de superfície do mesmo e μ é o coeficiente de fricção. Achar o trabalho da força de fricção em uma volta do eixo.

1765.** Calcular a energia cinética de um disco de massa M e raio R que gira em torno de um eixo, que passa pelo seu centro e é perpendicular ao plano do disco, com uma velocidade angular ω.

FIG. 62

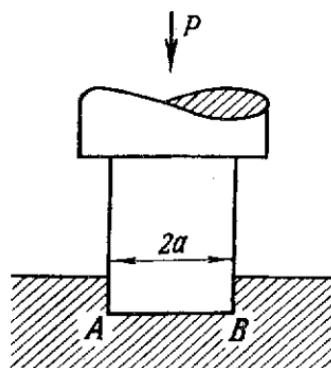
1766. Calcular a energia cinética de um cone circular reto, de massa M, que gira em torno de seu eixo com uma velocidade angular ω. O raio da base do cone é R, a altura H.

1767.* Que trabalho é necessário realizar para deter uma bola de ferro de raio $R = 2$ m que gira, em torno de seu diâmetro, com uma velocidade angular $\omega = 1000$ r.p.m.? (O peso específico do ferro é $\gamma = 7{,}8$ gf/cm³).

1768. Um triângulo vertical de base b e altura h está submerso em água, com um vértice para baixo, de forma que sua base coincide com a superfície da água. Achar a pressão que exerce a água sobre a base.

1769. Uma barragem vertical tem a forma de um trapézio. Calcular a pressão total da água sobre esta barragem, sabendo-se que sua base superior é igual a $a = 70$ m, a inferior $b = 50$ m e a altura $h = 20$ m.

1770. Achar a pressão que exerce um líquido, cujo peso específico é γ sobre uma elipse vertical de eixos $2a$ e $2b$, cujo centro está submerso numa profundidade h. O eixo maior $2a$ da elipse é paralelo à superfície do líquido ($h \geqslant b$).

1771. Achar a pressão que exerce a água sobre um cone cilíndrico vertical com raio de base R e altura H, submerso com o vértice para baixo, de forma que a base se encontre ao nível da água.

Problemas diversos

1772. Achar a massa de uma barra de comprimento $l = 100$ cm, se a densidade linear da mesma à distância x cm em relação a um dos extremos é igual a

$$\delta = \left(2 + 0{,}001\right) x^2 \frac{\text{g}}{\text{cm}}.$$

1773. Segundo dados empíricos a capacidade calorífica específica da água à temperatura t°C $(0 \leqslant t \leqslant 100°)$ é igual a

$$c = 0{,}9983 - 5{,}184 \cdot 10^{-5} t + 6{,}912 \cdot 10^{-7} t^2.$$

Que quantidade de calor se necessita para aquecer 1 g de água desde 0° até 100°C?

1774. O vento exerce uma pressão uniforme p gf/cm² sobre uma porta cuja largura é b cm e a altura h cm. Achar o momento da força com que pressiona o vento ao fazer girar a porta em suas presilhas.

1775. Que força de atração exerce uma barra material de comprimento l e massa M sobre um ponto material de massa m, situado na mesma reta que a barra a uma distância a de um de seus extremos?

1776.** Quando a corrente de líquido que passa por um tubo de seção circular de raio a é laminar estável, a velocidade v, em um ponto que se encontra à distância r do eixo do tubo, se expressa pela fórmula

$$v = \frac{p}{4\mu l}(a^2 - r^2),$$

onde p é a diferença de pressão do líquido nos extremos do tubo, μ é o coeficiente de viscosidade e l, o comprimento do tubo. Determinar o *gasto Q de líquido*, isto é, a quantidade do mesmo que passa pela seção transversal do tubo na unidade de tempo.

1777*. As mesmas condições do problema anterior (**1776**), mas para um tubo de seção retangular, em que a base a é grande em comparação com a altura $2b$. Neste caso, a velocidade da corrente v no ponto $M(x, y)$ é determinada pela fórmula

$$v = \frac{p}{2\mu l}[b^2 - (b - y)^2].$$

Determinar o gasto Q de líquido.

1778.** Ao estudar as propriedades dinâmicas dos automóveis se recorre frequentemente à construção de diagramas especiais: sobre o eixo das abscissas se tomam as velocidades v e sobre o das ordenadas, as grandezas inversas às correspondentes acelerações a. Demonstrar que a área S, limitada pela curva deste gráfico, pelas duas ordenadas $v = v_1$ e $v = v_2$ e o eixo das abscissas é numericamente igual ao tempo que se necessita para aumentar a velocidade do automóvel desde v_1 a v_2 (*tempo de "embalada"*)?

1779. Uma viga horizontal de comprimento l está em equilíbrio sob a ação de uma carga uniformemente distribuída ao longo dela e dirigida verticalmente para baixo, e das reações de seus apoios A e B $\left(A = B = \frac{Q}{2}\right)$, dirigidas verticalmente para cima. Achar o momento de flexão M_x na seção transversal x, isto é, o momento, em relação ao ponto P de abscissa x, de todas as forças que atuam na parte AP da viga.

1780. Uma viga horizontal de comprimento l está em equilíbrio sob a ação das reações de seus apoios A e B e de uma carga dividida ao longo da mesma com uma intensidade $q = kx$, onde x é a distância até o apoio esquerdo e k um coeficiente constante. Achar o momento de flexão M_x na seção x.

Observação. Dá-se o nome de intensidade de distribuição da carga à carga (força) levada à unidade de comprimento.

1781*. Achar a quantidade de calor que desprende uma corrente alternada sinusoidal

$$I = I_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t - \varphi\right)$$

durante o período T em um condutor de resistência R. Aqui I_0 é a amplitude da corrente; t, o tempo; φ, a fase.

Capítulo VI
FUNÇÕES DE DIVERSAS VARIÁVEIS

§ 1. Noções fundamentais

1°. **Noção de função de diversas variáveis. Designação das funções.** Uma grandeza variável z se denomina *função* uniforme de duas variáveis x e y, se à cada conjunto de valores destas (x, y) do campo dado, corresponde um valor único e determinado de z. As variáveis x e y se chamam *argumentos* ou *variáveis independentes*. A dependência funcional é assim representada

$$z = f(x, y), \text{ ou } z = F(x, y), \text{ etc.}$$

As funções de três ou mais argumentos se definem de maneira análoga.

Exemplo 1. Expressar o volume V do cone em função de sua geratriz x e do raio da base y.

Solução. Da geometria sabemos que o volume do cone é

$$V = \frac{1}{3}\pi y^2 h,$$

onde h é a altura do cone. Mas $h = \sqrt{x^2 - y^2}$. Portanto,

$$V = \frac{1}{3}\pi y^2 \sqrt{x^2 - y^2}.$$

Esta é, precisamente, a dependência funcional procurada.

O valor da função $z = f(x, y)$ no ponto $P(a, b)$, isto é, quando $x = a$ e $y = b$, se designa por $f(a, b)$ ou $f(P)$. A representação geométrica da função $z = f(x, y)$ em um sistema de coordenadas cartesianas X, Y, Z é, em geral, uma superfície qualquer (fig. 63).

Exemplo 2. Achar $f(2, -3)$ e $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$, se

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2xy}.$$

Solução. Fazendo $x = 2$ e $y = -3$, achamos:

$$f(2, -3) = \frac{2^2 + (-3)^2}{2 \cdot 2 \cdot (-3)} = -\frac{13}{12}.$$

Fazendo $x = 1$ e substituindo y por $\frac{y}{x}$, teremos:

$$f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2 \cdot 1\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{x^2 + y^2}{2xy},$$

isto é, $f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f(x,y)$.

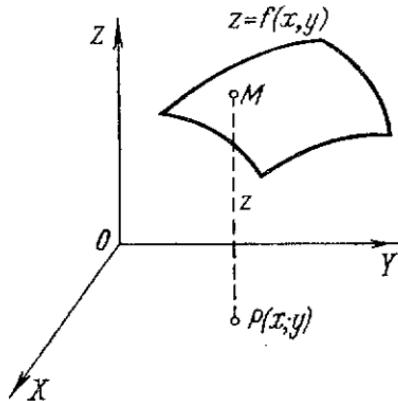
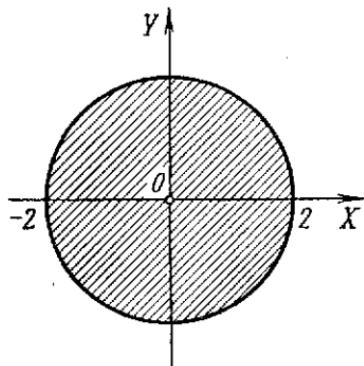



FIG. 63 FIG. 64

2°. **Campo de existência da função.** Por *campo de existência* (de determinação) da função $z = f(x, y)$ se entende o conjunto de pontos (x, y) do plano XOY, que determinam a função dada (isto é, para os quais a função toma valores reais determinados). Nos casos mais elementares, o campo de existência da função representa uma parte finita ou infinita do plano coordenado XOY, limitada por uma ou várias curvas (*o limite do campo*).

Do mesmo modo, para as funções de três variáveis $u = f(x, y, z)$, o campo de existência da função é um corpo qualquer no espaço $OXYZ$.

Exemplo 3. Achar o campo de existência da função

$$z = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}.$$

Solução. Esta função tem valores reais, quando $4 - x^2 - y^2 > 0$ ou $x^2 + y^2 < 4$. As coordenadas dos pontos situados dentro de uma circunferência de raio 2 com o centro na origem das coordenadas satisfazem esta última desigualdade. O campo de existência desta função é, pois, o interior deste círculo (fig. 64).

Exemplo 4. Achar o campo de existência da função

$$z = \operatorname{arcsen}\frac{x}{2} + \sqrt{xy}.$$

Solução. O primeiro termo da função fica determinado para $-1 \leqslant \frac{x}{2} \leqslant 1$, ou $-2 \leqslant x \leqslant 2$. O segundo termo tem valores reais quando $xy \geqslant 0$, isto é, nos casos:

$$\text{quando} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \end{cases} \text{ou quando} \begin{cases} x \leqslant 0, \\ y \leqslant 0. \end{cases}$$

O campo de existência de toda a função está representado na fig. 65 e compreende os limites do campo.

3°. Linhas e superfícies de nível das funções. Chama-se *linha de nível* de uma função $z = f(x, y)$, a linha $f(x, y) = C$ do plano XOY, em cujos pontos a função toma um mesmo valor $z = C$ (geralmente assinalada como anotação no desenho)

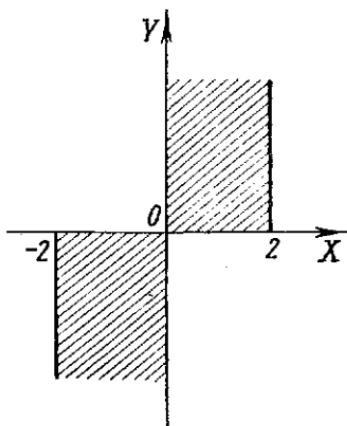
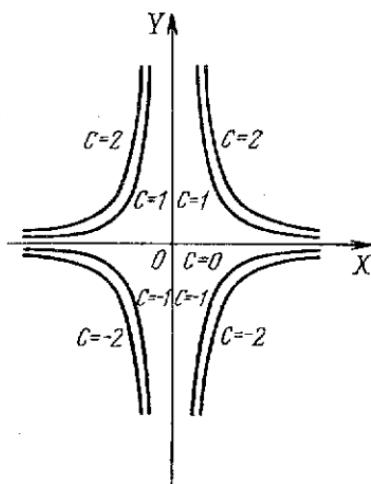



FIG. 65 FIG. 66

Chama-se *superfície de nível* de uma função de três argumentos $u = f(x, y, z)$ à superfície $f(x, y, z) = C$, em cujos pontos a função toma um valor constante $u = C$.

Exemplo 5. Construir as linhas de nível da função $z = x^2y$.

Solução. A equação das linhas de nível tem a forma $x^2y = C$ ou $y = \dfrac{C}{x^2}$. Fazendo $C = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, obtemos a família de linhas de nível (fig. 66).

1782. Expressar o volume V de uma pirâmide quadrangular regular em função de sua altura x e de sua aresta lateral y.

1783. Expressar a área S da superfície lateral de um tronco de pirâmide hexagonal regular em função dos lados x e y das bases, e da altura z.

1784. Achar $f\left(\frac{1}{2}, 3\right)$, $f(1, -1)$, se

$$f(x, y) = xy + \frac{x}{y}.$$

1785. Achar $f(y, x)$, $f(-x, -y)$, $f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$, $\frac{1}{f(x, y)}$, se $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{2xy}$.

1786. Achar os valores que toma a função

$$f(x, y) = 1 + x - y$$

nos pontos da parábola $y = x^2$ e construir o gráfico da função

$$F(x) = f(x, x^2).$$

1787. Achar o valor da função

$$z = \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{1 - x^2 - y^2}$$

nos pontos da circunferência $x^2 + y^2 = R^2$.

1788*. Determinar $f(x)$, se

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} \quad (xy > 0).$$

1789.** Achar $f(x, y)$, se

$$f(x + y, x - y) = xy + y^2.$$

1790*. Seja $z = \sqrt{y} + f(\sqrt{x} - 1)$. Determinar as funções f e z, se $z = x$, quando $y = 1$.

1791.** Seja $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$. Determinar as funções f e z, se $z = \sqrt{1 + y^2}$, quando $x = 1$.

1792. Achar e representar os campos de existência das seguintes funções:

a) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$; b) $z = 1 + \sqrt{-(x - y)^2}$;

c) $z = \ln (x + y)$; d) $z = x + \arccos y$;

e) $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$; f) $z = \operatorname{arcsen} \frac{y}{x}$;

g) $z = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}$;

h) $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - a^2)(2a^2 - x^2 - y^2)} \quad (a > 0)$;

i) $z = \sqrt{y \operatorname{sen} x}$; j) $z = \ln (x^2 + y)$;

l) $z = \operatorname{arctg} \frac{x - y}{1 + x^2y^2}$; m) $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$;

n) $z = \frac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$; o) $z = \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{y}$;

p) $z = \sqrt{\operatorname{sen} (x^2 + y^2)}$.

1793. Achar os campos de existência das seguintes funções de três argumentos:

a) $u = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$; b) $u = \ln (xyz)$;

c) $u = \operatorname{arcsen} x + \operatorname{arcsen} y + \operatorname{arcsen} z$;

d) $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$.

1794. Construir as linhas de nível das funções dadas e verificar o caráter das superfícies representadas por estas funções:

a) $z = x + y$; b) $z = x^2 + y^2$; c) $z = x^2 - y^2$.
d) $z = \sqrt{xy}$; e) $z = (1 + x + y)^2$; f) $z = 1 - |x| - |y|$;
g) $z = \frac{y}{x^2}$; h) $z = \frac{y}{\sqrt{x}}$; i) $z = \frac{2x}{x^2 + y^2}$.

1795. Achar as linhas de nível das seguintes funções:

a) $z = \ln(x^2 + y)$; b) $z = \operatorname{arcsen} xy$; c) $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$;
d) $z = f(y - ax)$; e) $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

1796. Achar as superfícies de nível das funções de três variáveis independentes:

a) $u = x + y + z$, b) $u = x^2 + y^2 + z^2$, c) $u = x^2 + y^2 - z^2$.

§ 2. Continuidade

1°. **Limite de uma função.** O número A recebe o nome de *limite da função* $z = f(x, y)$ quando o ponto $P'(x, y)$ tende ao ponto $P(a, b)$, se para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal, que quando $0 < \rho < \delta$ onde $\rho = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ é a distância entre os pontos P e P', se verifica a desigualdade

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

Neste caso, escrevemos:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = A.$$

2°. **Continuidade e pontos de descontinuidade.** A função $z = f(x, y)$ recebe o nome de *contínua* no ponto $P(a, b)$, se

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = f(a, b).$$

A função que é contínua em todos os pontos de um campo determinado se chama *contínua neste campo.*

As condições de continuidade de uma função $f(x, y)$ podem não ser válidas em pontos isolados (*pontos isolados de descontinuidade*), ou em pontos que formem uma ou várias linhas (*linhas de descontinuidade*) e, as vezes, figuras geométricas mais complicadas.

Exemplo 1. Achar os pontos de descontinuidade da função

$$z = \frac{xy + 1}{x^2 - y}.$$

Solução. A função perde seu sentido se o denominador torna-se igual a zero. Porém, $x^2 - y = 0$, ou seja, $y = x^2$ é a equação da parábola. Portanto, a função dada tem uma linha de descontinuidade: a parábola $y = x^2$.

1797*. Achar os limites das funções:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)\,\text{sen}\,\dfrac{1}{xy}$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$; c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{\text{sen}\,xy}{x}$;

d) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to k}} \left(1+\dfrac{y}{x}\right)^x$; e) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x}{x+y}$; f) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

1798. Verificar se a função é contínua

$$f(x,\ y)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2-y^2}, & \text{quando } x^2+y^2\leqslant 1,\\ 0, & \text{quando } x^2+y^2>1.\end{cases}$$

1799. Achar os pontos de descontinuidade das seguintes funções:

a) $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$; b) $z=\dfrac{1}{(x-y)^2}$;

c) $z=\dfrac{1}{1-x^2-y^2}$; d) $z=\cos\dfrac{1}{xy}$.

1800*. Demonstrar que a função

$$z=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{quando } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{quando } x=y=0.\end{cases}$$

é contínua em relação a cada uma das variáveis x e y em separado, porém não é contínua no ponto (0, 0) em relação ao conjunto destas variáveis.

§ 3. Derivadas parciais

1°. **Definição de derivadas parciais.** Se $z=f(x,\ y)$, supondo, por exemplo, y constante, obteremos a derivada

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,\ y)-f(x,\ y)}{\Delta x}=f'_x(x,\ y),$$

que recebe o nome de *derivada parcial* da função z em relação à variável x. Da mesma forma se define e se designa a derivada parcial da função z em relação à variável y. É evidente que para achar as derivadas parciais podem utilizar-se as fórmulas ordinárias de derivação.

Exemplo 1. Achar as derivadas parciais da função

$$z=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{y}.$$

Solução. Considerando y grandeza constante, teremos

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}}\,\frac{1}{\cos^2\dfrac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{2}{y\,\text{sen}\,\dfrac{2x}{y}}.$$

Por analogia, considerando x como constante, teremos:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{2x}{y^2 \operatorname{sen}\frac{2x}{y}}.$$

Exemplo 2. Achar as derivadas parciais da função de três argumentos

$$u = x^3y^2z + 2x - 3y + z + 5.$$

Solução.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y^2z + 2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x^3yz - 3,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^3y^2 + 1.$$

2°. **Teorema de Euler.** A função $f(x, y)$ se chama função *homogênea* de grau n se para qualquer fator real k se verifica a igualdade

$$f(kx, ky) \equiv k^n f(x, y).$$

Uma função racional inteira será homogênea se todos os termos da mesma são do mesmo grau.

Para toda função homogênea de grau n sempre se verifica a igualdade (*teorema de Euler*)

$$xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = nf(x, y).$$

Achar as derivadas parciais das funções:

1801. $z = x^3 + y^3 - 3axy$.

1802. $z = \frac{x - y}{x + y}$.

1803. $z = \frac{y}{x}$.

1804. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.

1805. $z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

1806. $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$.

1807. $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

1808. $z = x^y$.

1809. $z = e^{\operatorname{sen}\frac{y}{x}}$.

1810. $z = \operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$.

1811. $z = \ln \operatorname{sen}\frac{x + a}{\sqrt{y}}$.

1812. $u = (xy)^z$.

1813. $u = z^{xy}$.

1814. Achar $f'_x(2; 1)$ e $f'_y(2; 1)$, se $f(x, y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$.

1815. Achar $f'_x(1; 2; 0)$, $f'_y(1; 2; 0)$, $f'_z(1; 2; 0)$, se

$$f(x, y, z) = \ln(xy + z).$$

Comprovar o teorema de Euler sobre as funções homogêneas (Nos. **1816—1819**).

1816. $f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$. **1817.** $z = \frac{x}{x^2 + y^2}$.

1818. $f(x, y) = \frac{x + y}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}}$. **1819.** $f(x, y) = \ln \frac{y}{x}$.

1820. Achar $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)$, onde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1821. Calcular $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$, se $x = r\cos\varphi$ e $y = r \operatorname{sen} \varphi$.

1822. Demonstrar que $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2$, se

$$z = \ln(x^2 + xy + y^2).$$

1823. Demonstrar que $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$, se

$$z = xy + xe^{\frac{y}{x}}.$$

1824. Demonstrar que $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, se

$$u = (x - y)(y - z)(z - x).$$

1825. Demonstrar que $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 1$, se

$$u = x + \frac{x - y}{y - z}.$$

1826. Achar $z = z(x, y)$, se

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

1827. Achar $z = z(x, y)$, sabendo que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2}{x} \text{ e } z(x, y) = \operatorname{sen} y, \text{ quando } x = 1.$$

1828. Pelo ponto $M(1; 2; 6)$ da superfície $z = 2x^2 + y^2$ passaram planos paralelos aos planos de coordenadas XOZ e YOZ. Determinar que ângulos formam com os eixos das coordenadas as tangentes às seções, assim obtidas, em seu ponto comum M.

1829. A área de um trapézio de bases a, b e de altura h é igual a $S = \frac{1}{2}(a + b)h$. Achar $\frac{\partial S}{\partial a}$, $\frac{\partial S}{\partial b}$, $\frac{\partial S}{\partial h}$ e, utilizando o desenho, esclarecer seu sentido geométrico.

1830*. Demonstrar que a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{se } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = y = 0, \end{cases}$$

tem derivadas parciais $f'_x(x, y)$ e $f'_y(x, y)$ no ponto (0; 0), apesar de ser descontínua neste ponto. Representar geometricamente esta função nas proximidades do ponto (0; 0).

§ 4. Diferencial total da função

1°. Acréscimo total de uma função. Chama-se *acréscimo total* da função $z = f(x, y)$ à diferença

$$\Delta z = \Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

2°. Diferencial total de uma função. Recebe o nome de ***diferencial total (ou exata)*** de uma função $z = f(x, y)$ no ponto (x,y) a parte principal do acréscimo total Δz, quando $\Delta x \to 0$ e $\Delta y \to 0$, linear em relação aos acréscimos dos argumentos Δx e Δy.

A diferença entre o acréscimo total e a diferencial total da função é um infinitésimo de ordem superior a $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

A função tem, indubitavelmente, diferencial total, quando suas diferenciais parciais são contínuas. Se a função tem diferencial total, chama-se *diferenciável*. As diferenciais das variáveis independentes, por definição, coincidem com seus acréscimos, isto é, $dx = \Delta x$ e $dy = \Delta y$. A diferencial total da função $z = f(x, y)$ é calculada pela fórmula:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Por analogia, a diferencial total de uma função de três argumentos $u = f(x, y, z)$ é calculada pela fórmula

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Exemplo 1. Achar para a função

$$f(x, y) = x^2 + xy - y^2$$

o acréscimo total e a diferencial total.

Solução. $f(x + \Delta x, y + \Delta y) = (x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)(y + \Delta y) - (y + \Delta y)^2$;

$$\Delta f(x, y) = [(x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)(y + \Delta y) - (y + \Delta y)^2] - (x^2 + xy - y^2) =$$
$$= 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2 + x \cdot \Delta y + y \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Delta y - 2y \cdot \Delta y - \Delta y^2 =$$
$$= [(2x + y)\Delta x + (x - 2y)\Delta y] + (\Delta x^2 + \Delta x \cdot \Delta y - \Delta y^2).$$

Assim, a expressão $df = (2x + y)\Delta x + (x - 2y)\Delta y$ é a diferencial total, enquanto que $(\Delta x^2 + \Delta x \cdot \Delta y - \Delta y^2)$ é um infinitésimo de ordem superior em comparação com o infinitésimo $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Exemplo 2. Achar a diferencial total da função

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Solução.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$dz=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy=\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3°. **Aplicação da diferencial total da função nos cálculos aproximados.** Quando $|\Delta x|$ e $|\Delta y|$ são suficientemente pequenos e, portanto, é também suficientemente pequeno $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$, para a função diferenciável $z=f(x,y)$ no ponto (x, y) se verifica a igualdade aproximada $\Delta z\approx dz$, isto é,

$$\Delta z\approx\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

Exemplo 3. A altura de um cone é $H=30$ cm, o raio de sua base $R=10$ cm. Como variará o volume deste cone se H aumentar em 3 mm e R diminuir em 1 mm?

Solução. O volume do cone é $V=\frac{1}{3}\pi R^2H$. Substituimos a variação do volume aproximadamente pela diferencial

$$\Delta V\approx dV=\frac{1}{3}\pi(2RH\,dR+R^2dH)=$$

$$=\frac{1}{3}\pi(-2\cdot 10\cdot 30\cdot 0{,}1+100\cdot 0{,}3)=-10\pi\approx-31{,}4\text{ cm}^3.$$

Exemplo 4. Calcular aproximadamente $1{,}02^{3{,}01}$.

Solução. Examinemos a função $z=x^y$. O número procurado pode ser considerado como o valor acrescentado desta função quando $x=1$, $y=3$, $\Delta x=0{,}02$, $\Delta y=0{,}01$. O valor inicial da função é $z=1^3=1$,

$$\Delta z\approx dz=yx^{y-1}\Delta x+x^y\ln x\Delta y=3\cdot 1\cdot 0{,}02+1\cdot\ln 1\cdot 0{,}01=0{,}06.$$

Portanto, $1{,}02^{3{,}01}\approx 1+0{,}06=1{,}06$.

1831. Achar para a função $f(x, y)=x^2y$ o acréscimo total e a diferencial total no ponto $(1; 2)$; compará-las entre si, se:

a) $\Delta x=1$, $\Delta y=2$; b) $\Delta x=0{,}1$; $\Delta y=0{,}2$.

1832. Demonstrar que para as funções u e v de várias (por exemplo, de duas) variáveis são válidas as regras ordinárias de derivação:

a) $d(u+v)=du+dv$; b) $d(uv)=v\,du+u\,dv$;

c) $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}$.

Achar as diferenciais totais das seguintes funções:

1833. $z=x^3+y^3-3xy$.

1834. $z=x^2y^3$.

1835. $z=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

1836. $z=\text{sen}^2\,x+\cos^2 y$.

1837. $z=yx^y$.

1838. $z=\ln(x^2+y^2)$.

1839. $f(x, y)=\ln\left(1+\frac{x}{y}\right)$.

1840. $z=\text{arctg}\,\frac{y}{x}+\text{arctg}\,\frac{x}{y}$.

1841. $z = \ln \operatorname{tg} \frac{y}{x}$.

1842. Achar $df(1; 1)$, se $f(x, y) = \frac{x}{y^2}$.

1843. $u = xyz$.

1844. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1845. $u = \left(xy + \frac{x}{y}\right)^z$.

1846. $u = \operatorname{arctg} \frac{xy}{z^2}$.

1847. Achar $df(3; 4; 5)$, se $f(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

1848. Um dos lados de um retângulo é $a = 10$ cm, o outro, $b = 24$ cm. Como variará a diagonal l deste retângulo, se o lado a aumentar em 4 mm e o lado b diminuir em 1 mm? Achar a grandeza aproximada da variação e compará-la com a exata.

1849. Uma caixa fechada com dimensões exteriores de 10 cm, 8 cm e 6 cm é feita de madeira compensada de 2 mm de espessura. Determinar o volume aproximado do material gasto para se fazer a caixa.

1850*. O ângulo central de um setor circular é igual a 80° e deve-se diminuí-lo em 1°. Em quanto se tem de alongar o raio do setor para que sua área não varie, se seu comprimento inicial era igual a 20 cm?

1851. Calcular aproximadamente:

a) $(1{,}02)^3 \cdot (0{,}97)^2$; b) $\sqrt{(4{,}05)^2 + (2{,}93)^2}$;

c) sen 32° · cos 59° (ao converter os graus em radianos e ao calcular o seno 60°, tomar somente três cifras decimais; a última cifra deve ser arredondada).

1852. Demonstrar que o erro relativo de um produto é aproximadamente igual à soma dos erros relativos dos fatores.

1853. Ao medir-se na terra o triângulo ABC, obteve-se: lado $a = 100$ m $\pm$ 2 m, lado $b = 200$ m $\pm$ 3 m e o ângulo $C = 60° \pm 1°$. Com que grau de exatidão pode-se calcular o lado c?

1854. O período T de oscilação do pêndulo se calcula pela fórmula

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

onde l é o comprimento do pêndulo e g, a aceleração da gravidade. Achar o erro que se comete ao determinar T, como resultado dos pequenos erros $\Delta l = \alpha$ e $\Delta g = \beta$, cometidos ao medir-se l e g.

1855. A distância entre os pontos $P_0(x_0; y_0)$ e $P(x; y)$ é igual a ρ e o ângulo formado pelo vetor $\overline{P_0P}$ com o eixo OX é igual a α. Em quanto variará o ângulo α, se o ponto P toma a posição $P_1(x + dx, y + dy)$, enquanto que o ponto P_0 continua invariável?

§ 5. Derivação de funções compostas

1°. **Caso de uma só variável independente.** Se $z = f(x, y)$ é uma função diferenciável dos argumentos x e y, que são, por sua vez, funções diferenciáveis de uma variável independente t:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

a derivada da função composta $z = f[\varphi(t), \psi(t)]$ pode ser calculada pela fórmula:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{1}$$

No caso particular em que t coincide com um dos argumentos, por exemplo com x, a derivada "total" da função z em relação a x, será:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}. \tag{2}$$

Exemplo 1. Achar $\frac{dz}{dt}$, se

$$z = e^{3x+2y}, \text{ onde } x = \cos t, \ y = t^2.$$

Solução. Pela fórmula (1), teremos

$$\frac{dz}{dt} = e^{3x+2y}\cdot 3(-\operatorname{sen} t) + e^{3x+2y}\cdot 2\cdot 2t =$$

$$= e^{3x+2y}(4t - 3\operatorname{sen} t) = e^{3\cos t+2t^2}(4t - 3\operatorname{sen} t).$$

Exemplo 2. Achar a derivada parcial $\frac{\partial z}{\partial x}$ e a derivada total $\frac{dz}{dx}$, se

$$z = e^{xy}, \text{ onde } y = \varphi(x).$$

Solução. $\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}$. Baseando-se na fórmula (2), teremos:

$$\frac{dz}{dx} = ye^{xy} + xe^{xy}\varphi'(x).$$

2°. **Caso de diversas variáveis independentes.** Se z é uma função composta de diversas variáveis independentes, por exemplo, $z = f(x, y)$, onde $x = \varphi(u, v)$ e $y = \psi(u,v)$ (u e v são variáveis independentes; f, φ e ψ são funções diferenciáveis), as derivadas parciais de z em relação a u e v são expressas da seguinte maneira:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \tag{3}$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{4}$$

Em todos os casos examinados é válida a fórmula

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

(propriedade de invariância da diferencial total.)

Exemplo 3. Achar $\frac{\partial z}{\partial u}$ e $\frac{\partial z}{\partial v}$, se

$$z = f(x, y), \text{ onde } x = uv, \ y = \frac{u}{v}.$$

Solução. Aplicando as fórmulas (3) e (4), teremos:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = f'_x(x, y)\, v + f'_y(x, y)\, \frac{1}{v}$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial v} = f'_x(x, y)\, u - f'_y(x, y)\, \frac{u}{v^2}.$$

Exemplo 4. Demonstrar que a função $z = \varphi(x^2 + y^2)$ (φ é diferenciável) satisfaz a equação $y\, \frac{\partial z}{\partial x} - x\, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Solução. A função φ depende de x e y através do argumento intermédio $x^2 + y^2 = t$, por isso

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{dt}\, \frac{\partial t}{\partial x} = \varphi'(x^2 + y^2)\, 2x$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{dt}\, \frac{\partial t}{\partial y} = \varphi'(x^2 + y^2)\, 2y.$$

Colocando no primeiro membro da equação as derivadas parciais, teremos:

$$y\, \frac{\partial z}{\partial x} - x\, \frac{\partial z}{\partial y} = y\varphi'(x^2 + y^2)\, 2x - x\varphi'(x^2 + y^2)\, 2y =$$
$$= 2xy\varphi'(x^2 + y^2) - 2xy\varphi'(x^2 + y^2) \equiv 0,$$

isto é, a função z satisfaz a equação dada.

Nos exemplos de diferenciação formal deste capítulo sem anotações especiais supõe-se que estão aseguradas as condições de regularidade para as funções examinadas.

1856. Achar $\frac{dz}{dt}$, se

$$z = \frac{x}{y}, \text{ onde } x = e^t, \ y = \ln t.$$

1857. Achar $\frac{du}{dt}$, se

$$u = \ln \operatorname{sen} \frac{x}{\sqrt{y}}, \text{ onde } x = 3t^2, \ y = \sqrt{t^2 + 1}.$$

1858. Achar $\frac{du}{dt}$, se

$$u = xyz, \text{ onde } x = t^2 + 1, \ y = \ln t, \ z = \operatorname{tg} t.$$

1859. Achar $\frac{du}{dt}$, se

$$u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ onde } x = R \cos t, \ y = R \operatorname{sen} t, \ z = H.$$

1860. Achar $\frac{dz}{dx}$, se

$$z = u^v, \text{ onde } u = \operatorname{sen} x,\ v = \cos x.$$

1861. Achar $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{dz}{dx}$, se

$$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \text{ e } y = x^2.$$

1862. Achar $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{dz}{dx}$, se

$$z = x^y, \text{ onde } y = \varphi(x).$$

1863. Achar $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$, se

$$z = f(u, v), \text{ onde } u = x^2 - y^2,\ v = e^{xy}.$$

1864. Achar $\frac{\partial z}{\partial u}$ e $\frac{\partial z}{\partial v}$, se

$$z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, \text{ onde } x = u \operatorname{sen} v,\ y = u \cos v.$$

1865. Achar $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$, se

$$z = f(u), \text{ onde } u = xy + \frac{y}{x}.$$

1866. Demonstrar que se

$$u = \Phi(x^2 + y^2 + z^2),$$

onde $x = R \cos \varphi \cos \psi$, $y = R \cos \varphi \operatorname{sen} \psi$, $z = R \operatorname{sen} \varphi$, então

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0 \text{ e } \frac{\partial u}{\partial \psi} = 0.$$

1867. Achar $\frac{du}{dx}$, se

$$u = f(x, y, z),$$

onde $y = \varphi(x)$, $z + \psi(x, y)$.

1868. Demonstrar que se

$$z = f(x + ay),$$

onde f é uma função diferenciável, então,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = a \frac{\partial z}{\partial x}.$$

1869. Demonstrar que a função

$$w = f(u, v),$$

onde $u = x + at$, $v = y + bt$, satisfaz a equação

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y}.$$

1870. Demonstrar que a função

$$z = y\varphi(x^2 - y^2)$$

satisfaz a equação

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

1871. Demonstrar que a função

$$z = xy + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

satisfaz a equação

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

1872. Demonstrar que a função

$$z = e^y\varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$$

satisfaz a equação

$$(x^2 - y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = xyz.$$

1873. Um lado de um retângulo $x = 20$ m aumenta com uma velocidade de 5 m/s, o outro lado $y = 30$ m diminue com uma velocidade de 4 m/s. Com que velocidade variarão o perímetro e a área deste retângulo?

1874. As equações do movimento de um ponto material são

$$x = t,\ y = t^2,\ z = t^3.$$

Com que velocidade aumentará a distância deste ponto até a origem das coordenadas?

1875. Dois barcos que sairam ao mesmo tempo do ponto A vão, um rumo ao norte e o outro rumo ao nordeste. As velocidades respectivas dos barcos são: 20 km/h e 40 km/h. Com que velocidade aumenta a distância entre eles?

§ 6. Derivada em uma direção dada e gradiente da função

1°. **Derivada de uma função em uma direção dada.** Dá-se o nome de *derivada* de uma função $z = f(x, y)$ no ponto P *em uma direção dada* $l = \overrightarrow{PP_1}$ á expressão

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{P_1P \to 0}\frac{f(P_1) - f(P)}{P_1P},$$

onde $f(P)$ e $f(P_1)$ são os valores da função nos pontos P e P_1. Se a função é diferenciável, então é válida a fórmula

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \operatorname{sen} \alpha, \tag{1}$$

onde α é o ângulo formado pelo vetor l com o eixo OX (fig. 67).

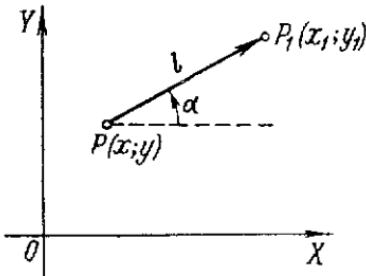



FIG. 67

Por analogia se determina a derivada em uma direção dada l para uma função de três argumentos $u = f(x, y, z)$. Neste caso

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma, \tag{2}$$

onde α, β, γ são os ângulos entre a direção l e os eixos correspondentes das coordenadas. A derivada em uma direção dada caracteriza a velocidade com que varia a função nesta direção.

Exemplo 1. Achar a derivada da função $z = 2x^2 - 3y^2$ no ponto $P(1; 0)$, na direção que forma com o eixo OX um ângulo de 120°.

Solução. Achamos as derivadas parciais da função dada e seus valores no ponto P:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x; \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = 4;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -6y; \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = 0.$$

Sendo

$$\cos \alpha = \cos 120° = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Aplicando a fórmula (1), teremos:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = 4\left(-\frac{1}{2}\right) + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -2.$$

O sinal negativo indica que a função neste ponto e na direção dada, decresce.

2°. **Gradiente de uma função.** Chama-se *gradiente* de uma função derivada $z = f(x, y)$ no ponto (x, y), um vetor, cujas projeções sobre os eixos das coordenadas, são as correspondentes derivadas parciais desta função:

$$\operatorname{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \boldsymbol{j}. \tag{3}$$

A derivada da função dada na direção l está relacionada com o gradiente da mesma pela seguinte fórmula:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \text{der}\, l \, \text{grad}\, z,$$

isto é, a derivada nesta direção é igual à projeção do gradiente da função sobre a direção em que se deriva. O gradiente da função em cada ponto, onde este diferencia-se do zero, tem a direção da normal à correspondente linha de nível da função. A direção do gradiente da função em um ponto dado é a direção da velocidade máxima de crescimento da função neste ponto, isto é, quando $\boldsymbol{l} = \text{grad}\ z$ a derivada $\frac{\partial z}{\partial l}$ toma seu valor máximo, igual a

$$\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Por analogia se determina o gradiente de uma função de três variáveis $u = f(x, y, z)$:

$$\text{grad}\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{4}$$

O gradiente de uma função de três variáveis em cada ponto, onde este diferencia-se do zero, tem a direção da normal à superfície de nível que passa por este ponto.

Exemplo 2. Achar e construir o gradiente da função $z = x^2y$ no ponto $P(1;1)$.

Solução. Calculamos as derivadas parciais e seus valores no ponto P:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\,xy; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = 2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = 1.$$

Portanto, o grad $z = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ (fig. 68).

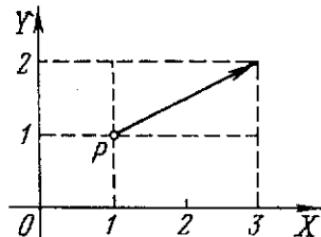



FIG. 68

1876. Achar a derivada da função $z = x^2 - xy - 2\,y^2$ no ponto $P(1;\ 2)$ na direção que forma com o eixo OX um ângulo de 60°.

1877. Achar a derivada da função $z = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$ no ponto $M(1;\ 2)$ na direção que vai deste ao ponto $N(4;\ 6)$.

1878. Achar a derivada da função $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ no ponto $P(1;\ 1)$ na direção da bissetriz do primeiro ângulo coordenado.

1879. Achar a derivada da função $u = x^2 - 3yz + 5$ no ponto $M(1;\ 2;\ -1)$ na direção que forma ângulos iguais com todos os eixos das coordenadas.

1880. Achar a derivada da função $u = xy + yz + zx$ no ponto $M(2;\ 1;\ 3)$ na direção que vai deste ao ponto $N(5;\ 5;\ 15)$.

1881. Achar a derivada da função $u = \ln(e^x + e^y + e^z)$ no início das coordenadas, na direção que forma com os eixos das coordenadas OX, OY e OZ os ângulos α, β e γ, respectivamente.

1882. O ponto em que a derivada de uma função, em qualquer direção, é igual a zero, se chama *ponto estacionário* desta função. Achar os pontos estacionários das seguintes funções:

a) $z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$;

b) $z = x^3 + y^3 - 3xy$;

c) $u = 2y^2 + z^2 - xy - yz + 2x$.

1883. Demonstrar que a derivada da função $z = \frac{y^2}{x}$, tomada em qualquer ponto da elipse $2x^2 + y^2 = C^2$ ao longo da normal à mesma, é igual a zero.

1884. Achar o grad z no ponto $(2; 1)$, se

$$z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

1885. Achar o grad z no ponto $(5; 3)$, se

$$z = \sqrt{x^2 - y^2}.$$

1886. Achar o grad u no ponto $(1; 2; 3)$, se $u = xyz$.

1887. Achar a grandeza e a direção do grad u no ponto $(2; -2; 1)$, se

$$u = x^2 + y^2 + z^2.$$

1888. Achar o ângulo entre os gradientes da função $z = \ln\frac{y}{x}$ nos pontos $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ e $B(1; 1)$.

1889. Achar a grandeza da elevação máxima da superfície

$$z = x^2 + 4y^2$$

no ponto $(2; 1; 8)$.

1890. Construir o campo vetorial do gradiente das seguintes funções:

a) $z = x + y$; b) $z = xy$; c) $z = x^2 + y^2$;

d) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

§ 7. Derivadas e diferenciais de ordens superiores

1°. Derivadas parciais de ordens superiores. Chamam-se *derivadas parciais de segunda ordem* de uma função $z = f(x, y))$ às derivadas parciais de suas derivadas parciais de primeira ordem.

Para designar as derivadas de segunda ordem se empregam as seguintes anotações:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y), \text{ etc.}$$

Por analogia se determinam e se designam as derivadas parciais de ordem superior à segunda.

Se as derivadas parciais a serem calculadas são contínuas, o *resultado da derivação múltipla não depende da ordem desta derivação.*

Exemplo 1. Achar as derivadas parciais de segunda ordem da função

$$z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$$

Solução. Achamos inicialmente as derivadas de primeira ordem:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \left(- \frac{x}{y^2} \right) = - \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Tornamos a derivar:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(- \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - 2y \cdot y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Verificamos de que a chamada derivada parcial "mista" pode ser encontrada de outra maneira, ou seja:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(- \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = - \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - 2x \cdot x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

2°. **Diferenciais de ordens superiores.** Recebe o nome de *diferencial de segunda ordem* de uma função $z = f(x, y)$ a diferencial da diferencial de primeira ordem desta função quando as variáveis independentes têm os incrementos fixos:

$$d^2 z = d(dz).$$

Por analogia, se determinam as diferenciais da função z de ordem súperior à segunda, por exemplo

$$d^3 z = d(d^2 z)$$

e, em geral,

$$d^n z = d(d^{n-1} z) \ (\mathrm{n} = 2, 3, \ldots).$$

Se $z = f(x, y)$, onde x e y são variáveis independentes e a função f tem derivadas parciais contínuas de segundo grau, a diferencial de 2a. ordem da função z é calculada pela fórmula

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \tag{1}$$

Em geral, quando existem as derivadas contínuas correspondentes, é válida a fórmula simbólica

$$d^n z = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^n z,$$

que, formalmente, se desenvolve segundo a lei binomial.

Se $z = f(x, y)$, onde os argumentos x e y são, por sua vez, funções de uma ou mais variáveis independentes, teremos

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial^2 y} dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x} d^2x + \frac{\partial z}{\partial y} d^2y. \quad (2)$$

Se x e y são variáveis independentes, então $d^2x = 0$, $d^2y = 0$ e a fórmula (2) torna-se equivalente à fórmula (1).

Exemplo 2. Achar as diferenciais totais de 1a. e 2a. ordem de função

$$z = 2x^2 - 3xy - y^2.$$

Solução. *1° método*. Temos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -3x - 2y.$$

Por isso,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (4x - 3y)\, dx - (3x + 2y)\, dy.$$

A seguir

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2,$$

donde se deduz, que

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 = 4dx^2 - 6dx\, dy - 2dy^2.$$

2° método. Diferenciando, achamos:

$$dz = 4x\, dx - 3(y\, dx + x\, dy) - 2y\, dy = (4x - 3y)\, dx - (3x + 2y)\, dy.$$

Voltando a diferenciar e lembrando-se que dx e dy não dependem de x e y, obtemos:

$$d^2z = (4dx - 3dy)\, dx - (3dx + 2dy)\, dy = 4dx^2 - 6dx\, dy - 2dy^2.$$

1891. Achar $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, se

$$z = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}.$$

1892. Achar $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, se

$$z = \ln(x^2 + y).$$

1893. Achar $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, se

$$z = \sqrt{2xy + y^2}.$$

1894. Achar $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, se

$$z = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{1-xy}.$$

1895. Achar $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$, se

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

1896. Achar todas as derivadas parciais de 2a. ordem da função

$$u = xy + yz + zx.$$

1897. Achar $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, se

$$u = x^\alpha y^\beta z^\gamma.$$

1898. Achar $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, se

$$z = \text{sen}\,(xy).$$

1899. Achar $f''_{xx}(0,\ 0)$, $f''_{xy}(0,\ 0)$, $f''_{yy}(0,\ 0)$, se

$$f(x,\ y) = (1 + x)^m\,(1 + y)^n.$$

1900. Demonstrar que $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, se

$$z = \text{arcsen}\sqrt{\frac{x - y}{x}}.$$

1901. Demonstrar que $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, se

$$z = x^y.$$

1902*. Demonstrar que para a função

$$f(x,\ y) = xy\,\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

com a condição complementar de $f(0,\ 0) = 0$, teremos

$$f''_{xy}(0,\ 0) = -1,\quad f''_{yx}(0,\ 0) = +1.$$

1903. Achar $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, se

$$z = f(u,\ v),$$

onde $u = x^2 + y^2$, $v = xy$.

1904. Achar $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, se

$$u = f(x,\ y,\ z),$$

onde $z = \varphi(x,\ y)$.

1905. Achar $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, se

$$z = f(u,\ v),$$

onde $u = \varphi(x,\ y)$ e $v = \psi(x,\ y)$.

1906. Demonstrar que a função

$$u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

satisfaz a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

1907. Demonstrar que a função

$$u = \ln \frac{1}{r},$$

onde $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, satisfaz a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

1908. Demonstrar que a função

$$u(x, t) = A \operatorname{sen} (a\lambda t + \varphi) \operatorname{sen} \lambda x$$

satisfaz a equação das vibrações da corda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

1909. Demonstrar que a função

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} e^{-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}{4a^2 t}}$$

(x_0, y_0, z_0, a são constantes) satisfaz a equação da condutibilidade calorífica. $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$.

1910. Demonstrar que a função $u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$, onde φ e ψ são funções quaisquer, diferenciáveis duas vezes, satisfaz a equação das vibrações da corda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

1911. Demonstrar que a função

$$z = x\varphi \left(\frac{y}{x} \right) + \psi \left(\frac{y}{x} \right)$$

satisfaz a equação

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

1912. Demonstrar que a função

$$u = \varphi(x, y) + \sqrt{xy}\, \psi \left(\frac{y}{x} \right)$$

satisfaz a equação

$$x^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

1913. Demonstrar que a função $z = f[x + \varphi(y)]$ satisfaz a equação

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

1914. Achar $u = u(x, y)$, se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$$

1915. Determinar a forma da função $u = u(x, y)$, que satisfaz a equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

1916. Achar d^2z, se

$$z = e^{xy}.$$

1917. Achar d^2u, se

$$u = xyz.$$

1918. Achar d^2z, se

$$z = \varphi(t), \text{ onde } t = x^2 + y^2.$$

1919. Achar dz e d^2z, se

$$z = u^v, \text{ onde } \frac{x}{y}, \; v = xy.$$

1920. Achar d^2z, se

$$z = f(u, v), \text{ onde } u = ax, \; v = by.$$

1921. Achar d^2z, se

$$z = f(u, v), \text{ onde } u = xe^y, \; v = ye^x.$$

1922. Achar d^3z, se

$$z = e^x \cos y.$$

1923. Achar a diferencial de 3a. ordem da função

$$z = x \cos y + y \operatorname{sen} x,$$

e determinar todas as derivadas parciais de 3a. ordem.

1924. Achar $df(1, 2)$ e $d^2f(1, 2)$, se

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y.$$

1925. Achar $d^2f(0, 0, 0)$, se

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 4xz + 2yz.$$

§ 8. Integração de diferenciais exatas

1°. **Condição de diferencial exata.** Para que a expressão $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$, em que as funções $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ são contínuas em um campo simplesmente conexo D, juntamente com suas derivadas parciais de primeira ordem, represente, no campo D, a diferencial exata de uma função determinada $u(x, y)$, é necessário e suficiente que se cumpra a condição

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Exemplo 1. Certificar-se de que a expressão

$$(2x + y)\,dx + (x + 2y)\,dy$$

é a diferencial exata de uma função determinada e achar esta função.

Solução. Neste caso $P = 2x + y$, $Q = x + 2y$. Por isso $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$ e, portanto,

$$(2x + y)\,dx + (x + 2y)\,dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy,$$

onde u é a função procurada.

De acordo com a condição $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2x + y$ obtemos

$$u = \int (2x + y)\,dx = x^2 + xy + \varphi(y).$$

Mas, de outra parte, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x + \varphi'(y) = x + 2y$, donde $\varphi'(y) = 2y$, $\varphi(y) = y^2 + C$ e

$$u = x^2 + xy + y^2 + C.$$

Finalmente,

$$(2x + y)\,dx + (x + 2y)\,dy = d(x^2 + xy + y^2 + C).$$

2°. **Caso de três variáveis.** Analogamente, a expressão

$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz,$$

em que $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ e $R(x, y, z)$, junto com suas derivadas de 1a. ordem são funções contínuas das variáveis x, y, z, representa a diferencial exata de uma função determinada $u(x, y, z)$, em um campo simplesmente conexo D do espaço, quando, e somente quando, em D é válida a condição

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} \equiv \frac{\partial R}{\partial x}.$$

Exemplo 2. Certificar-se de que a expressão

$$(3x^2 + 3y - 1)\,dx + (z^2 + 3x)\,dy + (2yz + 1)\,dz$$

é a diferencial exata de uma função e achar esta função.

Solução. Temos $P = 3x^2 + 3y - 1$, $Q = z^2 + 3x$, $R = 2yz + 1$. Estabelecemos que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 3, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = 2z, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 0$$

e, portanto,

$$(3x^2 + 3y - 1)\,dx + (z^2 + 3x)\,dy + (2yz + 1)\,dz = du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz,$$

onde u é a função procurada.

Temos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 3y - 1,$$

isto é,

$$u = \int (3x^2 + 3y - 1)\, dx = x^3 + 3xy - x + \varphi(y, z).$$

De outra parte,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = z^2 + 3x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2yz + 1,$$

donde $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = z^2$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2yz + 1$. O problema se reduz a procurar uma função de duas variáveis $\varphi(y, z)$, cujas derivadas parciais são conhecidas, tendo-se cumprida a condição de diferencial exata.

Achamos φ:

$$\varphi(y, z) = \int z^2 dy = yz^2 + \psi(z),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\varphi z} = 2yz + \psi'(z) = 2yz + 1,$$

$$\psi'(z) = 1, \ \psi(z) = z + C,$$

isto é, $\varphi(y, z) = yz^2 + z + C$. E, finalmente, obtemos:

$$u = x^3 + 3xy - x + yz^2 + z + C.$$

Depois de comprovar que as expressões abaixo citadas são diferenciais exatas de certas funções, achar estas funções:

1926. $y\,dx + x\,dy.$ **1927.** $(\cos x + 3\,x^2 y)\,dx + (x^3 - y^2)\,dy.$

1928. $\frac{(x + 2y)\,dx + y\,dy}{(x + y)^2}.$ **1929.** $\frac{x + 2y}{x^2 + y^2}\,dx - \frac{2x - y}{x^2 - y^2}\,dy.$

1930. $\frac{1}{y}\,dx - \frac{x}{y^2}\,dy.$ **1931.** $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dy.$

1932. Determinar as constantes a e b de tal forma, que a expressão

$$\frac{(ax + 2xy + y^2)\,dx - (x^2 + 2xy + by^2)\,dy}{(x^2 + y^2)^2}$$

seja a diferencial exata de uma função z e achar esta última.

Depois de certificar-se de que as expressões abaixo citadas são as diferenciais exatas de certas funções, achar estas funções.

1933. $(2x + y + z)\,dx + (x + 2y + z)\,dy + (x + y + 2z)\,dz.$

1934. $(3x^2 + 2y^2 + 3z)\,dx + (4xy + 2y - z)\,dy + (3x - y - 2)\,dz.$

1935. $(2xyz - 3y^2 z + 8xy^2 + 2)\,dx +$
$+ (x^2 z - 6xyz + 8x^2 y + 1)\,dy + (x^2 y - 3xy^2 + 3)\,dz.$

1936. $\left(\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}\right) dx + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right) dy + \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}\right) dz.$

1937. $\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$

1938*. São dadas as projeções de uma força sobre o eixo das coordenadas:

$$X = \frac{y}{(x+y)^2}, \quad Y = \frac{\lambda x}{(x+y)^2},$$

onde λ é uma grandeza constante. Qual deve ser o coeficiente λ para que a força tenha potencial?

1939. Que condição deve satisfazer a função diferenciável $f(x, y)$ para que a expressão

$$f(x, y)\,(dx + dy)$$

seja uma diferencial exata?

1940. Achar a função u, se $f(x)$ é contínua e $du = f(xy)\,(y\,dx + x\,dy)$.

§ 9. Derivação de funções implícitas

1°. **Caso de uma variável independente.** Se uma equação $f(x, y) = 0$, onde $f(x, y)$ é uma função diferenciável das variáveis x e y, determina a y como função diferenciável de x, então a derivada desta função dada em forma implícita, sempre que $f'_y(x, y) \neq 0$, pode ser encontrada pela fórmula

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}. \tag{1}$$

As derivadas de ordens superiores são encontradas por derivação sucessiva da fórmula (1).

Exemplo 1. Achar $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$, se

$$(x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) + 1 = 0.$$

Solução. Designando o primeiro membro desta equação por $f(x, y)$, achamos as derivadas parciais

$$f'_x(x, y) = 3(x^2 + y^2)^2 \cdot 2x - 3 \cdot 2x = 6x[(x^2 + y^2)^2 - 1],$$

$$f'_y(x, y) = 3(x^2 + y^2)^2 \cdot 2y - 3 \cdot 2y = 6y[(x^2 + y^2)^2 - 1].$$

Donde, aplicando a fórmula (1), ter mos:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} = -\frac{6x[(x^2 + y^2)^2 - 1]}{6y[(x^2 + y^2)^2 - 1]} = -\frac{x}{y}.$$

Para achar a segunda derivada, derivamos em relação a x a primeira derivada por nós encontrada, tendo-se em consideração, ao fazê-lo, que y é função de x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{y}\right) = -\frac{1 \cdot y - x\frac{dy}{dx}}{y^2} = -\frac{y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3}.$$

2°. **Caso de diversas variáveis independentes.** Analogamente, se a equação $F(x,y,z) = 0$, onde $F(x, y, z)$ é uma função diferenciável das variáveis x, y e z, determina z como função diferenciável das variáveis independentes x e y, e $F'_z(x, y, z) \neq 0$, as derivadas parciais desta função dada de forma implícita podem ser achadas pelas fórmulas:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}. \tag{2}$$

Outro método para achar as derivadas da função z é o seguinte: diferenciando a equação $F(x, y, z) = 0$, obtemos:

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Donde pode-se determinar dz e, portanto, $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Exemplo 2. Achar $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$, se

$$x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0.$$

Solução. *1° método.* Designando o primeiro membro desta equação por meio de $F(x, y, z)$, achamos as derivadas parciais

$$F'_x(x, y, z) = 2x, \quad F'_y(x, y, z) = -4y - z + 1, \quad F'_z(x, y, z) = 6z - y.$$

Aplicando a fórmula (2), obtemos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = -\frac{2x}{6z - y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = -\frac{1 - 4y - z}{6z - y}.$$

2° método. Diferenciando a equação dada, temos:

$$2x\,dx - 4y\,dy + 6z\,dz - y\,dz - z\,dy + dy = 0.$$

Donde determinamos dz, isto é, a diferencial exata da função implícita:

$$dz = \frac{2x\,dx + (1 - 4y - z)\,dy}{y - 6z}.$$

Comparando com a fórmula $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$, vemos que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y - 6z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1 - 4y - z}{y - 6z}.$$

3°. **Sistema de funções implícitas.** Se o sistema de duas equações

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0, \end{cases}$$

onde F e G são diferenciáveis, determina u e v como funções diferenciáveis das variáveis x e y e o determinante de Jacob

$$\frac{D(F, G)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

então as diferenciais destas funções (e, portanto, suas derivadas parciais), podem ser encontradas do sistema das seguintes equações

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial F}{\partial y}\,dy + \dfrac{\partial F}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial F}{\partial v}\,dv = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial G}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial G}{\partial y}\,dy + \dfrac{\partial G}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial G}{\partial v}\,dv = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Exemplo 3. As equações

$$u + v = x + y, \ xu + yv = 1$$

determinam u e v como funções de x e y; achar $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

Solução. *1° método.* Derivando ambas as equações em relação a x, obtemos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 1,$$

$$u + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

donde

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u+y}{x-y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{u+x}{x-y}.$$

Analogamente, achamos:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{v+y}{x-y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v+x}{x-y}.$$

2° método. Por derivação achamos duas equações que relacionam entre si as quatro variáveis:

$$du + dv = dx + dy,$$

$$x\,du + u\,dx + y\,dv + v\,dy = 0.$$

Resolvendo este sistema em relação às diferenciais du e dv, obtemos:

$$du = -\frac{(u+y)\,dx + (v+y)\,dy}{x-y},$$

$$dv = \frac{(u+x)\,dx + (v+x)\,dy}{x-y}.$$

Donde

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u+y}{x-y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{v+y}{x-y},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{u+x}{x-y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v+x}{x-y}.$$

4°. **Funções dadas em forma paramétrica.** Se a função diferenciável z das variáveis x e y é dada em equações paramétricas

$$x = x(u, v), \ y = y(u, v), \ z = z(u, v),$$

onde x, y e z são diferenciáveis e

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

a diferencial desta função pode ser achada pelo sistema de equações

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial u}\, du + \frac{\partial x}{\partial v}\, dv, \\ dy = \frac{\partial y}{\partial u}\, du + \frac{\partial y}{\partial v}\, dv, \\ dz = \frac{\partial z}{\partial u}\, du + \frac{\partial z}{\partial v}\, dv. \end{cases} \tag{4}$$

Conhecendo-se a diferencial $dz = p\, dx + p\, dy$, achamos as derivadas parciais $\frac{\partial z}{\partial x} = p$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = q$.

Exemplo 4. A função z dos argumentos x e y é dada pelas equações

$$x = u + v,\ y = u^2 + v^2,\ z = u^3 + v^3\ (u \neq v).$$

Achar $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Solução. *1° método.* Por diferenciação achamos três equações que relacionam entre si as cinco variáveis:

$$\begin{cases} dx = du + dv, \\ dy = 2u\, du + 2v\, dv, \\ dz = 3u^2\, du + 3v^2\, dv. \end{cases}$$

Das duas primeiras equações determinamos du e dv:

$$du = \frac{2v\, dx - dy}{2(v-u)},\quad dv = \frac{dy - 2u\, dx}{2(v-u)}.$$

Substituimos na terceira equação as expressões assim determinadas de du e dv:

$$dz = 3u^2\, \frac{2v\, dx - dy}{2(v-u)} + 3v^2\, \frac{dy - 2u\, dx}{2(v-u)} =$$

$$= \frac{6uv(u-v)\, dx + 3(v^2 - u^2)\, dy}{2(v-u)} = -3uv\, dx + \frac{3}{2}(u+v)\, dy.$$

Daí

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -3uv,\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{2}(u+v).$$

2° método. Da terceira equação dada pode-se achar

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3u^2\, \frac{\partial u}{\partial x} + 3v^2\, \frac{\partial v}{\partial x};\quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3u^2\, \frac{\partial u}{\partial y} + 3v^2\, \frac{\partial v}{\partial y}. \tag{5}$$

Derivamos as duas primeiras equações, inicialmente em relação a x e depois em relação a y:

$$\begin{cases} 1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ 0 = 2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x}, \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}, \\ 1 = 2u\frac{\partial u}{\partial y} + 2v\frac{\partial v}{\partial y}. \end{cases}$$

Do primeiro sistema, encontramos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v}{v-u}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{u}{u-v}.$$

Do segundo sistema, encontramos:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2(u-v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2(v-u)}.$$

Colocando as expressões $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ na fórmula (5), obtemos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3u^2\frac{v}{v-u} + 3v^2\frac{u}{u-v} = -3uv,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3u^2\frac{1}{2(u-v)} + 3v^2\cdot\frac{1}{2(v-u)} = \frac{3}{2}(u+v).$$

1941. Seja y uma função de x, determinada pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Achar $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$.

1942. Seja y uma função determinada pela equação

$$x^2 + y^2 + 2axy = 0 \quad (a > 1).$$

Demonstrar que $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ e explicar o resultado obtido.

1943. Achar $\frac{\partial y}{\partial x}$, se $y = 1 + y^x$.

1944. Achar $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$, se $y = x + \ln y$.

1945. Achar $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1}$ e $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=1}$, se

$$x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0.$$

Utilizando os resultados obtidos, representar aproximadamente o gráfico dêste curva no entorno do ponto $x = 1$.

1946. A função y é determinada pela equação

$$\ln\sqrt{x^2+y^2} = a \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \quad (a \neq 0).$$

Achar $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$.

1947. Achar $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$, se

$$1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0.$$

1948. A função z das variáveis x e y é dada pela equação

$$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0.$$

Achar $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.

1949. Achar $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$, se

$$x\cos y + y\cos z + z\cos x = 1.$$

1950. A função z é dada pela equação

$$x^2 + y^2 - z^2 - xy = 0.$$

Achar $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ para o sistema de valores $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$.

1951. Achar $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, se $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

1952. $f(x, y, z) = 0$. Demonstrar que $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1$.

1953. $z = \varphi(x, y)$, onde y é função de x, determinada pela equação $\psi(x, y) = 0$. Achar $\frac{dz}{dx}$.

1954. Achar dz e d^2z, se

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

1955. Seja z uma função das variáveis x e y, determinada pela equação

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0.$$

Achar dz e d^2z para o sistema de valores $x = 2$, $y = 0$, $z = 1$.

1956. Achar dz e d^2z, se $\ln z = x + y + z - 1$. A que são iguais as derivadas primeira e segunda da função z?

1957. Seja a função diferenciável z determinada pela equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varphi(ax + by + cz),$$

onde φ é uma função qualquer diferenciável e a, b, c são constantes. Demonstrar que

$$(cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay.$$

1958. Demonstrar que a função z, determinada pela equação

$$F(x - az, \ y - bz) = 0,$$

onde F é uma função diferenciável qualquer de seus argumentos, satisfaz a equação.

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

1959. $F\left(\frac{x}{z}, \ \frac{y}{z}\right) = 0$. Demonstrar que $x \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = z$.

1960. Demonstrar que a função z, determinada pela equação $y = x\varphi(z) + \psi(z)$, satisfaz a equação,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

1961. As funções diferenciáveis y e z da variável independente x são dadas pelo sistema de equações $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$. Achar $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, quando $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$.

1962. As funções diferenciáveis y e z da variável independente x são dadas pelo sistema de equações

$$xyz = a, \ x + y + z = b.$$

Achar dy, dz, d^2y, d^2z.

1963. As funções diferenciáveis u e v das variáveis independentes x e y são dadas implicitamente pelo sistema de equações

$$u = x + y, \ uv = y.$$

Calcular

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \ \frac{\partial u}{\partial y}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \ \frac{\partial v}{\partial x}, \ \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

quando $x = 0$, $y = 1$.

1964. As funções diferenciáveis u e v das variáveis independentes x e y são dadas implicitamente pelo sistema de equações

$$x + v = x, \ u - yv = 0.$$

Achar du, dv, d^2u, d^2v.

1965. As funções diferenciáveis u e v das variáveis x e y são dadas implicitamente pelo sistema de equações

$$x = \varphi(u, \ v), \ y = \psi(u, \ v),$$

e $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \neq 0$.

Achar $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$.

1966. a) Achar $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$, se $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = cv$.

b) Achar $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$, se $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv$.

c) Achar dz, se $x = e^{u+v}$, $y = e^{u-v}$, $z = uv$.

1967. $z = F(r, \varphi)$, onde r e φ são funções das variáveis x e y, determinadas pelo sistema de equações

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \operatorname{sen} \varphi.$$

Achar $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.

1968. Considerando z como função de x e y, achar $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$, se

$$x = a \cos \varphi \cos \psi, \quad y = b \operatorname{sen} \varphi \cos \psi, \quad z = c \operatorname{sen} \psi.$$

§ 10. Troca de variáveis

Quando se trocam as variáveis nas expressões diferenciais, as derivadas que nelas entram devem ser expressas por meio de derivadas em relação às novas variáveis, aplicando-se a regra de diferenciação de funções compostas.

1°. **Troca de variáveis nas expressões que contém derivadas ordinárias.**

Exemplo 1. Transformar a equação

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} + \frac{a^2}{x^2} y = 0,$$

supondo $x = \frac{1}{t}$.

Solução. Expressamos as derivadas de y em relação a x por meio das derivadas de y em relação a t. Teremos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{d}}{-\frac{1}{t^2}} = -t^2 \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = -\left(2t \frac{dy}{dt} + t^2 \frac{d^2y}{dt^2}\right)(-t^2) = 2t^3 \frac{dy}{dt} + t^4 \frac{d^2y}{dt^2}.$$

Colocando as expressões das derivadas achadas na equação dada e trocando x por $\frac{1}{t}$, obtemos:

$$\frac{1}{t^2} \cdot t^3 \left(2 \frac{dy}{dt} + t \frac{d^2y}{dt^2}\right) + 2 \cdot \frac{1}{t} \left(-t^2 \frac{dy}{dt}\right) + a^2t^2y = 0$$

ou

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a^2y = 0.$$

Exemplo 2. Transformar a equação

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-\frac{dy}{dx}=0,$$

tomando y como argumento e x como função.

Solução. Expressamos as derivadas de y em relação a x por meio das derivadas de x em relação a y

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}\right)\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{d^2x}{dy^2}}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2}\cdot\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=-\frac{\dfrac{d^2x}{dy^2}}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3}.$$

Colocando estas expressões das derivadas na equação dada, teremos:

$$x\left[-\frac{\dfrac{d^2x}{dy^2}}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3}\right]+\frac{1}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3}-\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=0,$$

ou, finalmente,

$$x\frac{d^2x}{dy^2}-1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=0.$$

Exemplo 3. Transformar a equação

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y},$$

passando às coordenadas polares

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\operatorname{sen}\varphi. \tag{1}$$

Solução. Considerando r como função de φ, das fórmulas (1) obtemos:

$$dx=\cos\varphi\,dr-r\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi,\quad dy=\operatorname{sen}\varphi\,dr+r\cos\varphi\,d\varphi,$$

daí

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\operatorname{sen}\varphi\,dr+r\cos\varphi\,d\varphi}{\cos\varphi\,dr-r\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi}=\frac{\operatorname{sen}\varphi\dfrac{dr}{d\varphi}+r\cos\varphi}{\cos\varphi\dfrac{d}{d\varphi}-r\operatorname{sen}\varphi}.$$

Colocando as expressões de x, y e $\dfrac{dy}{dx}$ na equação dada, teremos:

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi\dfrac{dr}{d\varphi}+r\cos\varphi}{\cos\varphi\dfrac{dr}{d\varphi}-r\operatorname{sen}\varphi}=\frac{r\cos\varphi+r\operatorname{sen}\varphi}{r\cos\varphi-r\operatorname{sen}\varphi},$$

ou depois de simplificar,

$$\frac{dr}{d\varphi} = r.$$

2°. **Troca de variáveis nas expressões que contém derivadas parciais.**

Exemplo 4. Transformar a equação das vibrações da corda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (a \neq 0),$$

onde a função incógnita $u(x,t)$ é diferenciável duas vezes, em novas variáveis independentes α e β, onde $\alpha = x - at$, $\beta = x + at$.

Solução. Expressamos as derivadas parciais de u em relação a x e t por meio de derivadas parciais de u em relação a α e β. Aplicando as fórmulas de derivação de funções compostas:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial t}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x},$$

obtemos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}(-a) + \frac{\partial u}{\partial \beta}a = a\left(\frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{\partial u}{\partial \alpha}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\cdot 1 + \frac{\partial u}{\partial \beta}\cdot 1 = \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta}.$$

Voltamos a derivar, aplicando estas mesmas fórmulas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial \beta}{\partial t} =$$

$$= a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}\right)(-a) + a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}\right)a = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial \beta}{\partial x} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}\right)\cdot 1 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right)\cdot 1 = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}.$$

Colocando $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ na equação dada, teremos:

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right) = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right)$$

ou

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} = 0.$$

Exemplo 5. Transformar a equação $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} + z^2$, tomando como novas variáveis independentes $u = x$, $v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$ e como nova função $w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}$.

Solução. Expressamos as derivadas parciais $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ através das derivadas parciais $\frac{\partial w}{\partial u}$ e $\frac{\partial w}{\partial v}$. Para tanto, diferenciamos as relações dadas entre as variáveis antigas e as novas

$$du = dx,\ dv = \frac{dx}{x^2} - \frac{dy}{y^2},\quad dw = \frac{dx}{x^2} - \frac{dz}{z^2}.$$

De outro lado,

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u}\,du + \frac{\partial w}{\partial v}\,dv.$$

Por isso

$$\frac{\partial w}{\partial u}\,du + \frac{\partial w}{\partial v}\,dv = \frac{dx}{x^2} - \frac{dz}{z^2}$$

ou

$$\frac{\partial w}{\partial u}\,dx + \frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{dx}{x^2} - \frac{dy}{y^2}\right) = \frac{dx}{x^2} - \frac{dz}{z^2}.$$

Daí

$$dz = z^2\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\,\frac{\partial w}{\partial v}\right)dx + \frac{z^2\partial w}{y^2\partial v}\,dy$$

e, portanto,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z^2\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\,\frac{\partial w}{\partial v}\right)$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^2}{y^2}\,\frac{\partial w}{\partial v}.$$

Colocando estas expressões na equação dada, obtemos:

$$x^2z^2\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\,\frac{\partial w}{\partial v}\right) + z^2\,\frac{\partial w}{\partial v} = z^2$$

ou

$$\frac{\partial w}{\partial u} = 0.$$

1969. Transformar a equação

$$x^2\,\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\,\frac{dy}{dx} + y = 0,$$

fazendo $x = e^t$.

1970. Transformar a equação

$$(1 - x^2)\,\frac{d^2y}{dx^2} - x\,\frac{dy}{dx} = 0,$$

fazendo $x = \cos t$.

1971. Transformar as seguintes equações, tomando y como argumento:

a) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$,

b) $\frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3} - 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0$.

1972. A tangente do ângulo μ, formado pela tangente MT e o raio vetor OM do ponto de tangência (fig. 69), se expressa:

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{y' - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}y'}.$$

Transformar esta expressão, passando-se às coordenadas polares: $x = r\cos\varphi$, $y = r\operatorname{sen}\varphi$.

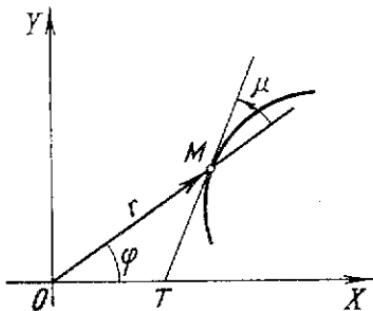



FIG. 69

1973. Expressar a fórmula da curvatura de uma linha

$$K = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/4}}$$

em coordenadas polares $x = r\cos\varphi$, $y = r\operatorname{sen}\varphi$.

1974. Transformar em novas variáveis independentes u e v a equação

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

se $u = x$, $v = x^2 + y^2$.

1975. Transformar em novas variáveis independentes u e v a equação

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z = 0,$$

se $u = x$, $v = \frac{y}{x}$.

1976. Transformar a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

em coordenadas polares r e φ, fazendo

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \operatorname{sen} \varphi.$$

1977. Transformar a equação

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

fazendo $u = xy$ e $v = \frac{x}{y}$.

1978. Transformar a equação

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = (y - x) z,$$

introduzindo as novas variáveis independentes

$$u = x^2 + y^2, \quad v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

e a nova função $w = \ln z - (x + y)$.

1979. Transformar a equação

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

tomando como novas as variáveis independentes $u = x + y$, $v = \frac{y}{x}$ e como nova a função $w = \frac{z}{x}$.

1980. Transformar a equação

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

fazendo $u = x + y$, $v = x - y$, $w = xy - z$, onde $w = w(u, v)$.

§ 11. Plano tangencial e normal à superfície

1°. **Equações do plano tangencial e da normal para o caso em que a superfície é dada de forma explícita.** Recebe o nome de *plano tangencial* à uma superfície no seu ponto M (ponto de contacto) o plano no qual estão situadas todas as tangentes no ponto M quanto às curvas regulares traçadas nesta superfície e que passam pelo ponto M.

Chama-se *normal* a uma superfície à reta perpendicular ao plano tangencial no ponto de contacto.

Se a equação da superfície é dada de forma explícita num sistema de coordenadas cartesianas, $z = f(x, y)$, onde $f(x, y)$ é uma função diferenciável, a equação do plano tangencial no ponto $M(x_0, y_0, z_0)$ à superfície será

$$Z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)\,(X - x_0) + f'_y(x_0, y_0)\,(Y - y_0). \tag{1}$$

Onde $z_0 = f(x_0, y_0)$ e X, Y, Z são as coordenadas variáveis do ponto do plano tangencial.

As equações da normal têm a forma

$$\frac{X - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{Y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{Z - z_0}{-1}, \tag{2}$$

onde X, Y, Z são as coordenadas variáveis do ponto da normal.

Exemplo 1. Escrever as equações do plano tangencial e da normal à superfície $z = \frac{x^2}{2} - y^2$ no seu ponto $M(2;\ -1;\ 1)$.

Solução. Achamos as derivadas parciais da função dada e seus valores no ponto M

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x, \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = 2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y, \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = 2.$$

Donde, aplicando as fórmulas (1) e (2), teremos $z - 1 = 2(x - 2) + 2(y + 1)$ ou $2x + 2y - z - 1 = 0$, que é a equação do plano tangencial e $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$, que são as equações da normal.

2°. **Equações do plano tangencial e da normal para o caso em que a superfície é dada de forma implícita.** No caso em que a equação da superfície regular é dada de forma implícita

$$F(x, y, z) = 0,$$

onde F é uma função diferenciável e $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, e o grad $F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, as equações correspondentes terão a forma

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)\,(X - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)\,(Y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)\,(Z - z_0) = 0 \tag{3}$$

que é a equação do plano tangencial, e

$$\frac{X - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{Y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{Z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}, \tag{4}$$

que são as equações da normal.

Exemplo 2. Escrever a equação do plano tangencial e da normal à superfície $3xyz - z^3 = a^3$ no ponto que tem $x = 0$, $y = a$.

Solução. Achamos a cota z do ponto de contacto, fazendo $x = 0$ e $y = a$ na equação da superfície: $-z^3 = a^3$, donde $z = -a$. Desta forma, o ponto de contacto é $M(0, a, -a)$.

Designando por $F(x, y, z)$ o primeiro membro da equação, achamos as derivadas parciais e seus valores no ponto M:

$$F'_x = 3yz, \qquad (F'_x)_M = -3a^2,$$

$$F'_y = 3xz, \qquad (F'_y)_M = 0,$$

$$F'_z = 3xy - 3z^2, \qquad (F'_z)_M = -3a^2.$$

Aplicando as fórmulas (3) e (4), obtemos:

$$-3a^2(x-0)+0(y-a)-3a^2(z+a)=0$$

ou seja $x+z+a=0$, equação do plano tangencial,

$$\frac{x-0}{-3a^2}=\frac{y-a}{0}=\frac{z+a}{-3a^2}$$

ou seja, $\frac{x}{1}=\frac{y-a}{0}=\frac{z+a}{1}$, equações da normal.

1981. Escrever a equação do plano tangencial e as equações da normal às seguintes superfícies, nos pontos que se indicam:

a) ao parabolóide de revolução $z=x^2+y^2$ no ponto $(1; -2; 5)$;

b) ao cone $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{8}=0$ no ponto $(4; 3; 4)$;

c) à esfera $x^2+y^2+z^2=2Rz$ no ponto $(R\cos\alpha; R\operatorname{sen}\alpha; R)$.

1982. Em que pontos do elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

a normal forma ângulos iguais com os eixos das coordenadas?

1983. Pelo ponto M $(3; 4; 12)$ da esfera $x^2+y^2+z^2=169$ passam planos perpendiculares aos eixos OX e OY. Escrever a equação do plano que passa pelas tangentes às seções que os originam, no ponto comum M.

1984. Demonstrar que a equação do plano tangencial à superfície central de 2a. ordem

$$ax^2+by^2+cz^2=k\ (|a|+|b|+|c|\neq 0)$$

no ponto $M(x_0, y_0, z_0)$ tem a forma

$$ax_0x+by_0y+cz_0z=k.$$

1985. Dada a superfície $x^2+2y^2+3z^2=21$ traçar planos tangenciais que sejam paralelos ao plano $x+4y+6z=0$.

1986. Dada o elipsóide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ traçar planos tangenciais que interceptem nos eixos das coordenadas segmentos de igual grandeza.

1987. Achar na superfície $x^2+y^2-z^2-2x=0$ os pontos em que os planos tangenciais a ela sejam paralelos aos planos coordenados.

1988. Demonstrar que os planos tangenciais à superfície $xyz=m^3$ formam com os planos coordenados um tetraedro de volume constante.

1989. Demonstrar que os planos tangenciais à superfície $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ interceptam nos eixos coordenados segmentos, cuja soma é constante.

1990. Demonstrar que o cone $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ e a esfera

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{b^2+c^2}{c}\right)^2=\frac{b^2}{c^2}(b^2+c^2)$$

são tangentes entre si nos pontos $(0, \pm b, c)$.

1991. Chama-se *ângulo entre duas superfícies* no ponto de sua interseção, o ângulo que formam os planos tangenciais traçados à estas superfícies no ponto que se considera.

Que ângulo formam em sua interseção o cilindro $x^2+y^2=R^2$ e a esfera $(x-R)^2+y^2+z^2=R^2$ no ponto $M\left(\frac{R}{2}, \frac{R\sqrt{3}}{2}, 0\right)$?

1992. Chamam-se *ortogonais* as superfícies que se cortam entre si formando um ângulo reto em cada um dos pontos da linha de sua interseção.

Demonstrar que as superfícies $x^2+y^2+z^2=r^2$ (esfera), $y=$ $=x\operatorname{tg}\varphi$ (plano) e $z^2=(x^2+y^2)\operatorname{tg}^2\psi$ (cone), que são superfícies coordenadas do sistema de coordenadas esféricas r, φ, ψ são ortogonais entre si.

1993. Demonstrar que todos os planos tangenciais à superfície cônica $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$ no ponto $M(x_0, y_0, z_0)$, onde $x_0\neq 0$, passam pela origem das coordenadas.

1994*. Achar as projeções do elipsóide

$$x^2+y^2+z^2-xy-1=0$$

sobre os planos coordenados.

1995. Demonstrar que a normal em qualquer ponto da superfície de revolução $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ $(f'\neq 0)$ corta o seu eixo de rotação.

§ 12. Fórmula de Taylor para funções de diversas variáveis

Que a função $f(x, y)$ tenha num entorno do ponto (a, b) derivadas parciais contínuas de até ordem $(n+1)$ inclusive. Então, neste entorno é válida a *fórmula de Taylor:*

$$f(x, y)=f(a, b)+\frac{1}{1!}[f'_x(a, b)(x-a)+f'_y(a, b)(y-b)]+$$

$$+\frac{1}{2!}[f''_{xx}(a, b)(x-a)^2+2f''_{xy}(a, b)(x-a)(y-b)+f''_{yy}(a, b)(y-b)^2]+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{n!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(a, b)+R_n(x, y), \qquad (1)$$

onde

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} f[a + \theta(x-a),\ b + \theta(y-b)]$$

$$(0 < \theta < 1),$$

ou em outras anotações:

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \frac{1}{1!}[hf'_x(x, y) + kf'_y(x, y)] +$$

$$+ \frac{1}{2!}[h^2 f''_{xx}(x, y) + 2hkf''_{xy}(x, y) + k^2 f''_{yy}(x, y)] + \ldots + \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x, y) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x + \theta h,\ y + \theta k), \qquad (2)$$

$h = \Delta x$ e $k = \Delta y$; ou

$$\Delta f(x, y) = df(x, y) + \frac{1}{2!}d^2 f(x, y) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}d^n f(x, y) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(x + \theta h,\ y + \theta k). \qquad (3)$$

No caso particular em que $a = b = 0$, a fórmula (1) recebe o nome de *fórmula de Maclaurin*.

Fórmulas análogas são válidas para as funções de três ou mais variáveis.

Exemplo. Achar o acréscimo que recebe a função $f(x, y) = x^3 - 2y^3 + 3xy$, ao passar dos valores $x = 1$, $y = 2$ para os valores $x_1 = 1 + h$, $y_1 = 2 + k$.

Solução. O acréscimo procurado pode ser encontrado, aplicando a fórmula (2). Calculamos previamente as derivadas parciais sucessivas e seus valores no ponto dado (1; 2):

$f'_x(x, y) = 3x^2 + 3y$, $\quad f'_x(1; 2) = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9$,
$f'_y(x, y) = -6y^2 + 3x$, $\quad f'_y(1; 2) = -6 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = -21$,
$f''_{xx}(x, y) = 6x$, $\quad f''_{xx}(1; 2) = 6 \cdot 1 = 6$,
$f''_{xy}(x, y) = 3$, $\quad f''_{xy}(1; 2) = 3$,
$f''_{yy}(x, y) = -12y$, $\quad f''_{yy}(1; 2) = -12 \cdot 2 = -24$,
$f'''_{xxx}(x, y) = 6$, $\quad f'''_{xxx}(1; 2) = 6$,
$f'''_{xxy}(x, y) = 0$, $\quad f'''_{xxy}(1; 2) = 0$,
$f'''_{xyy}(x, y) = 0$, $\quad f'''_{xyy}(1; 2) = 0$,
$f'''_{yyy}(x, y) = -12$, $\quad f'''_{yyy}(1; 2) = -12$.

Todas as derivadas seguintes serão identicamente iguais a zero. Colocando os resultados obtidos na fórmula (2), teremos:

$$\Delta f(x, y) = f(1 + h, 2 + k) - f(1, 2) = h \cdot 9 + k(-21) +$$

$$+ \frac{1}{2!}[h^2 \cdot 6 + 2hk \cdot 3 + k^2(-24)] + \frac{1}{3!}[h^3 \cdot 6 + 3h^2k \cdot 0 + 3hk^2 \cdot 0 + k^3(-12)] =$$

$$= 9h - 21k + 3h^2 + 3hk - 12k^2 + h^3 - 2k^3.$$

1996. Desenvolver $f(x + h,\ y + k)$ em potências inteiras e positivas de h e k, se

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

1997. Desenvolver a função $f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ pela fórmula de Taylor num entorno do ponto $(-2; 1)$.

1998. Achar o acréscimo que recebe a função $f(x, y) = x^2y$ ao passar dos valores $x = 1$, $y = 1$ para os valores $x_1 = 1 + h$, $y_1 = 1 + k$.

1999. Desenvolver a função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z + 4$ pela fórmula de Taylor num entorno do ponto (1; 1; 1).

2000. Desenvolver $f(x + h, y + k, z + l)$ em potências inteiras e positivas de h, k e l, se

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz.$$

2001. Desenvolver pela fórmula de Maclaurin, até os termos de 3ª ordem inclusive, a função

$$f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y.$$

2002. Desenvolver pela fórmula de Maclaurin, até os termos de 4ª ordem inclusive, a função

$$f(x, y) = \cos x \cos y.$$

2003. Desenvolver pela fórmula de Taylor, num entorno do ponto (1; 1) até os termos de 2ª ordem inclusive, a função

$$f(x, y) = y^x.$$

2004. Desenvolver pela fórmula de Taylor, num entorno do ponto (1; -1) até os termos de 3ª ordem inclusive, a função

$$f(x, y) = e^{x+y}.$$

2005. Deduzir as fórmulas aproximadas, com precisão de até os termos de 2ª. ordem, em relação às grandezas α e β para as expressões

a) $\operatorname{arctg}\dfrac{1+\alpha}{1-\beta}$; b) $\sqrt{\dfrac{(1+\alpha)^m + (1+\beta)^n}{2}}$,

se $|\alpha|$ e $|\beta|$ são pequenas em comparação com 1.

2006*. Aplicando a fórmula de Taylor, até os termos de 2ª ordem, calcular aproximadamente

a) $\sqrt{1{,}03}$, $\sqrt[3]{0{,}98}$; b) $(0{,}95)^{2{,}01}$.

2007. Seja z uma função implícita de x e y, determinada pela equação $z^3 - 2xz + y = 0$, que toma o valor $z = 1$, quando $x = 1$ e $y = 1$. Escrever vários termos do desenvolvimento da função z em potências crescentes das diferenças $x - 1$ e $y - 1$.

§ 13. Extremo da função de diversas variáveis

1°. Definição de extremo de uma função. Diz-se que a função $f(x, y)$ tem um *máximo* (ou *mínimo*) $f(a, b)$ no ponto $P(a, b)$, se para todos os pontos $P'(x, y)$, diferentes de P, de um entorno qualquer do ponto P, é válida a desigualdade $f(a, b) > f(x, y)$ (ou, respectivamente, $f(a, b) < f(x, y)$). O máximo ou mínimo de uma função recebe também o nome de *extremo* da mesma. Por analogia, se determina o extremo de uma função de três ou mais variáveis.

2°. **Condições necessárias para a existência do extremo.** Os pontos em que a função diferenciável $f(x, y)$ pode alcançar um extremo (isto é, os chamados *pontos estacionários*) são achados resolvendo-se o sistema de equações:

$$f'_x(x, y) = 0, \quad f'_y(x, y) = 0 \tag{1}$$

(*condições necessárias* para a existência do extremo). O sistema (1) é equivalente a uma equação $df(x, y) = 0$ para todos os Δx e Δy. No caso geral, no ponto extremo $P(a, b)$ da função $f(x, y)$ ou $df(a, b) = 0$, ou $df(a, b)$ não existe.

3°. **Condições suficientes para a existência de extremo.** Seja $P(a, b)$ um ponto estacionário da função $f(x, y)$, isto é, $df(a, b) = 0$. Neste caso: a) se $d^2f(a, b) < 0$, sendo $dx^2 + dy^2 > 0$, então $f(a, b)$ é um *máximo* da função $f(x, y)$; b) se $d^2f(a, b) > 0$, sendo $dx^2 + dy^2 > 0$, então $f(a, b)$ é o *mínimo* da função $f(x, y)$; c) se $d^2f(a, b)$ muda de sinal, então $f(a, b)$ não é ponto extremo da função $f(x, y)$.

As condições citadas equivalem às seguintes: seja $f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0$ e $A = f''_{xx}(a, b)$, $B = f''_{xy}(a, b)$, $C = f''_{yy}(a, b)$. Formamos o *discriminante*

$$\Delta = AC - B^2.$$

Neste caso: 1) se $\Delta > 0$, a função tem um extremo no ponto $P(a, b)$ e ele é um máximo, se $A < 0$ (ou $C < 0$); é um mínimo, se $A > 0$ (ou $C > 0$); 2) se $\Delta < 0$, no ponto $P(a, b)$ não existe extremo; 3) se $\Delta = 0$, a existência de extremo da função no ponto $P(a, b)$ fica indeterminada (é necessário prosseguir a investigação).

4°. **Caso de função com muitas variáveis.** Para a função de três ou mais variáveis, as condições necessárias para a existência de extremos são análogas às condições do parágrafo 1°, (1), e as condições suficientes, análogas às do parágrafo 3°, a), b) e c).

Exemplo 1. Averiguar os extremos da função

$$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

Solução. Achamos as derivadas parciais e formamos o sistema de equações (1):

$$\frac{\partial z}{\partial x} \equiv 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} \equiv 6xy - 12 = 0$$

ou

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0, \\ xy - 2 = 0. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, obtemos quatro pontos estacionários:

$$P_1(1; 2); \quad P_2(2; 1); \quad P_3(-1; -2); \quad P_4(-2; -1).$$

Achamos as derivadas de 2ª ordem

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x$$

e formamos o discriminante $\Delta = AC - B^2$ para cada um dos pontos estacionários:

1) Para o ponto P_1: $A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{P_1} = 6$, $B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{P_1} = 12$, $C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{P_1} = 6$, $\Delta = AC - B^2 = 36 - 144 < 0$. Isto é, no ponto P_1 não há extremo.

2) Para o ponto P_2: $A = 12$, $B = 6$, $C = 12$; $\Delta = 144 - 36 > 0$, $A > 0$. No ponto P_2 a função tem um mínimo. Este mínimo é igual ao valor da função, quando $x = 2$, $y = 1$;

$$z_{\min} = 8 + 6 - 30 - 12 = -28.$$

3) Para o ponto P_3: $A = -6$, $B = -12$, $C = -6$; $\Delta = 36 - 144 < 0$. Não há extremo.

4) Para o ponto $P_4: A = -12$, $B = -6$, $C = -12$; $\Delta = 144 - 36 > 0$, $A < 0$. No ponto P_4 a função tem um máximo. Este máximo é igual a $z_{máx} = -8 - 6 + 30 + 12 = 28$.

5°. **Extremo condicionado.** Chama-se *extremo condicionado* da função $f(x, y)$, no caso mais simples, o máximo e o mínimo desta função, obtido com a condição de que seus argumentos estejem ligados entre si pela equação $\varphi(x, y) = 0$ (*equação de ligação*). Para achar o extremo condicionado da função diferenciável $f(x, y)$, com a equação de ligação $\varphi(x, y) = 0$, compõe-se a chamada função de Lagrange

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y),$$

onde λ é um fator constante indeterminado e procura-se o extremo ordinário desta função auxiliar. As condições necessárias para que haja um extremo se reduzem ao sistema de três equações:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

com três incógnitas x, y, λ, do qual, de forma geral, se pode deduzir estas incógnitas.

A questão da existência e caráter do extremo condicionado é resolvido na base do estudo do sinal que leva a segunda diferencial da função de Lagrange

$$d^2F(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2$$

para o sistema de valores de x, y, λ que investigamos, obtidos de (2), com a condição de que dx e dy estejem relacionados entre si pela equação

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0 \quad (dx^2 + dy^2 \neq 0).$$

Justamente a função $f(x, y)$ terá um máximo condicionado, se $d^2F < 0$, é um mínimo condicionado, se $d^2F > 0$. Em particular, se o discriminante Δ para a função $F(x, y)$ no ponto estacionário for positivo, neste ponto haverá um máximo condicionado da função $f(x, y)$, se $A < 0$ (ou $C < 0$), e um mínimo condicionado, se $A > 0$ (ou $C > 0$).

Analogamente, acham-se os extremos condicionados das funções de três ou mais variáveis, quando existem uma ou mais equações de ligação (cujo número deve ser menor que o de variáveis). Neste caso, é necessário incluir na função de Lagrange tantos fatores indeterminados, quantos forem as equações de enlace.

Exemplo 2. Achar os extremos da função

$$z = 6 - 4x - 3y$$

com a condição de que as variáveis x e y satisfaçam a equação

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Solução. Geometricamente, o problema se reduz a encontrar os valores máximo e mínimo da cota z do plano $z = 6 - 4x - 3y$ para seus pontos de interseção com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Compomos a função de Lagrange

$$F(x, y) = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Temos $\frac{\partial F}{\partial x} = -4 + 2\lambda x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -3 + 2\lambda y$. As condições necessárias são fornecidas pelo sistema de equações:

$$\begin{cases} -4 + 2\lambda x = 0, \\ -3 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

que, ao ser resolvido, nos dá:

$$\lambda_1 = \frac{5}{2}, \quad x_1 = \frac{4}{5}, \quad y_1 = \frac{3}{5}$$

$$\lambda_2 = -\frac{5}{2}, \quad x_2 = -\frac{4}{5}, \quad y_2 = -\frac{3}{5}.$$

Como

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda,$$

temos

$$d^2F = 2\lambda(dx^2 + dy^2).$$

Se $\lambda = \frac{5}{2}$, $x = \frac{4}{5}$ e $y = \frac{3}{5}$, então $d^2F > 0$ e, portanto, neste ponto a função tem um mínimo condicionado. Se $\lambda = -\frac{5}{2}$, $x = -\frac{4}{5}$ e $y = -\frac{3}{5}$, então $d^2F < 0$ e, portanto, neste ponto a função tem um máximo condicionado.

Desta forma,

$$z_{\text{máx}} = 6 + \frac{16}{5} + \frac{9}{5} = 11,$$

$$z_{\text{mín}} = 6 - \frac{16}{5} - \frac{9}{5} = 1.$$

6°. **Valores máximo e mínimo absolutos da função.** Toda função diferenciável numa região restrita e fechada atinge seu valor máximo (mínimo), ou em um ponto estacionário, ou em um ponto do limite da região.

Exemplo 3. Determinar os valores máximo e mínimo da função $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ na região $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$, $x + y \geqslant -3$.

Solução. A região indicada é um triângulo (fig. 70).

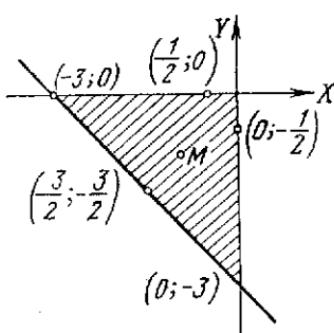
1) Achamos os pontos estacionários:

$$\begin{cases} z'_x \equiv 2x - y + 1 = 0, \\ z'_y \equiv 2y - x + 1 = 0; \end{cases}$$

donde $x = -1$, $y = -1$; obtemos o ponto $M(-1; -1)$.

No ponto M o valor da função é $z_M = -1$. Não é necessário investigar se há extremo.

FIG. 70

2) Examinamos a função no limite da região

Quando $x = 0$, temos que $z = y^2 + y$ e o problema se reduz a procurar o máximo e o mínimo absolutos desta função de um argumento no segmento $-3 \leqslant y \leqslant 0$. Ao fazer esta investigação, achamos que $(z_{máx})_{x=0} = 6$ no ponto $(0; -3)$; $(z_{mín})_{x=0} = -\frac{1}{4}$ no ponto $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$.

Quando $y = 0$, temos que $z = x^2 + x$. Analogamente, achamos que $(z_{máx})_{y=0} = 6$ no ponto $(-3; 0)$; $(z_{mín})_{y=0} = -\frac{1}{4}$ no ponto $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Quando $x + y = -3$ ou $y = -3 - x$ teremos que $z = 3x^2 + 9x + 6$. Analogamente, achamos que $(z_{mín})_{x+y=-3} = -\frac{3}{4}$ no ponto $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$; $(z_{máx})_{x+y=-3} = 6$ coincide com $(z_{máx})_{x=0}$ e $(z_{máx})_{y=0}$. Na reta $x + y = -3$ poderia ser feita a investigação da existência do extremo condicionado sem recorrer à função de um só argumento.

3) Comparando todos os valores da função z obtidos, chegamos à conclusão de que $z_{máx} = 6$ nos pontos $(0, -3)$ e $(-3; 0)$; $z_{mín} = -1$ no ponto estacionário M.

Investigar se têm extremos as seguintes funções de duas variáveis:

2008. $z = (x-1)^2 + 2y^2$. **2009.** $z = (x-1)^2 - 2y^2$.

2010. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

2011. $z = x^3y^2(6 - x - y)$ $(x > 0,\ y > 0)$.

2012. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

2013. $z = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$. **2014.** $z = 1 - (x^2 + y^2)^{2/3}$.

2015. $z = (x^2 + y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$. **2016.** $z = \frac{1 + x - y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$.

2016.1. $z = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$ $(x > 0,\ y > 0)$.

2016.2. $z = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$.

Achar os extremos das funções de três variáveis:

2017. $u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.

2018. $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$.

Achar os extremos das funções z, dadas de forma implícita:

2019*. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$.

2020. $x^3 - y^2 - 3x + 4y + z^2 - 8 = 0$.

Determinar os extremos condicionados das funções:

2021. $z = xy$ quando $x + y = 1$.

2022. $z = x + 2y$ quando $x^2 + y^2 = 5$.

2023. $z = x^2 + y^2$ quando $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.

2024. $z = \cos^2 x + \cos^2 y$ quando $y - x = \frac{\pi}{4}$.

2025. $u = x - 2y + 2z$ quando $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

2026. $u = x^2 + y^2 + z^2$ quando $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $(a > b > c > 0)$.

2027. $u = xy^2z^3$ quando $x + y + z = 12$ $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$.

2028. $u = xyz$ com as condições: $x + y + z = 5$, $xy + yz + zx = 8$.

2029. Demonstrar a desigualdades

$$\frac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz},$$

se $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

Indicação. Procurar o máximo da função $u = xyz$ com a condição de que $x + y + z = S$.

2030. Determinar o máximo absoluto da função $z = 1 + x + 2y$ nas regiões: a) $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 1$; b) $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$, $x - y \leqslant 1$.

2031. Determinar o máximo e o mínimo absolutos das funções: a) $z = x^2y$ e b) $z = x^2 - y^2$ na região $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

2032. Determinar o máximo e o mínimo absolutos da função $z = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x + y)$ na região $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$.

2033. Determinar o máximo e o mínimo absolutos da função $z = x^3 + y^3 - 3xy$ na região $0 \leqslant x \leqslant 2$, $-1 \leqslant y \leqslant 2$.

§ 14. Problemas para determinação dos valores máximos e mínimos das funções

Exemplo 1. É preciso dividir um número positivo a em três termos também positivos de forma que o produto destes seja máximo.

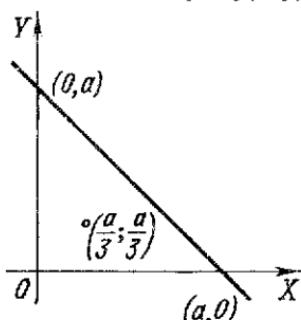
Solução. Sejam os termos procurados x, y, $a - x - y$. Procuramos o máximo absoluto da função $f(x, y) = xy(a - x - y)$.

FIG. 71

Pelo sentido do problema, a função $f(x, y)$ é examinada dentro do triângulo fechado $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant a$ (fig. 71).

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} f'_x(x, u) \equiv y(a - 2x - y) = 0, \\ f'_y(x, y) \equiv x(a - x - 2y) = 0, \end{cases}$$

obtemos para o interior do triângulo um só ponto estacionário $\left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}\right)$. Verificamos se são cumpridas as condições necessárias. Temos $f''_{xx}(x, y) = -2y$, $f''_{xy}(x, y) = a - 2x - 2y$, $f''_{yy}(x, y) = -2x$.

Portanto, $A = f''_{xx}\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = -\frac{2}{3}a$, $B = f''_{xy}\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = -\frac{1}{3}a$,

$$C = f''_{yy}\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = -\frac{2}{3}a \quad \text{e} \quad \Delta = AC - B^2 > 0,\ A < 0.$$

Isto é, a função tem seu máximo no ponto $\left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}\right)$. Como no contorno do triângulo a função $f(x, y) = 0$, este máximo será o máximo absoluto desta função, isto é, o produto será máximo, quando $x = y = a - x - y = \frac{a}{3}$ e o valor máximo do mesmo será igual a $\frac{a^3}{27}$.

Observação. Este problema poderia ter sido também resolvido pelo método do extremo condicionado, procurando-se o máximo da função $u = xyz$, com a condição de que $x + y + z = a$.

2034. Entre todos os paralelepípedos retangulares, de volume V dado, achar aquele, cuja superfície total seja menor.

2035. Que dimensões deverá ter uma banheira retangular aberta, de volume V dado, para que a sua superfície seja a menor possível?

2036. Entre todos os triângulos de perímetro igual a $2p$, achar o que tem maior área.

2037. Achar o paralelepípedo retangular de área S dada que tenha o maior volume possível.

2038. Representar o número positivo a em forma de produto de quatro fatores positivos, cuja soma seja a menor possível.

2039. É preciso achar no plano XOY um ponto $M(x, y)$ tal, que a soma dos quadrados de suas distâncias até as três retas: $x = 0$, $y = 0$, $x - y + 1 = 0$, seja a menor possível.

2040. Achar o triângulo de perímetro $2p$ dado, que, ao girar em torno de um de seus lados, forme um corpo de maior volume.

2041. Em um plano são dados três pontos materiais $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, cujas massas respectivas são m_1, m_2, m_3. Que posição deverá ocupar o ponto $P(x, y)$ para que o momento quadrático (momento de inércia) deste sistema de pontos, em relação ao ponto P (isto é, a soma $m_1\overline{P_1P}^2 + m_2\overline{P_2P}^2 + m_3\overline{P_3P}^2$) seja o menor possível?

2042. Fazer passar um plano pelo ponto $M(a, b, c)$ que forme com os planos coordenados um tetraedro que tenha o menor volume possível.

2043. Inscrever em um elipsóide um paralelepípedo retangular que tenha o maior volume possível.

2044. Calcular as dimensões exteriores que deverá ter um caixote retangular aberto, com espessura dada das paredes de δ e a capacidade (interna) V, para que em sua fabricação seja gasto a menor quantidade possível de material.

2045. Em que ponto da elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

a tangente a esta forma com os eixos coordenados um triângulo de menor área?

2046*. Achar os eixos da elipse

$$5x^2+8xy+5y^2=9.$$

2047. Em uma esfera dada inscrever um cilindro cuja superfície total seja máxima.

2048. Os cursos de dois rios (dentro dos limites de uma determinada região) representam aproximadamente uma parábola $y=x^2$ e uma reta $x-y-2=0$. Deve-se unir estes rios por meio de um canal retilíneo que tenha o menor comprimento possível. Por que pontos deveremos traçá-lo?

2049. Achar a distância mais curta do ponto $M(1;\ 2;\ 3)$ à reta $\frac{x}{1}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{2}$.

2050*. Os pontos A e B estão situados em diferentes meios ópticos, separados um do outro por uma linha reta (fig. 72). A velocidade de propagação da luz no primeiro meio é igual a v_1 e no segundo, v_2. Aplicando o "princípio de Fermat", segundo o qual o raio luminoso se propaga ao longo da linha AMB, cujo percurso exige um tempo mínimo, deduzir a lei da refração do raio de luz.

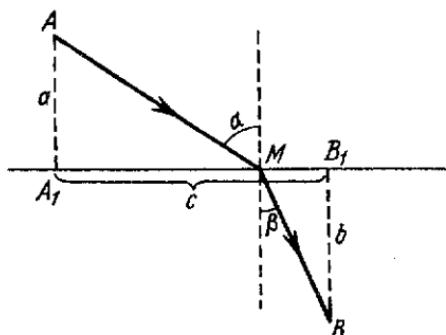
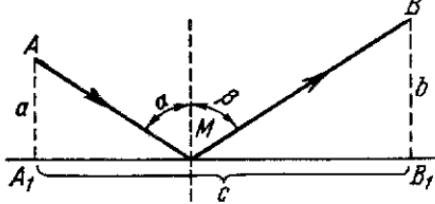



FIG. 72 FIG. 73

2051. Aplicando o "princípio de Fermat", deduzir a lei de reflexão do raio de luz de um plano num meio homogêneo (fig. 73).

2052*. Se por um circuito elétrico de resistência R passa uma corrente I, a quantidade de calor que se desprende em uma unidade de tempo é proporcional a I^2R. Determinar como deverá ser distribuída

a corrente I em I_1, I_2 e I_3 por meio de três condutores de resistências R_1, R_2 e R_3, respectivamente, para que o desprendimento de calor seja mínimo?

§ 15. Pontos singulares de curvas planas

1°. **Definição de ponto singular.** Um ponto $M(x_0, y_0)$ de uma curva plana $f(x, y) = 0$ é chamado de *ponto singular*, se suas coordenadas satisfazem simultaneamente às três equações:

$$f(x_0, y_0) = 0, \quad f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

2°. **Tipos principais de pontos singulares.** Suponhamos que no ponto singular isolado $M(x_0, y_0)$ as derivadas de 2ª. ordem

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0),$$

não sejam todas iguais a zero e que

$$\Delta = AC - B^2,$$

neste caso teremos:

a) se $\Delta > 0$, M será um *ponto isolado* (fig. 74);

b) se $\Delta < 0$, M será um *ponto nodal (ponto duplo)* (fig. 75);

c) se $\Delta = 0$, M pode ser um *ponto de reversão* de 1ª. espécie (fig. 76), ou de 2ª. espécie (fig. 77), ou um *ponto isolado*, ou um *ponto duplo com tangentes coincidentes* (fig. 78).

Ao resolver os problemas desta parte é obrigatória a construção das curvas.

Exemplo 1. Demonstrar que a curva $y^2 = ax^2 + x^3$ tem: um ponto nodal, se $a > 0$; um ponto isolado, se $a < 0$ e um ponto de reversão de 1ª. espécie, se $a = 0$.

Solução. Neste caso, $f(x, y) = ax^2 + x^3 - y^2$. Achamos as derivadas parciais e as igualamos a zero

$$f'_x(x, y) \equiv 2ax + 3x^2 = 0,$$

$$f'_y(x, y) \equiv -2y = 0.$$

Este sistema tem duas soluções: $O\,(0; 0)$ e $N\left(-\frac{2}{3}a; 0\right)$, porém as coordenadas do ponto N não satisfazem à equação da curva dada. Isto é, há um só ponto singular $O\,(0; 0)$.

Achamos as segundas derivadas e seus valores no ponto O:

$$f''_{xx}(x, y) = 2a + 6x, \quad A = 2a,$$

$$f''_{xy}(x, y) = 0, \quad B = 0,$$

$$f''_{yy}(x, y) = -2, \quad C = -2,$$

$$\Delta = AC - B^2 = -4a.$$

Portanto,

se $a > 0$, então $\Delta < O$ e o ponto O é nodal (fig. 79);
se $a < 0$, então $\Delta > O$ e o ponto O é isolado (fig. 80);

se $a = 0$, então $\Delta = 0$. A equação da curva neste caso será $y^2 = x^3$ ou $y = \pm\sqrt{x^3}$, onde $x \geqslant 0$; a curva é simétrica em relação ao eixo OX, que é tangente à mesma. Portanto, o ponto M será um ponto de reversão de 1ª. espécie (fig. 81).

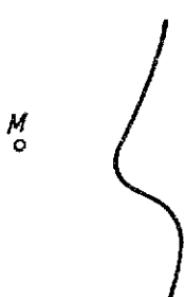
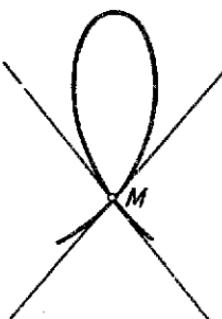
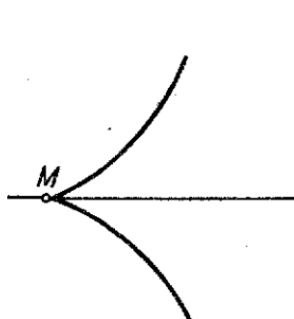



FIG. 74 FIG. 75 FIG. 76

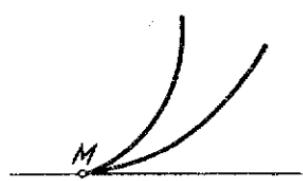
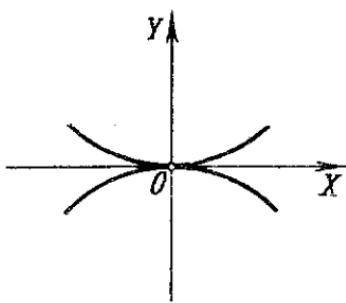



FIG. 77 FIG. 78

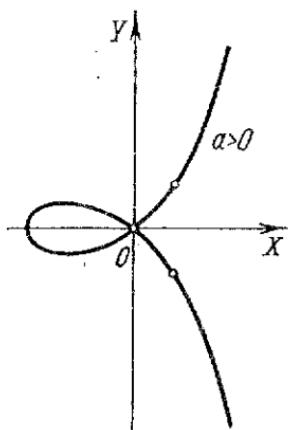
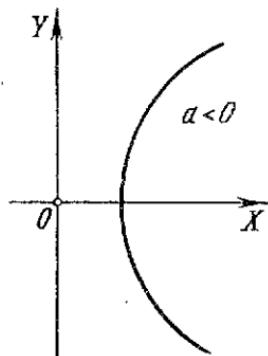
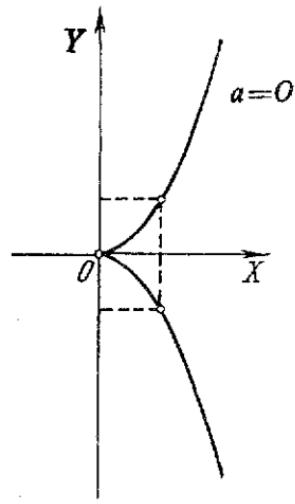



FIG. 79 FIG. 80 FIG. 81

Determinar o caráter dos pontos singulares das seguintes curvas:

2053. $y^2 = -x^2 + x^4$. **2054.** $(y - x^2)^2 = x^5$.

2055. $a^4y^2 = a^2x^4 - x^6$. **2056.** $x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0$.

2057. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (*folha de Descartes*).

2058. $y^2(a - x) = x^3$ (*cissóide*).

2059. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ (*lemniscata*).

2060. $(a + x)\, y^2 = (a - x)\, x^2$ (*estrofóide*).

2061. $(x^2 + y^2)(x - a)^2 = b^2x^2$ $(a > 0,\ b > 0)$ (*concóide*). Examinar três casos:

1) $a > b$, 2) $a = b$, 3) $a < b$.

2062. Determinar como varia o caráter do ponto singular da curva $y^2 = (x - a)(x - b)(x - c)$ em dependência dos valores de a, b, c ($a \leqslant b \leqslant c$ são reais).

§ 16. Envolvente

1°. **Definição de envolvente.** Chama-se *envolvente de uma família de curvas planas regulares*, a curva (ou o conjunto de curvas) tangente à todas as linhas desta família, sendo que cada um dos seus pontos está em contacto com alguma linha da família examinada.

2°. **Equação da envolvente.** Se uma família de curvas, dependente de um parâmetro variável α,

$$f(x, y, \alpha) = 0,$$

onde f é diferenciável, tem envolvente, as equações paramétricas desta são determinadas por meio do sistema de equações:

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha) = 0, \\ f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Eliminando o parâmetro α do sistema (1), teremos uma equação da forma

$$D(x, y) = 0. \qquad (2)$$

Convém assinalar que a curva (2), obtida formalmente (a chamada "*curva discriminante*"), juntamente com a envolvente, se esta existir, pode conter um lugar geométrico de pontos singulares de dada família, que não tomam parte da envolvente desta família.

Ao resolver-se os problemas deste parágrafo recomenda-se construir os gráficos.

Exemplo 1. Achar a envolvente da família de retas

$$x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha - p = 0 \ (p = \text{const},\ p > 0).$$

Solução. Esta família de retas depende do parâmetro α. Compomos o sistema de equações (1)

$$\begin{cases} x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha - p = 0, \\ -x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha = 0. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema em relação a x e y, obtemos as equações paramétricas da envolvente

$$x = p \cos \alpha, \quad y = p \operatorname{sen} \alpha.$$

Elevando ambas as equações ao quadrado e somando-as, eliminamos o parâmetro α:

$$x^2 + y^2 = p^2.$$

Desta forma, a envolvente desta família de retas é uma circunferência de raio p, com centro na origem das coordenadas. A família de retas dada é, por sua vez, a família de tangentes desta circunferência (fig. 82).

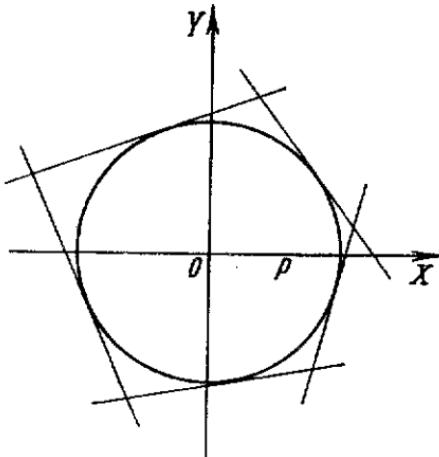



FIG. 82

2063. Achar a envolvente da família de circunferências

$$(x - a)^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}.$$

2064. Achar a envolvente da família de retas

$$y = kx + \frac{p}{2k}$$

(k é o parâmetro, p = const).

2065. Achar a envolvente da família de circunferências de raio igual a R, cujos centros se encontrem no eixo OX.

2066. Achar a curva que envolve um segmento de comprimento l, quando seus extremos resvalam pelos eixos das coordenadas.

2067. Achar a envolvente da família de retas que formam com os eixos das coordenadas o triângulo de área constante S.

2068. Achar a envolvente das elipses de área constante S, cujos eixos de simetria coincidem.

2069. Averiguar o caráter das "curvas discriminantes" das famílias das seguintes curvas (C é o parâmetro):

a) $y = (x - C)^3$ (parábolas cúbicas);
b) $y^2 = (x - C)^3$ (parábolas semicúbicas);
c) $y^3 = (x - C)^2$ (parábolas de Neil);
d) $(a + x)(y - C)^2 = x^2(a - x)$ (estrofóides).

2070. A equação da trajetória percorrida por um projétil lançado desde o ponto O, com velocidade inicial v_0 e formando um ângulo α com o horizonte (desprezando-se a resistência do ar), é

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

onde g é aceleração da gravidade.

Tomando o ângulo α como parâmetro, achar a envolvente de todas as trajetórias do projétil, situadas num mesmo plano vertical (*"parábola de segurança"*) (fig. 83).

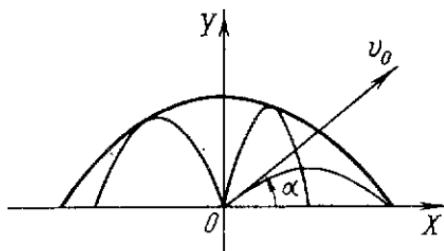



FIG. 83

§ 17. Comprimento do arco da curva no espaço

A diferencial do arco de uma curva no espaço em coordenadas cartesianas retangulares é igual a

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

onde x, y, z são as coordenadas variáveis do ponto da curva. Se

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

são as equações paramétricas da curva no espaço, o comprimento do arco no intervalo compreendido entre $t = t_1$ e $t = t_2$ $(t_1 < t_2)$, será

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Achar o comprimento dos arcos das curvas dadas nos problemas **2071—2076**:

2071. $x = t$, $y = t^2$, $z = \frac{2t^3}{3}$ de $t = 0$ até $t = 2$.

2072. $x = 2 \cos t$, $y = 2 \operatorname{sen} t$, $z = \frac{3}{\pi} t$ de $t = 0$ até $t = \pi$.

2073. $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$, $z = e^t$ de $t = 0$ até um valor arbitrário de t.

2074. $y = \frac{x^2}{2}$, $z = \frac{x^3}{6}$ de $x = 0$ até $x = 6$.

2075. $x^2 = 3y$, $2xy = 9z$ do ponto $O(0;\ 0;\ 0)$ até o ponto $M(3;\ 3;\ 2)$.

2076. $y = a \arcsen \frac{z}{a}$, $z = \frac{a}{4} \ln \frac{a+x}{a-x}$ do ponto O $(0;\ 0;\ 0)$ até o ponto $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$.

2077. A posição de um ponto num instante qualquer $t(t > 0)$ é determinada pelas equações

$$x = 2t, \quad y = \ln t, \quad z = t^2.$$

Achar a velocidade média do movimento entre os instantes $t_1 = 1$ e $t_2 = 10$.

§ 18. Função vetorial do argumento escalar

1°. Derivada de uma função vetorial de um argumento escalar. *A função vectorial* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t)$ pode ser determinada dando as três funções escalares $a_x(t)$, $a_y(t)$ e $a_z(t)$, isto é, de suas projeções sobre os eixos das coordenadas:

$$\boldsymbol{a} = a_x(t)\, \boldsymbol{i} + a_y(t)\, \boldsymbol{j} + a_z(t)\, \boldsymbol{k},$$

onde $\bar{i}$, $\bar{j}$ e $\bar{k}$ são vetores unitários (ortos) dos eixos coordinados Ox, Oy e Oz.

A derivada da função vetorial $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t)$ em relação ao argumento escalar t é uma nova função vetorial determinada pela igualdade

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{a}(t+\Delta t) - \boldsymbol{a}(t)}{\Delta t} = \frac{da_x(t)}{dt}\, \boldsymbol{i} + \frac{da_y(t)}{dt}\, \boldsymbol{j} + \frac{da_z(t)}{dt}\, \boldsymbol{k}.$$

O módulo da derivada da função vetorial é igual a

$$\left| \frac{d\boldsymbol{a}}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{da_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{da_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{da_z}{dt}\right)^2}.$$

O extremo do raio vetor variável $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ descreve no espaço uma curva

$$\boldsymbol{r} = x(t)\, \boldsymbol{i} + y(t)\, \boldsymbol{j} + z(t)\, \boldsymbol{k},$$

que recebe o nome de *hodógrafo* do vetor $\boldsymbol{r}$.

A derivada $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ representa um vetor, tangente ao hodógrafo no ponto correspondente, sendo

$$\left| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right| = \frac{ds}{dt},$$

onde s é o comprimento do arco do hodógrafo, tomado desde um ponto inicial. Em particular $\left| \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} \right| = 1$.

Se o parâmetro t é o tempo, $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v}$ é o *vetor da velocidade* do extremo do vetor $\boldsymbol{r}$ e

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{w}$$

é o *vetor de aceleração* deste extremo.

2°. Regras principais para a derivação de funções vetoriais de um argumento escalar.

1) $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}-\frac{d\boldsymbol{c}}{dt}$;

2) $\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{a})=m\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}$, onde m é um escalar constante;

3) $\frac{d}{dt}(\varphi\boldsymbol{a})=\frac{d\varphi}{dt}\boldsymbol{a}+\varphi\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}$, onde $\varphi(t)$ é uma função escalar de t;

4) $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{ab})=\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}$;

5) $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}$;

6) $\frac{d}{dt}\boldsymbol{a}[\varphi(t)]=\frac{d\boldsymbol{a}}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}$;

7) $\boldsymbol{a}\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}=0$, se $|\boldsymbol{a}|=\text{const}$.

Exemplo 1. O raio vetor de um ponto móvel é dado, em qualquer instante do tempo, pela equação

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}-4t^2\boldsymbol{j}+3t^2\boldsymbol{k}. \tag{1}$$

Determinar a trajetória, velocidade e aceleração do movimento.

Solução. Da equação (1) temos:

$$x=1,\quad y=-4t^2,\quad z=3t^2.$$

Eliminando o tempo t, temos que a trajetória do movimento é uma linha reta

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y}{-4}=\frac{z}{3}.$$

Derivando a expressão (1), achamos a velocidade do movimento

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=-8t\boldsymbol{j}+6t\boldsymbol{k}$$

e a aceleração do mesmo

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=-8\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}.$$

A grandeza da velocidade é igual a

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|=\sqrt{(-8t)^2+(6t)^2}=10\,|t|.$$

Notemos que a aceleração é constante e tem a seguinte grandeza:

$$\left|\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right|=\sqrt{(-8)^2+6^2}=10.$$

2078. Demonstrar que a equação vetorial $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1=(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\,t$, onde $\boldsymbol{r}_1$ e $\boldsymbol{r}_2$ são os raios vetores de dois pontos dados, é a equação de uma reta.

2079. Determinar que linhas são os hodógrafos das seguintes funções vetoriais:

a) $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}t+\boldsymbol{c}$; c) $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}\cos t+\boldsymbol{b}\operatorname{sen} t$;

b) $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}t^2+\boldsymbol{b}t$; d) $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}\cosh t+\boldsymbol{b}\operatorname{senh} t$,

onde $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ são vetores constantes, ao mesmo tempo que os vetores $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ são perpendiculares entre si.

2080. Achar a derivada de função vetorial da função $\boldsymbol{a}(t) = a(t)\,\boldsymbol{a}^0(t)$, onde $a(t)$ é uma função escalar e $\boldsymbol{a}^0(t)$ é um vetor unitario, nos casos em que o vetor $\boldsymbol{a}(t)$ varia: 1) somente em comprimento; 2) somente em direção; 3) em comprimento e direção (caso geral). Esclarecer o sentido geométrico dos resultados obtidos.

2081. Aplicando as regras para a derivação de função vetorial de um argumento escalar, deduzir a fórmula para a derivação do produto misto de três funções vetoriais, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$.

2082. Achar a derivada em relação ao parâmetro t, do volume do paralelepípedo construído sobre três vetores:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}; \quad \boldsymbol{b} = 2t\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}; \quad \boldsymbol{c} = -t^2\boldsymbol{i} + t^3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}.$$

2083. A equação de um movimento é

$$\boldsymbol{r} = 3\boldsymbol{i} \cos t + 4\boldsymbol{j} \operatorname{sen} t,$$

onde t é o tempo. Determinar a trajetória deste movimento, a velocidade e a aceleração do mesmo. Construir a trajetória do movimento e os vetores da velocidade e da aceleração para os instantes $t = 0$, $t = \frac{\pi}{4}$ e $t = \frac{\pi}{2}$.

2084. A equação de um movimento é

$$\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{i} \cos t + 2\boldsymbol{j} \operatorname{sen} t + 3\boldsymbol{k}t.$$

Determinar a trajetória, velocidade e aceleração deste movimento. A que são iguais a grandeza da velocidade e da aceleração do movimento e quais são suas direções nos instantes $t = 0$ e $t = \frac{\pi}{2}$?

2085. A equação de um movimento é

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i} \cos \alpha \cos \omega t + \boldsymbol{j} \operatorname{sen} \alpha \cos \omega t + \boldsymbol{k} \operatorname{sen} \omega t,$$

onde α e ω são constantes e t é o tempo. Determinar a trajetória do movimento, a grandeza e a direção da velocidade e a aceleração do movimento.

2086. A equação do movimento de um projétil (desprezando-se a resistência do ar) é

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_0 t - \frac{gt^2}{2}\boldsymbol{k},$$

onde $\boldsymbol{v}_0\{v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}\}$ é a velocidade inicial. Achar a velocidade e a aceleração num instante qualquer.

2087. Demonstrar que se um ponto se move pela parábola $y = \frac{x^2}{a}$, $z = 0$ de tal forma que a projeção da velocidade sobre o eixo OX se mantém constante $\left(\frac{dx}{dt} = \text{const}\right)$, a aceleração também se manterá constante.

2088. Um ponto situado na rosca de uma tarraxa, que se enrosca numa viga, descreve uma linha helicoidal

$$x = a \cos \theta, \quad y = a \operatorname{sen} \theta, \quad z = h\theta,$$

onde θ é o ângulo de giro da tarraxa, a, o raio da mesma e h, a elevação correspondente ao giro de um radiano. Determinar a velocidade do movimento do ponto.

2089. Achar a velocidade de um ponto da circunferência de uma roda de raio a, que gira com uma velocidade angular constante ω de tal forma, que seu centro se desloca em linha reta com uma velocidade constante v_0.

§ 19. Triedro intrínseco da curva no espaço

Em todo ponto $M(x, y, z)$ que não seja singular, de uma curva no espaço $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, pode-se construir um *triedro intrínseco* formado por três planos perpendiculares entre si (fig. 84):

1) o plano *osculador* MM_1M_2, no qual situam-se os vetores $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ e $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$;

2) o plano *normal* MM_2M_3, perpendicular ao vetor $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$, e

3) o plano *retificante* MM_1M_3, perpendicular aos dois primeiros planos.

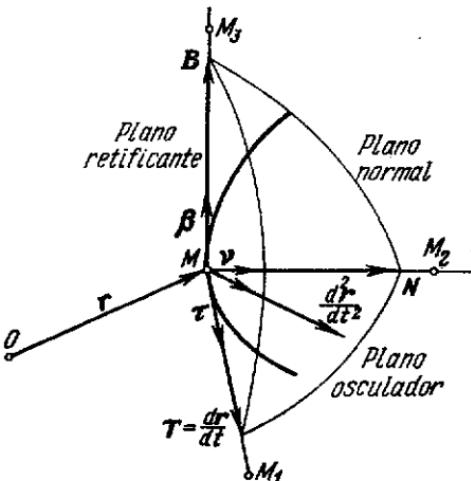



FIG. 84

As interseções destes três planos formam três retas: 1) *a tangente* MM_1; 2) *a normal principal* MM_2 e 3) *a binormal* MM_3, que se determinam, respectivamente, pelos vetores:

1) $\boldsymbol{T} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ *(vetor da tangente)*;

2) $\boldsymbol{B} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$ *(vetor da binormal)*, e

3) $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{T}$ *(vetor da normal principal)*.

Os vetores unitários correspondentes

$$\tau = \frac{T}{|T|}; \quad \beta = \frac{B}{|B|}; \quad \nu = \frac{N}{|N|}$$

podem ser calculados pelas fórmulas

$$\tau = \frac{dr}{ds}; \quad \nu = \frac{\frac{d\tau}{ds}}{\left|\frac{d\tau}{ds}\right|}; \quad \beta = \tau \times \nu.$$

Se X, Y, Z são as coordenadas variáveis do ponto da tangente, as equações desta tangente no ponto $M(x, y, z)$ terão a forma

$$\frac{X - x}{T_x} = \frac{Y - y}{T_y} = \frac{Z - z}{T_z}, \tag{1}$$

onde $T_x = \frac{dx}{dt}$, $T_y = \frac{dy}{dt}$, $T_z = \frac{dz}{dt}$; partindo da condição de perpendicularidade da reta e do plano, obtemos a equação do plano normal:

$$T_x(X - x) + T_y(Y - y) + T_z(Z - z) = 0. \tag{2}$$

Substituindo nas equações (1) e (2) T_x, T_y, T_z por B_x, B_y, B_z e N_x, N_y, N_z, obtemos as equações das retas binormal e normal principal e, respectivamente, dos planos osculador e retificante.

Exemplo 1. Achar os vetores unitários principais τ, ν e β da curva

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3$$

no ponto $t = 1$.

Escrever as equações da tangente, normal principal e binormal neste ponto.

Solução. Temos:

$$r = ti + t^2j + t^3k$$

e

$$\frac{dr}{dt} = i + 2tj + 3t^2k,$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = 2j + 6tk.$$

Portanto, para $t = 1$ obtemos:

$$T = \frac{dr}{dt} = i + 2j + 3k;$$

$$B = \frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 6i - 6j + 2k;$$

$$N = B \times T = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -22i - 16j + 18k.$$

Assim,

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}}{\sqrt{14}}, \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{3\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{\sqrt{19}}, \quad \boldsymbol{\nu} = \frac{-11\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j} + 9\boldsymbol{k}}{\sqrt{266}}.$$

Como para $t = 1$, temos $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, então

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$$

são equações da tangente,

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{1}$$

são equações da binormal e

$$\frac{x-1}{-11} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-1}{9}$$

são equações da normal principal.

Se a curva no espaço é dada como a interseção das duas superfícies

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0,$$

em lugar dos vetores $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ e $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$ podemos tomar os vetores $d\boldsymbol{r}\{dx, dy, dz\}$ e $d^2\boldsymbol{r}\{d^2x, d^2y, d^2z\}$, podendo-se considerar uma das variáveis x, y, z como independente e supor que sua segunda diferencial é igual a zero.

Exemplo 2. Escrever a equação do plano osculador da circunferência

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6, \quad x + y + z = 0 \tag{3}$$

no ponto $M(1;\ 1;\ -2)$.

Solução. Diferenciando o sistema (3), como se x fosse variável independente, teremos:

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0,$$
$$dx + dy + dz = 0$$

e

$$dx^2 + dy^2 + y\,d^2y + dz^2 + z\,d^2z = 0,$$
$$d^2y + d^2z = 0.$$

Fazendo $x = 1$, $y = 1$, $z = -2$, teremos:

$$dy = -dx; \qquad dz = 0;$$

$$d^2y = -\frac{2}{3}dx^2, \quad d^2z = \frac{2}{3}dx^2.$$

Portanto, o plano osculador é determinado pelos vetores

$$\{dx, -dx, 0\} \quad \text{e} \quad \left\{0, -\frac{2}{3}dx^2, \frac{2}{3}dx^2\right\}$$

ou

$$\{1, -1, 0\} \quad \text{e} \quad \{0, -1, 1\}.$$

Donde o vetor normal ao plano osculador é

$$\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$$

e, assim, sua equação será

$$-1(x-1)-(y-1)-(z+2)=0, \quad \text{isto é,} \quad x+y+z=0,$$

como deveria ocorrer, já que nossa curva se encontra neste plano.

2090. Achar os vetores unitários principais $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ da curva

$$x = 1 - \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad z = t$$

no ponto $t = \frac{\pi}{2}$.

2091. Achar os vetores unitários da tangente e normal principal da espiral cônica

$$\boldsymbol{r} = e^t(\boldsymbol{i} \cos t + \boldsymbol{j} \operatorname{sen} t + \boldsymbol{k})$$

em um ponto arbitrário. Determinar os ângulos que formam estas retas com o eixo OZ.

2092. Achar os vetores unitários principais $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ da curva

$$y = x^2, \quad z = 2x$$

no ponto $x = 2$.

2093. Dada a linha helicoidal

$$x = a \cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t, \quad z = bt,$$

escrever as equações das retas que formam as arestas do triedro intrínseco em um ponto arbitrário desta linha. Determinar os co-senos diretores da tangente e da normal principal.

2094. Escrever as equações dos planos que formam o triedro intrínseco da curva

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6, \quad x^2 - y^2 + z^2 = 4,$$

no ponto $M(1;\ 1;\ 2)$.

2095. Achar as equações da tangente, do plano normal e do plano osculador da curva

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3$$

no ponto $M(2;\ 4;\ 8)$.

2096. Achar as equações da tangente, da normal principal e da binormal num ponto arbitrário da curva

$$x = \frac{t^4}{4}, \quad y = \frac{t^3}{3}, \quad z = \frac{t^2}{2}.$$

Achar os pontos em que a tangente a esta curva é paralela ao plano $x + 3y + 2z - 10 = 0$.

2097. Achar as equações da tangente, do plano osculador, da normal principal e da binormal da curva

$$x = t, \quad y = -t, \quad z = \frac{t^2}{2}$$

no ponto $t = 2$. Calcular os co-senos diretores da binormal neste ponto.

2098. Escrever as equações da tangente e do plano normal às seguintes curvas:

a) $x = R\cos^2 t$, $y = R \operatorname{sen} t \cos t$, $z = R \operatorname{sen} t$, quando $t = \frac{\pi}{4}$ $(R > 0)$;

b) $z = x^2 + y^2$, $x = y$ no ponto $(1; 1; 2)$;

c) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $x + z = 5$ no ponto $(2; 2\sqrt{3}; 3)$.

2099. Achar a equação do plano normal à curva $z = x^2 - y^2$, $y = x$ na origem das coordenadas.

2100. Achar a equação do plano osculador à curva $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$ no ponto $t = 0$.

2101. Achar as equações do plano osculador às curvas:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x^2 - y^2 = 3$ no ponto $(2; 1; 2)$;

b) $x^2 = 4y$, $x^3 = 24z$ no ponto $(6; 9; 9)$;

c) $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = b^2$ em qualquer ponto da curva (x_0, y_0, z_0).

2102. Achar as equações do plano osculador, da normal principal e da binormal à curva

$$y^2 = x, \quad x^2 = z \text{ no ponto } (1; 1; 1).$$

2103. Achar as equações do plano osculador, da normal principal e da binormal à linha helicoidal cônica $x = t\cos t$, $y = t \operatorname{sen} t$, $z = bt$, na origem das coordenadas. Achar os vetores unitários da tangente, da normal principal e da binormal, na origem das coordenadas.

§ 20. Curvatura de flexão e torsão de uma curva no espaço

1°. Curvatura de flexão. Entende-se por *curvatura de flexão* de uma curva regular no ponto M, o número

$$K = \frac{1}{R} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\varphi}{\Delta s},$$

onde φ é o ângulo de giro da tangente *(ângulo de contingência)* no segmento de curva $\overset{\frown}{MN}$ e Δs, o comprimento do arco deste segmento de curva. R se chama *raio de curvatura de flexão*. Se a curva é dada pela equação $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, onde s é o comprimento do arco, então teremos:

$$\frac{1}{R} = \left| \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} \right|.$$

No caso em que a curva é dada em forma paramétrica geral, temos:

$$\frac{1}{R} = \frac{\left| \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \right|}{\left| \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right|^3}. \tag{1}$$

2°. **Curvatura de torsão.** Entende-se por *curvatura de torsão* de uma curva no ponto M, o número

$$T = \frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\theta}{\Delta s},$$

onde θ é o ângulo de giro da binormal *(ângulo de contingência de 2° grau)* no segmento de curva $\overset{\frown}{MN}$. A grandeza ρ se chama *raio de curvatura de torsão* de 2° grau. Se $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, temos

$$\frac{1}{\rho} = \mp \left| \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} \right| = \frac{\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds} \dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} \dfrac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}}{\left(\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} \right)^2},$$

onde o sinal negativo é tomado, quando os vetores $\dfrac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}$ e $\boldsymbol{\nu}$ têm a mesma direção, e o sinal positivo, em caso contrário.

Se $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, onde t é um parâmetro arbitrário, teremos:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} \dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \dfrac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}}{\left(\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \right)^2}. \tag{2}$$

Exemplo 1. Achar as curvaturas de flexão e de torsão da linha helicoidal

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\, a \cos t + \boldsymbol{j}\, a \operatorname{sen} t + \boldsymbol{k}\, bt \quad (a > 0).$$

Solução. Temos

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = -\boldsymbol{i}\, a \operatorname{sen} t + \boldsymbol{j}\, a \cos t + \boldsymbol{k} b,$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\boldsymbol{i}\, a \cos t - \boldsymbol{j}\, a \operatorname{sen} t,$$

$$\frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3} = -\boldsymbol{i}\, a \operatorname{sen} t - \boldsymbol{j}\, a \cos t.$$

Daí

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a \operatorname{sen} t & a \cos t & b \\ -a \cos t & -a \operatorname{sen} t & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\, ab \operatorname{sen} t - \mathbf{j}\, ab \cos t + a^2 \mathbf{k}$$

e

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} = \begin{vmatrix} -a \operatorname{sen} t & a \cos t & b \\ -a \cos t & -a \operatorname{sen} t & 0 \\ a \operatorname{sen} t & -a \cos t & 0 \end{vmatrix} = a^2 b.$$

Portanto, baseando-se nas fórmulas (1) e (2), obtemos:

$$\frac{1}{R} = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(a^2+b^2)^{3/2}} = \frac{a}{a^2+b^2}$$

e

$$\frac{1}{\rho} = \frac{a^2 b}{a^2(a^2+b^2)} = \frac{b}{a^2+b^2},$$

isto é, para a linha helicoidal as curvaturas de flexão e de torsão são constantes.

3°. **Fórmulas de Frenet**

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{\boldsymbol{\nu}}{R}, \quad \frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds} = -\frac{\boldsymbol{\tau}}{R} + \frac{\boldsymbol{\beta}}{\rho}, \quad \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = -\frac{\boldsymbol{\nu}}{\rho}.$$

2104. Demonstrar que se a curvatura de flexão é igual a zero em todos os pontos de uma linha, esta é uma reta.

2105. Demonstrar que se a curvatura de torsão é igual a zero em todos os pontos, esta é uma curva plana.

2106. Demonstrar que a curva

$$x = 1 + 3t + 2t^2, \quad y = 2 - 2t + 5t^2, \quad z = 1 - t^2$$

é plana; achar o plano em que se encontra.

2107. Calcular a curvatura das linhas:

a) $x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t,\ z = \cosh t$, quando $t = 0$;

b) $x^2 - y^2 + z^2 = 1,\ y^2 - 2x + z = 0$ no ponto $(1;\ 1;\ 1)$.

2108. Calcular as curvaturas de flexão e torsão das seguintes curvas em qualquer ponto:

a) $x = e^t \cos t,\ y = e^t \operatorname{sen} t,\ z = e^t$;

b) $x = a \cosh t,\ y = a \operatorname{senh} t,\ z = at$ ($a > 0$; *linha helicoidal hiperbólica*).

2109. Achar os raios de curvatura de flexão e torsão das seguintes linhas em um ponto arbitrário (x, y, z) (os parâmetros são positivos):

a) $x^2 = 2ay, \quad x^3 = 6a^2 z$;

b) $x^3 = 3p^2 y,\ 2xz = p^2$.

2110. Demonstrar que as componentes tangencial e normal do vetor de aceleração $\boldsymbol{w}$ se expressam pelas fórmulas

$$\boldsymbol{w}_{\tau} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{w}_{\nu} = \frac{v^2}{R}\boldsymbol{\nu},$$

onde v é a velocidade; R, o raio da curvatura de flexão da trajetória; $\boldsymbol{\tau}$ e $\boldsymbol{\nu}$, os vetores unitários da tangente e da normal principal à curva.

2111. Pela linha helicoidal $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\, a \cos t + \boldsymbol{j}\, a \operatorname{sen} t + bt\,\boldsymbol{k}$ move-se uniformemente um ponto com velocidade v. Calcular sua aceleração w.

2112. A equação de um movimento é

$$\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}.$$

Determinar nos instantes $t = 0$ e $t = 1$: 1) a curvatura de flexão de trajetória e 2) as componentes tangencial e normal do vetor de aceleração do movimento.

Capítulo VII

INTEGRAIS MÚLTIPLAS E CURVILÍNEAS

§ 1. Integral dupla em coordenadas retangulares

1°. **Cálculo imediato de integrais duplas.** Chama-se *integral dupla* de uma função contínua $f(x, y)$, sobre um recinto fechado e restrito S do plano XOY, o limite da soma integral dupla correspondente

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\substack{\text{máx }\Delta x_i \to 0 \\ \text{máx }\Delta y_k \to 0}} \sum_i \sum_k f(x_i, y_k)\,\Delta x_i \Delta y_k, \tag{1}$$

onde $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ e a soma se estende aos valores de i e k para os quais os pontos $(x_i; y_k)$ pertencem ao campo S.

2°. **Colocação dos limites de integração na integral dupla.** Distinguem-se duas formas principais de campos de integração:

1) O campo de integração S (fig. 85) está limitado à esquerda e à direita pelas retas $x = x_1$ e $x = x_2$ $(x_2 > x_1)$, enquanto que por baixo e por cima está limitado pelas curvas contínuas $y = \varphi_1(x)$ (AB) e $y = \varphi_2 x(CD)$ $[\varphi_2(x) \geqslant \varphi_1(x)]$, cada uma das quais é cortada pela vertical $x = X(x_1 < X < x_2)$ em um só ponto (ver a fig. 85). No campo S a variável x varia desde x_1 até x_2 e a variável y, quando x permanece constante, varia entre $y_1 = \varphi_1(x)$ até $y_2 = \varphi_2(x)$. O cálculo da integral (1) pode ser feito reduzindo-a a uma integral reiterada da forma

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy,$$

onde ao calcular $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy$ se considera x como grandeza constante.

2) O campo de integração S está limitado por baixo e por cima pelas retas $y = y_1$ e $y = y_2$ $(y_2 > y_1)$, enquanto que pela esquerda e pela direita está limitado pelas curvas contínuas $x = \psi_1(y)$ (AB) e $x = \psi_2(y)$ (CD) $[\psi_2(y) \geqslant \psi_1(y)]$, cada uma das quais é cortada em um só ponto pela horizontal $y = Y$ $(y_1 < Y < y_2)$ (fig. 86).

Analogamente ao caso anterior, temos:

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{y_1}^{y_2} dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx,$$

onde ao calcular a integral $\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx$ se considera y como grandeza constante.

Se o campo de integração não pertence a nenhuma das formas anteriormente examinadas, procura-se dividí-lo em partes, de forma que cada uma delas corresponda a alguma daquelas formas.

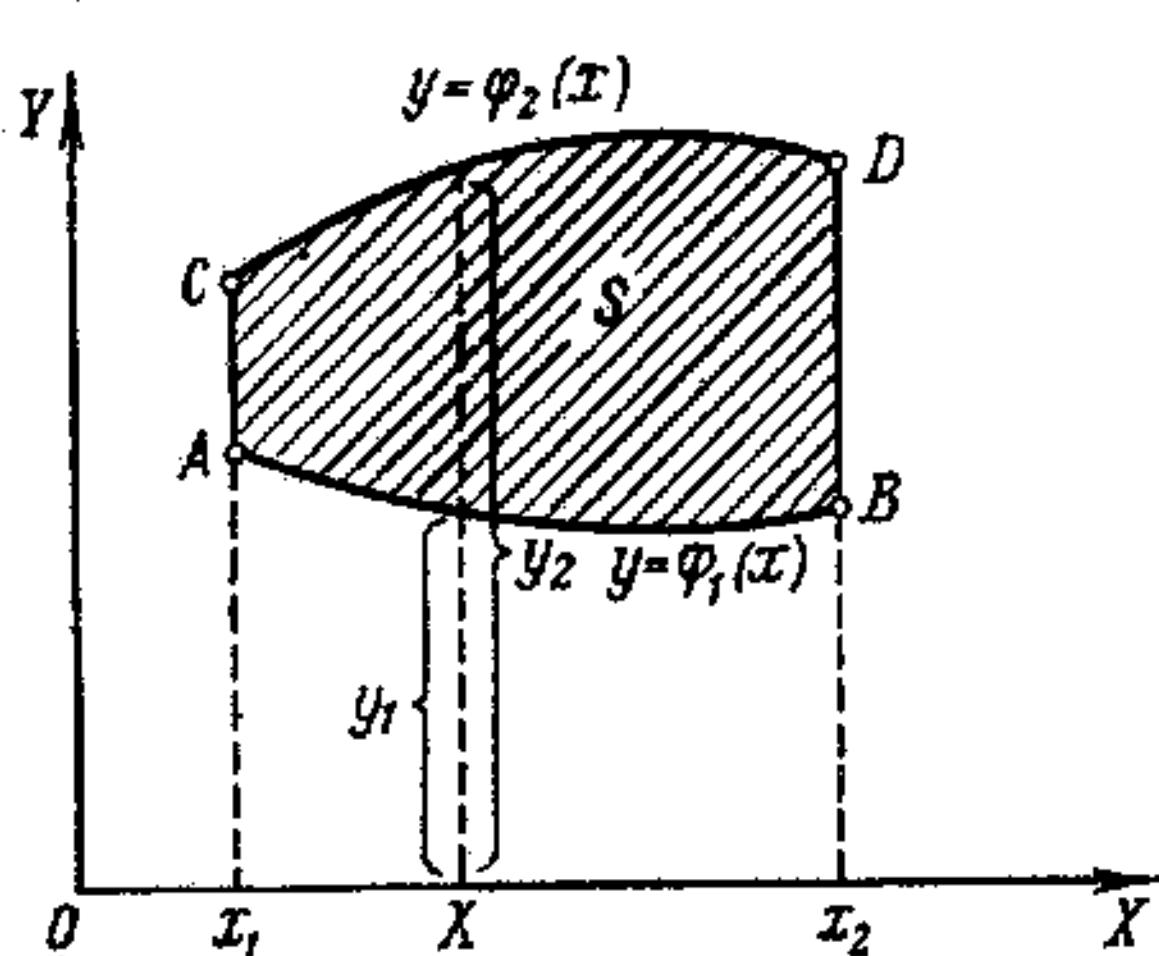
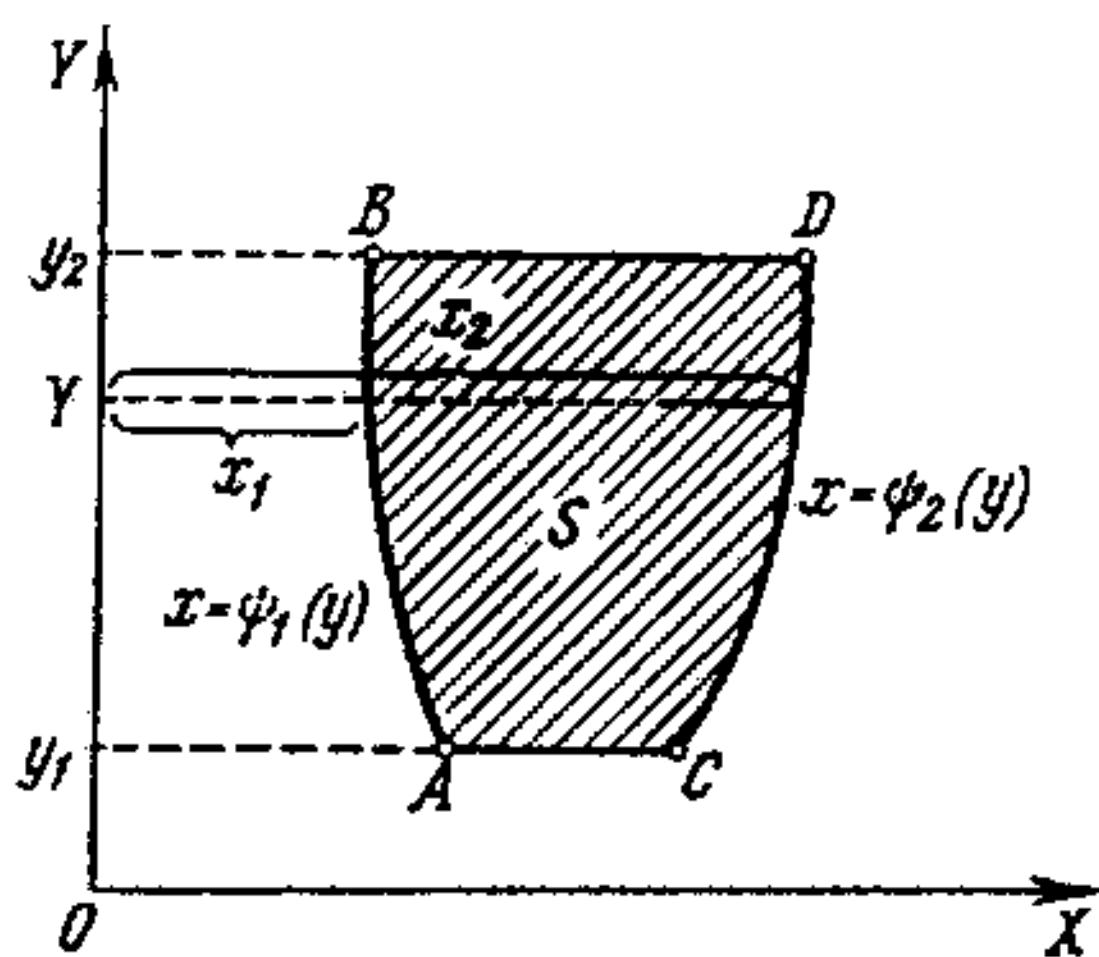



FIG. 85 FIG. 86

Exemplo 1. Calcular a integral

$$I = \int_0^1 dx \int_x^1 (x + y)\, dy.$$

Solução.

$$I = \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=x}^{y=1} dx = \int_0^1 \left[\left(x + \frac{1}{2}\right) - \left(x^2 + \frac{x^2}{2}\right)\right] dx = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 2. Determinar os limites de integração da integral

$$\iint_{(S)} f(x, y)\, dx\, dy,$$

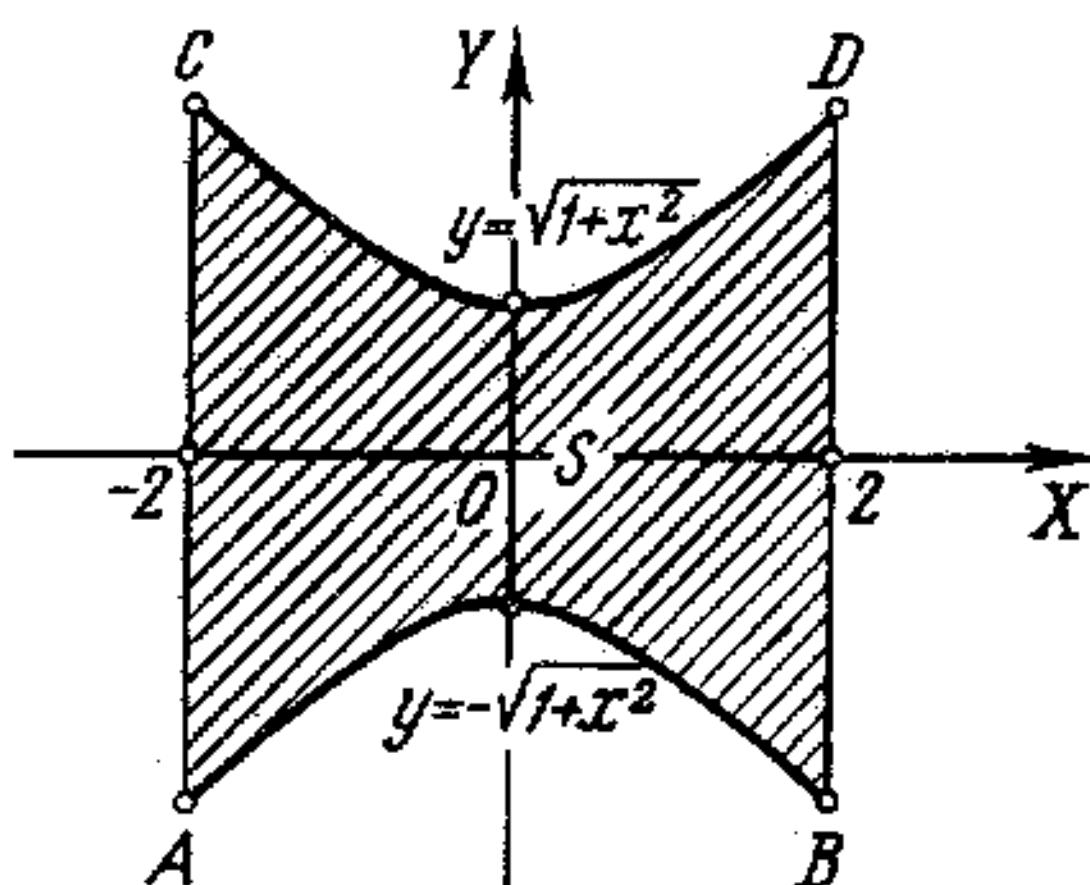



FIG. 87

se o campo de integração S (fig. 87) está limitado pela hipérbole $y^2 - x^2 = 1$ e pelas duas retas $x = 2$ e $x = -2$ (considera-se o campo que compreende a origem das coordenadas).

Solução. O campo de integração $ABDC$ (fig. 87) está limitado pelas duas retas $x = -2$ e $x = 2$ e por dois ramos da hipérbole

$$y = \sqrt{1 + x^2} \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{1 + x^2},$$

isto é, pertence à primeira forma. Temos:

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x, y)\, dy.$$

Calcular as seguintes integrais reiteradas:

2113. $\int_0^2 dy \int_0^1 (x^2 + 2y)\, dx.$

2114. $\int_3^4 dx \int_1^2 \frac{dy}{(x + y)^2}.$

2115. $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2\, dy}{1 + y^2}.$

2116. $\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2\, dy}{y^2}.$

2117. $\int_{-3}^{3} dy \int_{y^2-4}^{5} (x + 2y)\, dx.$

2118. $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{a \operatorname{sen} \varphi}^{a} r\, dr.$

2119. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{3 \cos \varphi} r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi\, dr.$

2120. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dy.$

Escrever as equações das linhas que limitam os campos a que se estendem as integrais reiteradas abaixo indicadas e desenhar estes campos:

2121. $\int_{-6}^{2} dy \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x, y)\, dx$

2122. $\int_1^3 dx \int_{x^2}^{x+9} f(x, y)\, dy.$

2123. $\int_0^4 dy \int_y^{10-y} f(x, y)\, dx.$

2124. $\int_1^3 dx \int_{\frac{x}{3}}^{2x} f(x, y)\, dy.$

2125. $\int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y)\, dy.$

2126. $\int_{-1}^{2} dx \int_{x^2}^{x+2} f(x, y)\, dy.$

Colocar os limites de integração, em uma ou outra ordem, na integral dupla

$$\iint_{(S)} f(x, y)\, dx\, dy$$

para os campos S seguintes:

2127. S é um retângulo com vértices $O(0; 0)$, $A(2; 0)$, $B(2; 1)$, $C(0; 1)$.

2128. S é um triângulo com vértices $O(0; 0)$, $A(1; 0)$, $B(1; 1)$.

2129. S é um trapézio com vértices $O(0; 0)$, $A(2; 0)$, $B(1; 1)$, $C(0; 1)$.

2130. S é um paralelogramo com vértices $A(1; 2)$, $B(2; 4)$, $C(2; 7)$, $D(1; 5)$.

2131. S é um setor circular OAB com centro no ponto $O(0; 0)$, cujo arco tem seus extremos em $A(1; 1)$ e $B(-1; 1)$ (fig. 88).

2132. S é um segmento parabólico reto AOB, limitado pela parábola BOA e pelo segmento de reta BA, que une entre si os pontos $B(-1; 2)$ e $A(1; 2)$ (fig. 89).

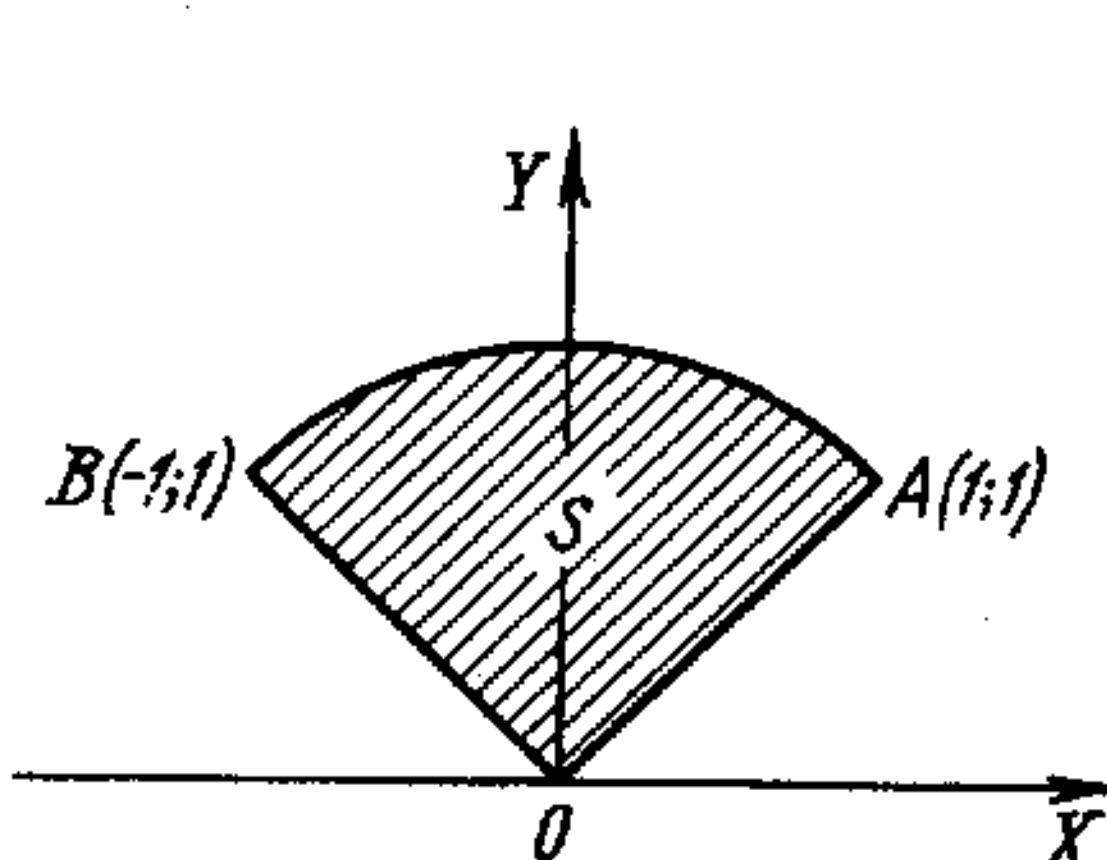
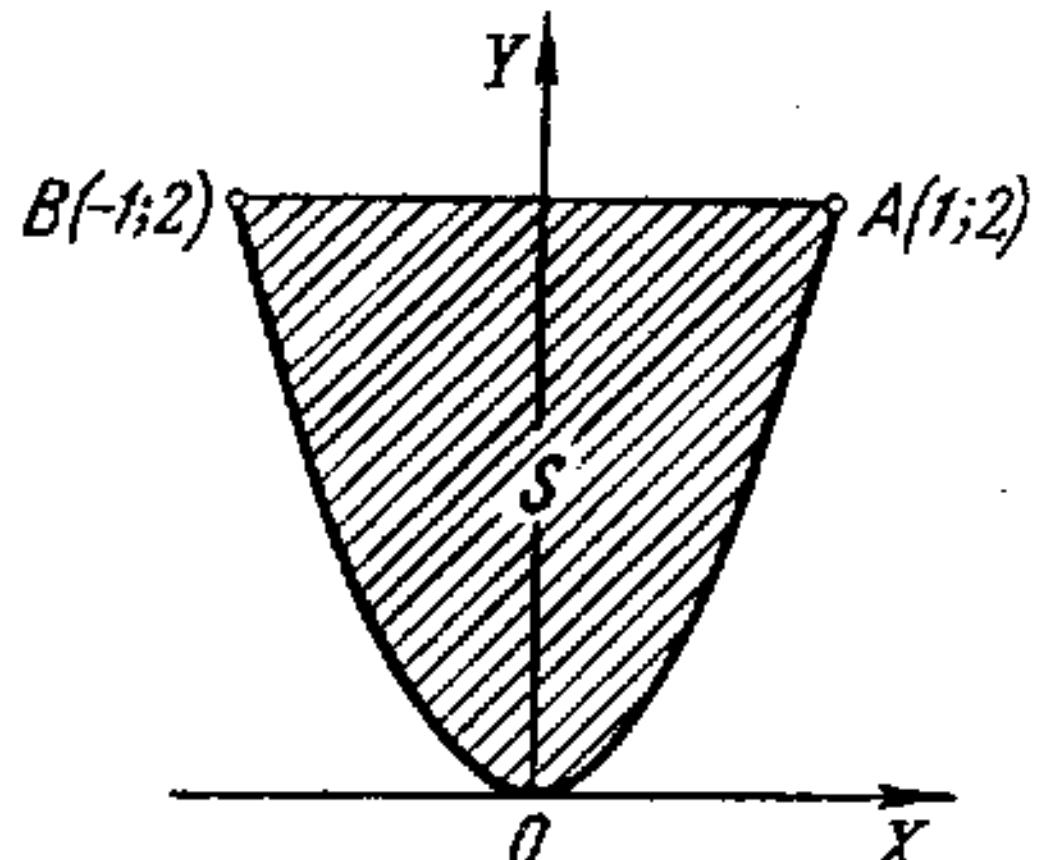



FIG. 88 FIG. 89

2133. S é um anel circular limitado pelas circunferências, cujos raios são $r = 1$ e $R = 2$ e cujo centro comum situa-se no ponto $O(0; 0)$.

2134. S está limitado pela hipérbole $y^2 - x^2 = 1$ e pela circunferência $x^2 + y^2 = 9$ (considera-se o campo que compreende a origem das coordenadas).

2135. Colocar os limites de integração na integral dupla

$$\iint_{(S)} f(x, y) dx\, dy,$$

se o campo S está determinado pelas seguintes desigualdades:

a) $x \geqslant 0$; $y \geqslant 0$; $x + y \leqslant 1$;

b) $x^2 + y^2 \leqslant a^2$;

c) $x^2 + y^2 \leqslant x$;

d) $y \geqslant x$; $x \geqslant -1$; $y \leqslant 1$;

e) $y \leqslant x \leqslant y + 2a$; $0 \leqslant y \leqslant a$.

Inverter a ordem de integração das seguintes integrais reiteradas:

2136. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{3x^2}^{12x} f(x, y)\, dy$.

2137. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x}^{3x} f(x, y)\, dy$.

2138. $\int\limits_0^a dx \int\limits_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y)\, dy$.

2139. $\int\limits_{\frac{a}{2}}^a dx \int\limits_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x, y)\, dy$.

2140. $\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x, y)\, dy$.

2141. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y)\, dx$.

2142. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y)\, dx$.

2143. $\int\limits_0^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} dx \int\limits_0^x f(x, y) dy + \int\limits_{\frac{R\sqrt{2}}{2}}^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x, y)\, dy$

2144. $\int\limits_0^\pi dx \int\limits_0^{\operatorname{sen} x} f(x, y)\, dy$.

Calcular as seguintes integrais duplas:

2145. $\iint\limits_{(S)} x\, dx\, dy$, onde S é um triângulo cujos vértices são $O(0;\, 0)$, $A(1;\, 1)$ e $B(0;\, 1)$.

2146. $\iint\limits_{(S)} x\, dx\, dy$, onde o campo de integração S é limitado pela reta que passa pelos pontos $A(2;\, 0)$, $B(0;\, 2)$ e pelo arco de circunferência de raio 1 que tem seu centro no ponto $C(0;\, 1)$ (fig. 90).

2147. $\iint\limits_{(S)} \frac{dx\, dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$, onde S é a parte do círculo de raio a com centro no ponto $O(0;\, 0)$, situado no primeiro quadrante.

2148. $\iint\limits_{(S)} \sqrt{x^2 - y^2}\, dx\, dy$, onde S é um triângulo com os vértices nos pontos $O(0;\ 0)$, $A(1;\ -1)$ e $B(1;\ 1)$.

2149. $\iint\limits_{(S)} \sqrt{xy - y^2}\, dx\, dy$, onde S é um triângulo com os vértices nos pontos $O(0;\ 0)$, $A(10;\ 1)$ e $B(1;\ 1)$.

2150. $\iint\limits_{(S)} e^{\frac{x}{y}}\, dx\, dy$, onde S é um triângulo mistilíneo OAB, limitado pela parábola $y^2 = x$ e pelas retas $x = 0$, $y = 1$ (fig. 91).

2151. $\iint\limits_{(S)} \frac{x\, dx\, dy}{x^2 + y^2}$, onde S é um segmento parabólico, limitado pela parábola $y = \frac{x^2}{2}$ e pela reta $y = x$.

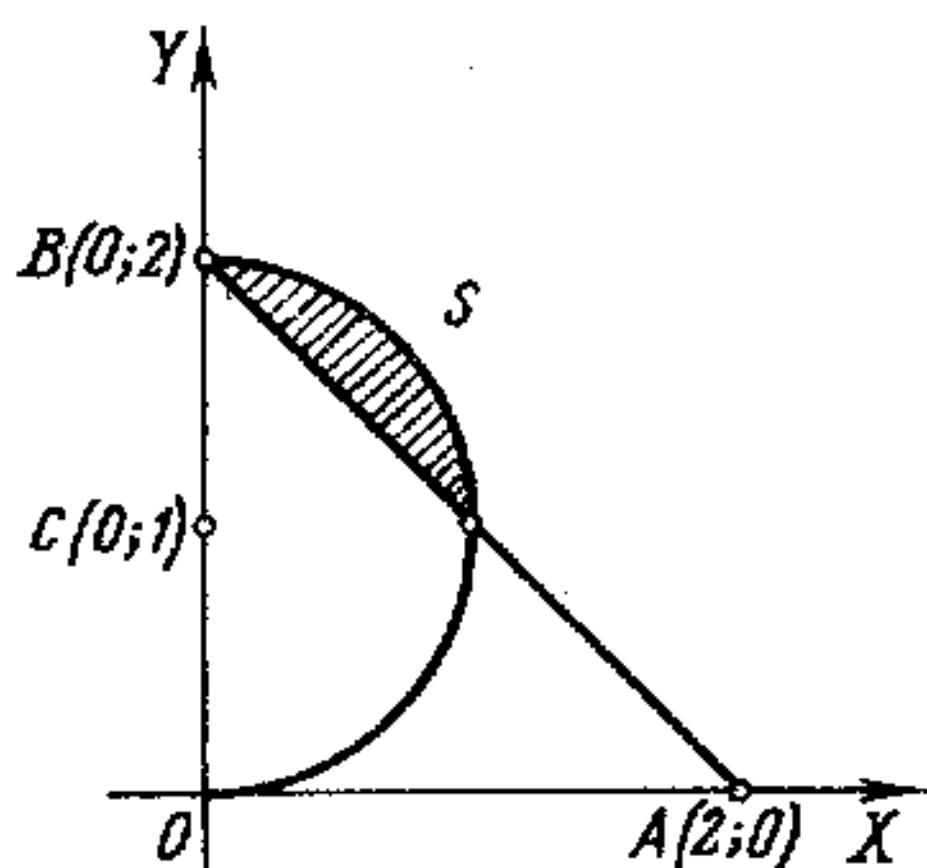



FIG. 90

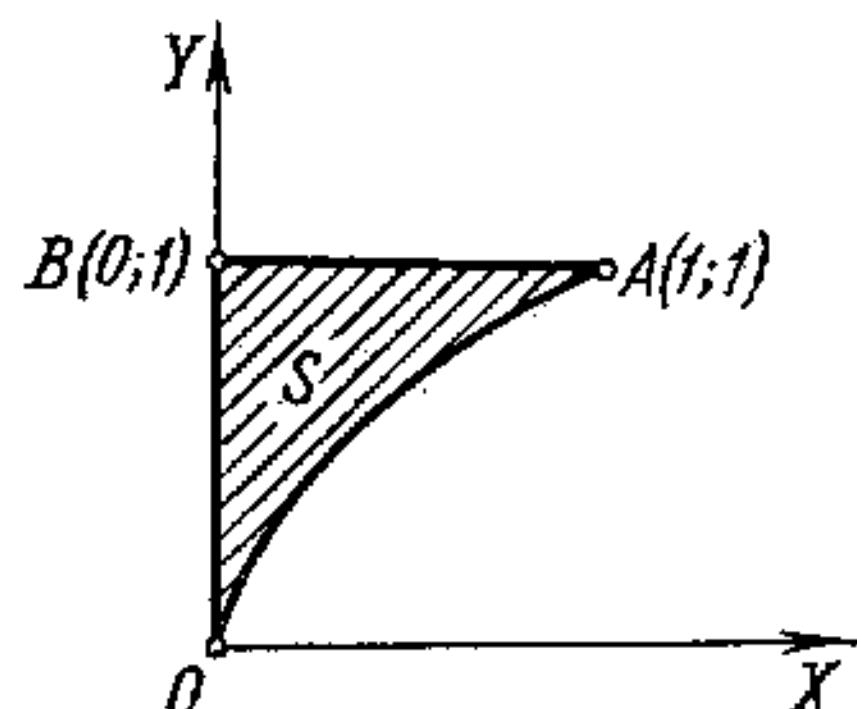



FIG. 91

2152. Calcular as seguintes integrais e desenhar os campos a que se estendem:

a) $\int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{1-\cos x} y^2 \operatorname{sen} x\, dy$;

b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_{\cos x}^{1} y^4\, dy$,

c) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int\limits_0^{3\cos y} x^2 \operatorname{sen}^2 y\, dx$.

Antes de resolver os problemas **2153—2157** recomenda-se fazer os desenhos correspondentes.

2153. Calcular a integral dupla

$$\iint\limits_{(S)} xy^2\,dx\,dy,$$

se S é um campo limitado pela parábola $y^2 = 2px$ e pela reta $x = p$.

2154*. Calcular a integral dupla

$$\iint\limits_{(S)} xy\,dx\,dy,$$

que se estende pelo campo S, limitado pelo eixo OX e pela semicircunferência superior $(x-2)^2 + y^2 = 1$.

2155. Calcular a integral dupla

$$\iint\limits_{(S)} \frac{dx\,dy}{\sqrt{2a-x}},$$

onde S é um círculo de raio a, tangente aos eixos das coordenadas e que se encontra no primeiro quadrante.

2156*. Calcular a integral dupla

$$\iint\limits_{(S)} y\,dx\,dy,$$

onde o campo S está limitado pelo eixo das abscissas e o arco da ciclóide

$$\begin{cases} x = R(t - \operatorname{sen} t), \\ y = R(1 - \cos t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi). \end{cases}$$

2157. Calcular a integral dupla

$$\iint\limits_{(S)} xy\,dx\,dy,$$

onde o campo de integração S está limitado pelos eixos das coordenadas e pelo arco do astróide

$$x = R\cos^3 t, \quad y = R\operatorname{sen}^3 t \quad \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

2158. Achar o valor médio da função $f(x, y) = xy^2$ no campo $S\{0 \leqslant x \leqslant 1;\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

Indicação. Dá-se o nome de *valor médio de uma função* $f(x, y)$ no campo S ao número

$$\bar{f} = \frac{1}{\text{ár. } S} \iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy.$$

2159. Achar o valor médio do quadrado da distância do ponto $M(x, y)$ do círculo $(x-a)^2 + y^2 \leqslant R^2$ desde a origem das coordenadas.

§ 2. Troca de variáveis em integral dupla

1°. Integral dupla em coordenadas polares. Quando na integral dupla se passa das coordenadas retangulares x, y para as coordenadas polares r, φ, relacionadas com as primeiras pelas expressões

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\,\text{sen}\,\varphi,$$

verifica-se a fórmula

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{(S)} f(r\cos\varphi,\ r\,\text{sen}\,\varphi)\,r\,dr\,d\varphi. \tag{1}$$

Se o campo de integração S está limitado pelos raios $r = \alpha$ e $r = \beta$ $(\alpha < \beta)$ e pelas curvas $r = r_1(\varphi)$ e $r = r_2(\varphi)$, onde $r_1(\varphi)$ e $r_2(\varphi)$ $(r_1(\varphi) \leqslant r_2(\varphi))$ são funções contínuas uniformes no segmento $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, a integral dupla pode ser calculada pela fórmula

$$\iint\limits_{(S)} F(\varphi, r)\,r\,dr\,d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(\varphi, r)\,r\,dr,$$

onde $F(\varphi, r) = f(r\cos\varphi,\ r\,\text{sen}\,\varphi)$. Ao calcular a integral $\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(\varphi, r)\,r\,dr$ se considera constante a grandeza φ.

Se o campo de integração não pertence à forma examinada, deve-se dividí-lo em partes, de modo que cada uma delas represente um campo da forma dada.

2°. Integral dupla em coordenadas curvilíneas. No caso mais geral, se $f(x, y)$ é contínua e na integral dupla

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy$$

se quer passar das variáveis x, y às variáveis u, v, relacionadas com aquelas através das expressões contínuas e diferenciáveis

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v),$$

que estabelecem uma correspondência biunívoca e contínua em ambos os sentidos, entre os pontos de campo S do plano XOY e os pontos de um campo determinado S' do plano $UO'V$, no mesmo tempo em que o *determinante de Jacob*

$$I = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\[2mm] \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

conserva invariável seu sinal no campo S, será válida a fórmula

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{(S')} f[\varphi(u, v),\ \psi(u, v)]\,|\,I\,|\,du\,dv.$$

Os limites desta nova integral são determinados conforme as regras gerais, na base da forma que tenha o campo S'.

Exemplo 1. Calcular a integral, passando às coordenadas polares

$$\iint\limits_{(S)} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dx\, dy.$$

onde o campo S é um círculo de raio $R = 1$, com centro na origem das coordenadas (fig. 92).

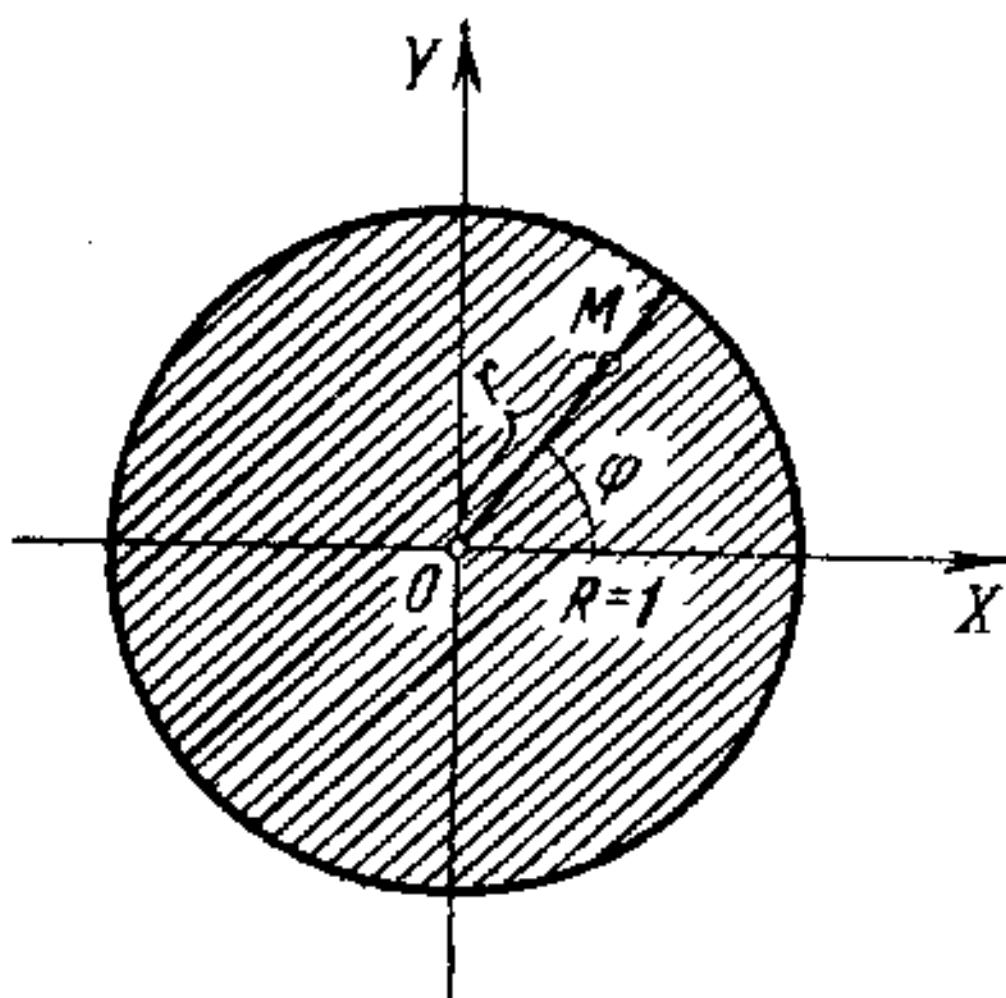



FIG. 92

Solução. Fazendo $x = r\cos\varphi$, $y = r\,\text{sen}\,\varphi$, obtemos:

$$\sqrt{1 - x^2 - y^2} = \sqrt{1 - (r\cos\varphi)^2 - (r\,\text{sen}\,\varphi)^2} = \sqrt{1 - r^2}.$$

Como no campo S a coordenada r varia de 0 a 1, qualquer que seja o valor de φ, enquanto que φ varia de 0 a π, temos

$$\iint\limits_{(S)} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\sqrt{1 - r^2}\, dr = \frac{2}{3}\pi.$$

Passar às coordenadas polares r e φ e colocar os limites de integração para novas variáveis nas seguintes integrais (f é uma função contínua):

2160. $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)\, dy.$ **2161.** $\int_0^2 dx \int_0^x f(\sqrt{x^2 + y^2})\, dy.$

2162. $\iint\limits_{(S)} f(x, y)\, dx\, dy,$

onde S é um triângulo limitado pelas retas $y = x$, $y = -x$, $y = 1$.

2163. $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f\left(\frac{y}{x}\right) dy.$

2164. $\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy$, onde o campo S está limitado pela lemniscata

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

2165. Passando às coordenadas polares, calcular a integral dupla

$$\iint\limits_{(S)} y\,dx\,dy,$$

onde S é um semicírculo de diâmetro a com centro no ponto $C\left(\frac{a}{2};\ 0\right)$ (fig. 93).

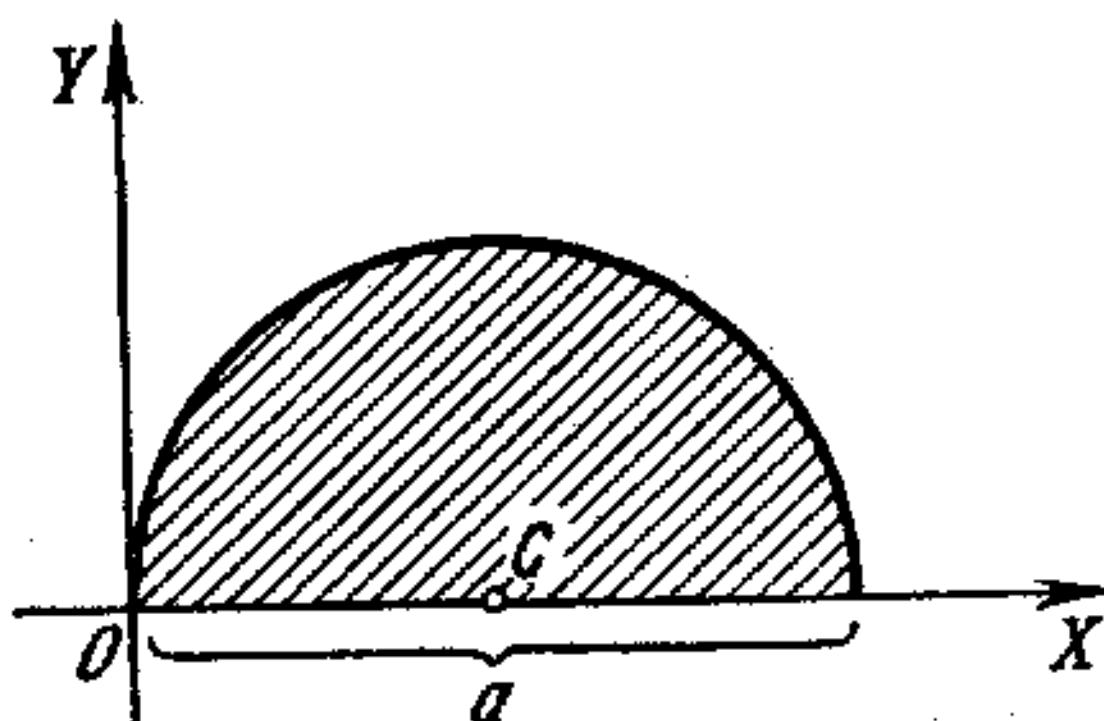



FIG. 93

2166. Passando às coordenadas polares, calcular a seguinte integral dupla

$$\iint\limits_{(S)} (x^2 + y^2)\,dx\,dy,$$

que se estende ao campo limitado pela circunferência $x^2 + y^2 = 2\,ax$.

2167. Passando às coordenadas polares, calcular a seguinte integral dupla

$$\iint\limits_{(S)} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy,$$

onde o campo de integração S é um semicírculo de raio a com centro na origem das coordenadas, situado sobre o eixo OX.

2168. Calcular a integral dupla da função $f(r, \varphi) = r$ sobre o campo limitado pela cardióide $r = a(1 + \cos\varphi)$ e pela circunferência $r = a$. (Considera-se o campo que não contém o polo).

2169. Passando às coordenadas polares, calcular

$$\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\,dy.$$

2170. Passando a coordenadas polares, calcular

$$\iint\limits_{(S)} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy,$$

onde o campo S está limitado por uma folha da lemniscata

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \quad (x \geqslant 0).$$

2171*. Calcular a integral dupla

$$\iint\limits_{(S)} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy,$$

que se estende ao campo S limitado pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, passando a *coordenadas polares generalizadas* r e φ segundo as fórmulas

$$\frac{x}{a} = r\cos\varphi, \quad \frac{y}{b} = r\,\text{sen}\,\varphi.$$

2172.** Transformar a integral

$$\int\limits_0^c dx \int\limits_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y)\, dy$$

$(0 < \alpha < \beta$ e $c > 0)$, introduzindo as novas variáveis $u = x + y$, $uv = y$.

2173*. Fazer a troca de variáveis $u = x + y$, $v = x - y$ na integral

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x, y)\, dy.$$

2174.** Calcular a integral dupla

$$\iint\limits_{(S)} dx\, dy,$$

onde S é um campo limitado pela curva

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{h^2} - \frac{y^2}{k^2}.$$

Indicação. Fazer a troca de variáveis

$$x = ar\cos\varphi, \quad y = br\,\text{sen}\,\varphi.$$

§ 3. Cálculo das áreas das figuras

1°. A área em coordenadas retangulares. *A área de um campo plano S é* igual a

$$\text{ár. } S = \iint\limits_{(S)} dx\, dy.$$

Se o recinto é determinado pelas desigualdades $a \leqslant x \leqslant b$, $\varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)$, onde φ e ψ são contínuas, temos

$$\text{ár. } S = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy.$$

2°. A área em coordenadas polares. Se o campo S é determinado em coordenadas polares r e φ pelas desigualdades $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, $0 \leqslant f(\varphi) \leqslant r \leqslant F(\varphi)$, onde F e f sao contínuas, temos

$$\text{ar. } S = \iint_{(S)} r\, d\varphi\, dr = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{f(\varphi)}^{F(\varphi)} r\, dr.$$

2175. Construir os campos, cujas áreas são expressas pelas seguintes integrais

a) $\int_{-1}^{2} dx \int_{x^2}^{x+2} dy$; b) $\int_0^a dy \int_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} dx$.

Calcular estas áreas e trocar a ordem de integração.

2176. Construir os campos, cujas áreas são expressas pelas integrais:

a) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 2} d\varphi \int_0^{3\sec\varphi} r\, dr$; b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_a^{a(1+\cos\varphi)} r\, dr$.

Calcular estas áreas.

2177. Calcular a área limitada pelas retas $x = y$, $x = 2y$, $x + y = a$, $x + 3y = a$ $(a > 0)$.

2178. Calcular a área da figura situada sobre o eixo OX e limitada por este eixo, pela parábola $y^2 = 4ax$ e pela reta $x + y = 3a$.

2179*. Calcular a área limitada pela elipse

$$(y - x)^2 + x^2 = 1.$$

2180. Achar a área limitada pelas parábolas

$$y^2 = 10x + 25 \text{ e } y^2 = -6x + 9.$$

2181. Achar a área limitada pelas seguintes linhas, passando às coordenadas polares

$$x^2 + y^2 = 2x, \quad x^2 + y^2 = 4x, \quad y = x, \quad y = 0.$$

2182. Achar a área limitada pela reta $r \cos\varphi = 1$ e pela circunferência $r = 2$. (Considera-se a superfície que não contém o polo).

2183. Achar a área limitada pelas curvas

$$r = a(1 + \cos\varphi) \text{ e } r = a\cos\varphi \quad (a > 0).$$

2184. Achar a área limitada pela linha

$$\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)^2=\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}.$$

2185*. Achar a área limitada pela elipse

$$(x-2y+3)^2+(3x+4y-1)^2=100.$$

2186. Achar a área do quadrilátero curvilíneo limitado pelos arcos das parábolas $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $y^2 = \alpha x$, $y^2 = \beta x (0 < a < b$, $0 < \alpha < \beta)$.

Indicação. Introduzir novas variáveis u e v, supondo

$$x^2 = uy, \quad y^2 = vx.$$

2187. Achar a área do quadrilátero curvilíneo limitado pelos arcos das curvas $y^2 = ax$, $y^2 = bx$, $xy = \alpha$, $xy = \beta$ $(0 < a < b$, $0 < \alpha < \beta)$.

Indicação. Introduzir novas variáveis u e v, supondo $xy = y$ $y^2 = vx$.

§ 4. Cálculo dos volumes dos corpos

O volume V de um cilindróide, limitado por cima pela superfície contínua $z = f(x, y)$, por baixo pelo plano $z = 0$ e lateralmente pela superfície cilíndrica reta que corta no plano XOY o campo S limitado, fechado e quadrado (fig. 94), é igual a

$$V = \iint\limits_{(S)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

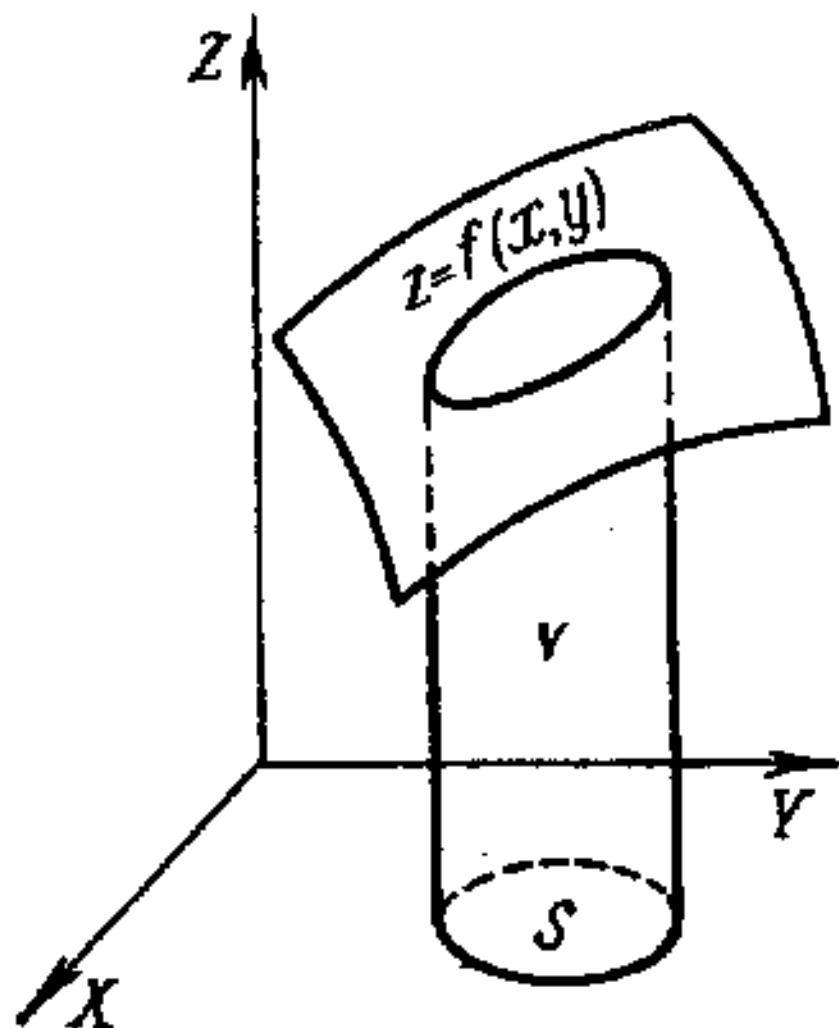



FIG. 94

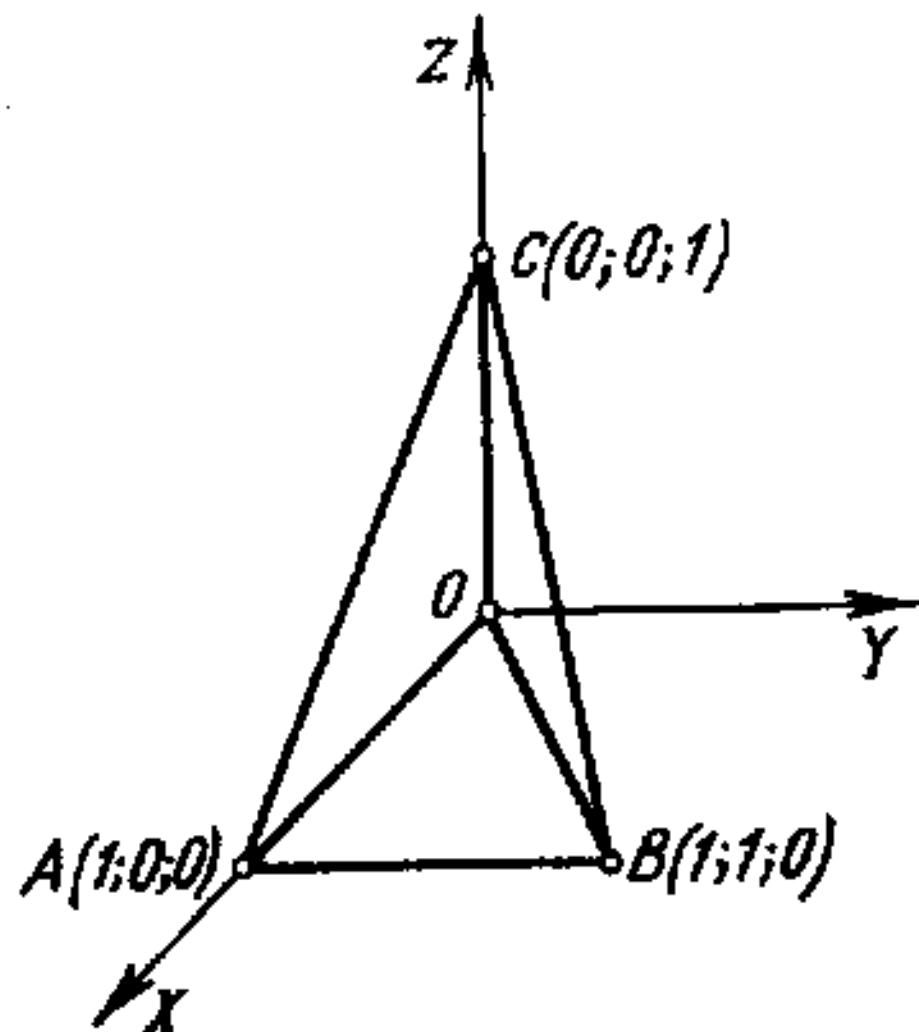



FIG. 95

2188. Expressar por meio de uma integral dupla o volume de uma pirâmide cujos vértices são $O(0; 0; 0)$, $A(1; 1; 0)$, $B(1; 1; 0)$ e $C(0; 0; 1)$ (fig. 95). Colocar os limites de integração.

Nos problemas **2189—2192** é preciso desenhar os corpos, cujos volumes se expressam pelas integrais reiteradas:

2189. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1-x-y)\,dy$. **2190.** $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} (4-x-y)\,dy$.

2191. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-x)\,dy$. **2192.** $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2-x}^{2} (4-x-y)\,dy$.

2193. Desenhar o corpo cujo volume é expresso pela integral $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dy$, e a partir de razões geométricas, achar o valor desta integral.

2194. Achar o volume do corpo limitado pelo parabolóide elíptica $z = 2x^2 + y^2 + 1$, pelo plano $x + y = 1$ e pelos planos coordenados.

2195. Um corpo está limitado pelo parabolóide hiperbólico $z = x^2 - y^2$ e os planos $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$. Calcular o seu volume.

2196. Um corpo está limitado pelo cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ e pelos planos $y = 0$, $z = 0$, $y = x$. Calcular seu volume.

Achar os volumes dos corpos limitados pelas seguintes superfícies (os parâmetros são positivos):

2197. $az = y^2$, $x^2 + y^2 = r^2$, $z = 0$.

2198. $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x + z = 6$, $z = 0$.

2199. $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$.

2200. $x + y + z = a$, $3x + y = a$, $\frac{3}{2}x + y = a$, $y = 0$, $z = 0$.

2201. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = \frac{b}{a}x$, $y = 0$, $z = 0$.

2202. $x^2 + y^2 = 2ax$, $z = \alpha x$, $z = \beta x$ $(\alpha > \beta)$.

Empregar nos problemas **2203—2211** as coordenadas polares e generalizadas.

2203. Achar o volume total do espaço compreendido entre o cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ e o hiperbolóide $x^2 + y^2 - z^2 = -a^2$.

2204. Achar o volume total do espaço compreendido entre o cone $2(x^2 + y^2) - z^2 = 0$, e o hiperbolóide $x^2 + y^2 - z^2 = -a^2$.

2205. Achar o volume limitado pelas superfícies $2az = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$, $z = 0$.

2206. Determinar o volume do elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

2207. Achar o volume do sólido limitado pelo rabolóide $2az = x^2 + y^2$ e pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$. (S ntende-se o volume contido dentro do parabolóide).

2208. Calcular o volume do sólido limitado pelo plano XOY, pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$ e pelo cone $x^2 + y^2 = z^2$.

2209. Calcular o volume do sólido limitado pelo plano XOY, pela superfície $z = ae^{-(x^2+y^2)}$ e pelo cilindro $x^2 + y^2 = R^2$.

2210. Calcular o volume do sólido limitado pelo plano XOY, pelo parabolóide $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ e pelo cilindro $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{x}{a}$.

2211. Em que razão o hiperbolóide $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$ divide o volume da esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 3a^2$?

2212*. Achar o volume do sólido limitado pelas superfícies $z = x + y$, $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 2x$, $z = 0$ $(x > 0,\ y > 0)$.

§ 5. Cálculo das áreas das superfícies

A área σ de uma superfície regular e uniforme $z = f(x, y)$, que tenha como projeção no plano XOY um campo S, é igual a

$$\sigma = \iint\limits_{(S)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

2213. Achar a área da parte do plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, compreendida entre os planos de coordenadas.

2214. Achar a área da parte da superfície do cilindro $x^2 + y^2 = R^2 (z \geqslant 0)$, compreendida entre os planos $z = mx$ e $z = nx$ $(m > n > 0)$.

2215*. Calcular a área da parte da superfície do cone $x^2 - y^2 = z^2$, situada no primeiro octante e limitada pelo plano $y + z = a$.

2216. Calcular a área da parte da superfície do cilindro $x^2 + y^2 = ax$, cortada do mesmo pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

2217. Calcular a área da parte da superfície da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, cortada pela superfície $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(0 < b < a)$.

2218. Calcular a área da parte da superfície do parabolóide $y^2 + z^2 = 2ax$, compreendida entre o cilindro $y^2 = ax$ e o plano $x = a$.

2219. Calcular a área da parte da superfície do cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$, compreendida entre o plano XOY e o cone $x^2 + y^2 = z^2$.

2220*. Calcular a área da parte da superfície do cone $x^2 - y^2 = z^2$, situada dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$.

2220.1 . Achar a área da parte do cilindro $y^2 = 4x$, cortada pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5x$.

2220.2. Achar a área da parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, cortada pelo cilindro $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

2221*. Demonstrar que as áreas das partes das superfícies dos parabolóides $x^2 + y^2 = 2az$ e $x^2 - y^2 = 2az$, cortadas pelo cilindro $x^2 + y^2 = R^2$, são iguais.

2222*. Uma esfera de raio a está cortada por dois cilindros circulares, cujas bases têm os diâmetros iguais ao raio da esfera e que são tangentes entre si ao longo de um dos diâmetros da mesma. Achar o volume e a área da parte da superfície da esfera que sobra.

2223*. Em uma esfera de raio a cortaram um orifício de base quadrada, cujo lado é também igual a a. O eixo deste orifício coincide com o diâmetro da esfera. Achar a área da superfície da esfera cortada pelo orifício.

2224*. Calcular a área da parte da superfície helicoidal $z = c \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, situada no primeiro octante e que está compreendida entre os cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ e $x^2 + y^2 = b^2$ $(0 < a < b)$.

§ 6. Aplicações da integral dupla à mecânica

1°. Massa e momentos estáticos das lâminas. Se S é um campo do plano XOY, ocupado por uma lâmina, e $\rho(x, y)$ é a densidade superficial desta lâmina no ponto $(x; y)$, então, a massa M da lâmina e seus momentos estáticos M_X e M_Y em relação aos eixos OX e OY são expressos pelas integrais duplas

$$M = \iint_{(S)} \rho(x, y)\, dx\, dy, \quad M_X = \iint_{(S)} y\rho(x, y)\, dx\, dy,$$

$$M_Y = \iint_{(S)} x\rho(x, y)\, dx\, dy. \tag{1}$$

Se a lâmina é homogênea, então $\rho(x, y) = \text{const}$.

2°. Coordenadas do centro de gravidade da lâmina. Se $C(\bar{x}, \bar{y})$ é o centro de gravidade de uma lâmina, temos

$$\bar{x} = \frac{M_Y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_X}{M},$$

onde M é a massa da lâmina e M_X, M_Y, seus momentos estáticos em relação aos eixos das coordenadas (ver o 1°). Se a lâmina é homogênea, então nas fórmulas (1) pode-se fazer $\rho = 1$.

3°. Momentos de inércia da lâmina. Os momentos de inércia de uma lâmina em relação aos eixos OX e OY são iguais, respectivamente, a

$$I_X = \iint_{(S)} y^2\rho(x, y)\, dx\, dy, \quad I_Y = \iint_{(S)} x^2\rho(x, y)\, dx\, dy. \tag{2}$$

O momento de inércia da lâmina em relação à origem das coordenadas é

$$I_0 = \iint_{(S)} (x^2 + y^2)\, \rho(x, y)\, dx\, dy = I_X + I_Y. \tag{3}$$

Fazendo $\rho(x, y) = 1$, nas fórmulas (2) e (3), obtemos os momentos geométricos de inércia das figuras planas.

2225. Achar a massa de uma lâmina circular de raio R se sua densidade é proporcional à distância do ponto desde o centro e igual a δ na borda da lâmina.

2226. Uma lâmina tem a forma de triângulo retângulo com catetos $OB = a$ e $OA = b$; sua densidade em qualquer ponto é igual à distância do ponto desde o cateto OA. Achar os momentos estáticos da lâmina em relação aos catetos OA e OB.

2227. Calcular as coordenadas do centro de gravidade da figura $OmAnO$ (fig. 96), limitada pela curva $y = \operatorname{sen} x$ e pela reta OA, que passa pela origem das coordenadas e pelo vértice $A\left(\frac{\pi}{2};\ 1\right)$ da sinusóide.

2228. Achar as coordenadas do centro de gravidade da figura limitada pela cardióide $r = a\,(1 + \cos\varphi)$.

2229. Achar as coordenadas do centro de gravidade de um setor circular de raio a, cujo ângulo central é igual a 2α (fig. 97).

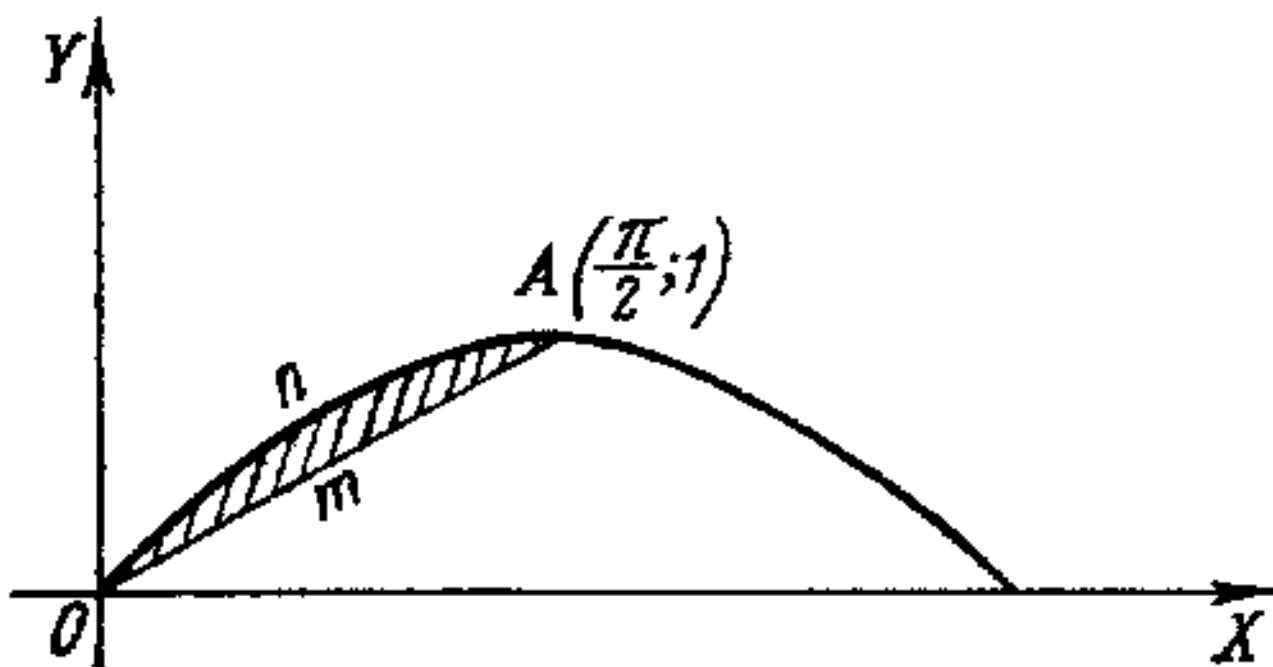
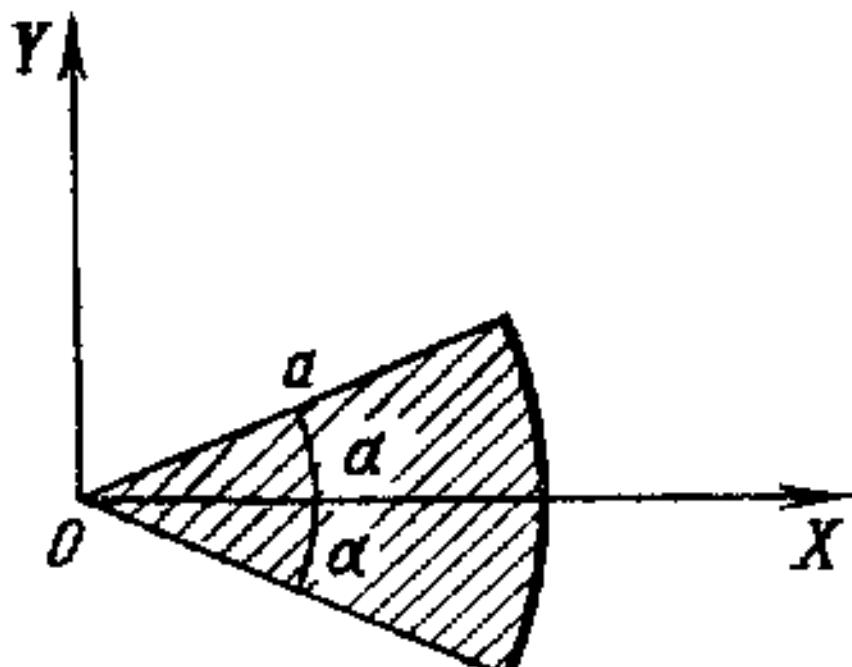



FIG. 96 FIG. 97

2230. Calcular as coordenadas do centro de gravidade da figura limitada pelas parábolas $y^2 = 4x + 4$ e $y^2 = -2x + 4$.

2231. Calcular o momento de inércia do triângulo limitado pelas retas $x + y = 2$, $x = 2$, $y = 2$, em relação ao eixo OX.

2232. Achar o momento de inércia de um anel circular de diâmetro d e $D (d < D)$: a) em relação a seu próprio centro e b) em relação a seu diâmetro.

2233. Calcular o momento de inércia de um quadrado de lado a, em relação ao eixo que, passando por um dos vértices, é perpendicular ao plano do quadrado.

2234*. Calcular o momento de inércia do segmento interceptado da parábola $y^2 = ax$ pela reta $x = a$, em relação à reta $y = -a$.

2235*. Calcular o momento de inércia da superfície limitada pela hipérbole $xy = 4$ e pela reta $x + y = 5$, em relação à reta $x = y$.

2236*. Em uma lâmina quadrada de lado a, a densidade é proporcional à distancia até um de seus vértices. Calcular o momento de inércia desta lâmina em relação ao lado que passa por este vértice.

2237. Achar o momento de inércia da cardióide $r = a(1 + \cos\varphi)$ em relação ao polo.

2238. Calcular o momento de inércia da superfície da lemniscata $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ em relação ao eixo, perpendicular ao plano da mesma, que passa pelo polo.

2239*. Calcular o momento de inércia de uma lâmina homogênea limitada por um arco da ciclóide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$ e o eixo OX, em relação ao eixo OX.

§ 7. Integrais triplas

1°. Integral tripla em coordenadas retangulares. Chama-se integral tripla de uma função $f(x, y, z)$, sobre um campo V limitado e fechado, o limite da soma tripla correspondente:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \lim_{\substack{\text{máx}\, \Delta x_i \to 0 \\ \text{máx}\, \Delta y_j \to 0 \\ \text{máx}\, \Delta z_k \to 0}} \sum_i \sum_j \sum_k f(x_i, y_j, z_k)\, \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

O cálculo da integral tripla se reduz a calcular sucessivamente três integrais ordinárias (simples) ou calcular uma dupla e uma simples.

Exemplo 1. Calcular

$$I = \iiint\limits_{V} x^3 y^2 z\, dx\, dy\, dz,$$

onde o campo V é determinado pelas desigualdades

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant x, \quad 0 \leqslant z \leqslant xy.$$

Solução. Teremos

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} x^3 y^2 z\, dz = \int_0^1 dx \int_0^x x^3 y^2 \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^{xy} dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^x \frac{x^5 y^4}{2}\, dy = \int_0^1 \left.\frac{x^5}{2} \cdot \frac{y^5}{5}\right|_0^x dx = \int_0^1 \frac{x^{10}}{10}\, dx = \frac{1}{110}.$$

Exemplo 2. Calcular

$$\iiint\limits_{(V)} x^2\, dx\, dy\, dz,$$

estensa ao volume do elipsóide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Solução.

$$\iiint\limits_{(V)} x^2 dx\, dy\, dz = \int_{-a}^{a} x^2\, dx \iint\limits_{(S_{yz})} dy\, dz = \int_{-a}^{a} x^2 S_{yz}\, dx,$$

onde S_{yz} é a área da elipse $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$, $x=$ const, igual a

$$S_{yz}=\pi b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Portanto, temos definitivamente:

$$\iiint\limits_{(V)} x^2\,dx\,dy\,dz=\pi bc\int\limits_{-a}^{a} x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{4}{15}\pi a^3 bc.$$

2°. **Troca de variáveis na integral tripla.** Se na integral tripla

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

é preciso passar das variáveis x, y, z às variáveis u, v, w, relacionadas com as primeiras pelas igualdades $x=\varphi(u, v, w)$, $y=\psi(u, v, w)$, $z=\chi(u, v, w)$, onde as funções φ, ψ, χ:

1) são contínuas, junto com suas derivadas parciais de 1ª ordem;

2) estabelecem uma correspondência biunívoca contínua em ambos os sentidos, entre os pontos do campo de integração V do espaço $OXYZ$ e os pontos de um campo determinado V' do espaço $O'UVW$;

3) o determinante funcional (de Jacob) destas funções

$$I=\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}$$

conserva invariável seu sinal no campo V[1], quando é válida a fórmula

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{(V')} f[\varphi(u, v, w),\ \psi(u, v, w),\ \chi(u, v, w)]\,|I|\,du\,dv\,dw.$$

Em particular,

1) para as coordenadas cilíndricas r, φ, h (fig. 98), onde

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\,\mathrm{sen}\,\varphi,\quad z=h,$$

obtemos que $I=r$;

2) para as coordenadas esféricas φ, ψ, r (φ é a longitude, ψ é a latitude e r, o raio vetor (fig. 99)), onde

$$x=r\cos\psi\cos\varphi,\quad y=r\cos\psi\,\mathrm{sen}\,\varphi,\quad z=r\,\mathrm{sen}\,\psi,$$

temos $I=r^2\cos\psi$.

Exemplo 3. Calcular a seguinte integral, passando-a às coordenadas esféricas

$$\iiint\limits_{(V)}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz,$$

onde V é uma esfera de raio R.

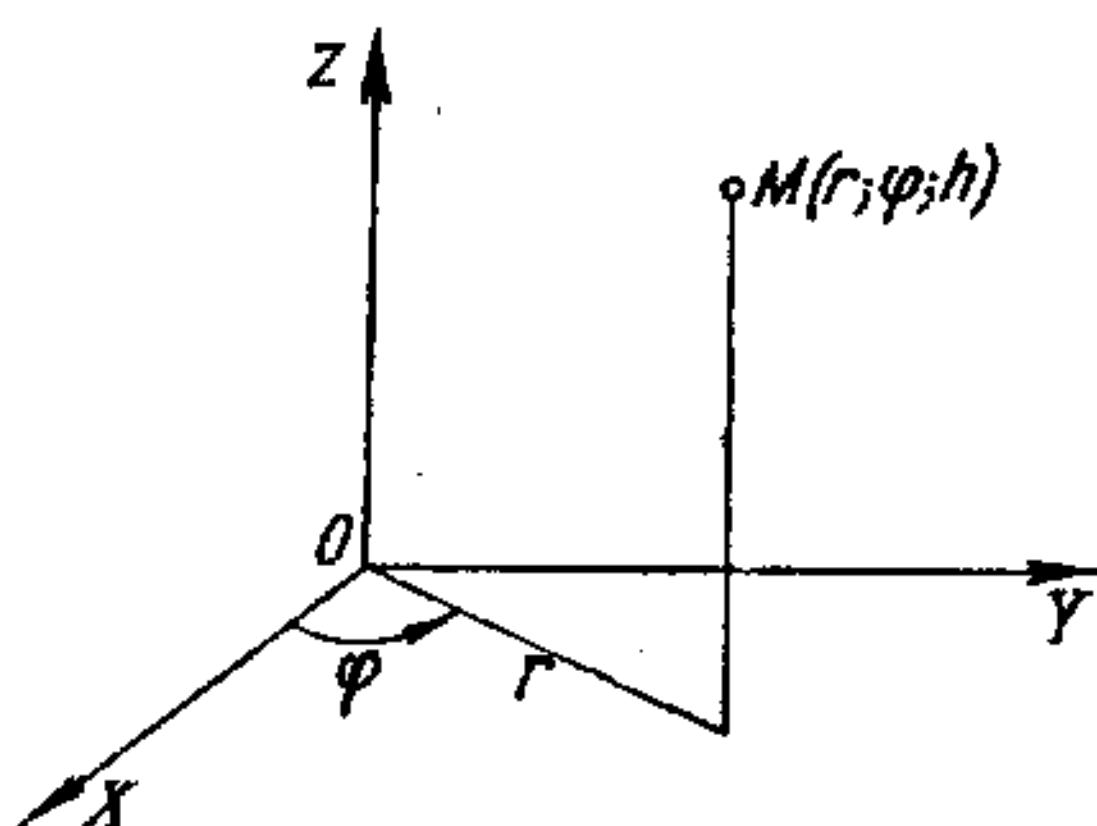
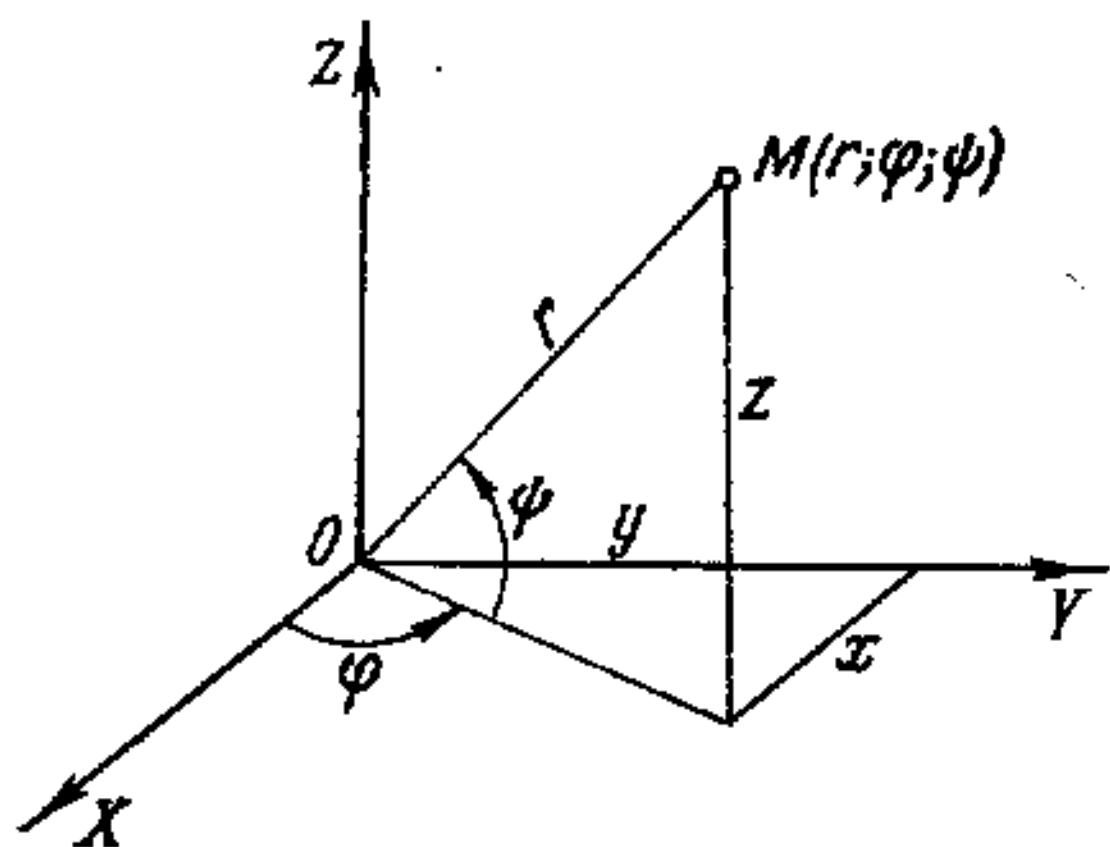



FIG. 98 FIG. 99

Solução. Para a esfera os limites de variação das coordenadas esféricas φ (longitude), ψ (latitude) e r (raio vetor), serão:

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant r \leqslant R.$$

Por isso, teremos:

$$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \psi \int_0^R rr^2 \cos\psi\, dr = \pi R^4.$$

3°. Aplicações das integrais triplas. *O volume* de um campo do espaço tridimensional $OXYZ$ é igual a

$$V = \iiint\limits_{(V)} dx\, dy\, dz.$$

A massa do corpo que ocupa o campo V,

$$M = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

onde $\gamma(x, y, z)$ é a densidade do corpo no ponto $(x; y; z)$.

Os momentos estáticos do corpo, em relação aos planos coordenados, são:

$$M_{XY} = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z)\, z\, dx\, dy\, dz;$$

$$M_{YZ} = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z)\, x\, dx\, dy\, dz;$$

$$M_{ZX} = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z)\, y\, dx\, dy\, dz.$$

As coordenadas do centro de gravidade

$$\bar{x} = \frac{M_{YZ}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{ZX}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{XY}}{M}.$$

Se o corpo é homogêneo, nas fórmulas para determinai as coordenadas do centro de gravidade pode-se supor $\gamma(x, y, z) = 1$.

Os momentos de inércia em relação aos eixos coordenados são:

$$I_X = \iiint\limits_{(V)} (y^2 + z^2)\,\gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz;$$

$$I_Y = \iiint\limits_{(V)} (z^2 + x^2)\,\gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz;$$

$$I_Z = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2)\,\gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

Colocando nestas fórmulas $\gamma(x, y, z) = 1$, obtemos os momentos geométricos de inércia do corpo.

A. *Cálculo de integrais triplas*

Calcular os limites de integração na integral tripla

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z,)\,dx\,dy\,dz$$

para os campos V que se indicam a seguir:

2240. V é um tetraedro limitado pelos planos

$$x + y + z = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

2241. V é um cilindro limitado pelas superfícies

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad z = 0, \quad z = H.$$

2242. V é um cone limitado pelas superfícies

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, \quad z = c.$$

2243. V é um volume limitado pelas superfícies

$$z = 1 - x^2 - y^2, \quad z = 0.$$

Calcular as seguintes integrais:

2244. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \dfrac{dz}{\sqrt{x + y + z + 1}}$.

2245. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2\sqrt{x}} dy \int\limits_0^{\frac{\sqrt{4x-y^2}}{2}} x\,dz.$

2246. $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}$.

2247. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} xyz\, dz$.

2248. Calcular

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{dx\, dy\, dz}{(x+y+z+1)^3},$$

onde V é o campo de integração limitado pelos planos de coordenadas e pelo plano $x+y+z=1$.

2249. Calcular

$$\iiint\limits_{(V)} (x+y+z)^2\, dx\, dy\, dz,$$

onde V é a parte comum do parabolóide $2az \geqslant x^2+y^2$ e da esfera $x^2+y^2+z^2 \leqslant 3a^2$.

2250. Calcular

$$\iiint\limits_{(V)} z^2\, dx\, dy\, dz,$$

onde V é a parte comum das esferas $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$ e $x^2 + y^2+z^2 \leqslant 2Rz$.

2251. Calcular

$$\iiint\limits_{(V)} z\, dx\, dy\, dz,$$

onde V é o volume limitado pelo plano $z=0$ e pela metade superior do elipsóide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

2252. Calcular

$$\iiint\limits_{(V)} \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) dx\, dy\, dz,$$

onde V é a parte interna do elipsóide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

2253. Calcular

$$\iiint\limits_{(V)} z\, dx\, dy\, dz,$$

onde V é o campo limitado pelo cone $z^2=\frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)$ e pelo plano $z=h$.

2254. Calcular a seguinte integral, passando às coordenadas cilíndricas

$$\iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz,$$

onde V é o campo limitado pelas superfícies $x^2+y^2+z^2=2Rz$, $x^2+y^2=z^2$ e que contém o ponto $(0;0;R)$.

2255. Calcular

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,dz,$$

transformando-a previamente em coordenadas cilíndricas.

2256. Calcular

$$\int_0^{2r} dx \int_{-\sqrt{2rx-x^2}}^{\sqrt{2rx-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{4r^2-x^2-y^2}} dz,$$

transformando-a previamente em coordenadas cilíndricas.

2257. Calcular

$$\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\,dz,$$

transformando-a previamente em coordenadas esféricas.

2258. Passando às coordenadas esféricas, calcular a integral

$$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz,$$

onde V é a parte interna da esfera $x^2+y^2+z^2\leqslant x$.

B. *Cálculo de volumes através de integrais triplas*

2259. Calcular através de uma integral tripla o volume do corpo limitado pelas superfícies

$$y^2=4a^2-3ax,\quad y^2=ax,\quad z=\pm h.$$

2260.** Calcular o volume da parte do cilindro $x^2+y^2=2ax$, compreendido entre o parabolóide $x^2+y^2=2az$ e o plano XOY.

2261*. Calcular o volume do corpo limitado pela esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ e pelo cone $z^2=x^2+y^2$(externo em relação ao cone).

2262*. Calcular o volume do corpo limitado pela esfera $x^2+y^2+z^2=4$ e pelo parabolóide $x^2+y^2=3z$ (interno em relação ao parabolóide).

2263. Calcular o volume do corpo limitado pelo plano XOY, pelo cilindro $x^2 + y^2 = ax$ e pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (interno em relação ao cilindro).

2264. Calcular o volume do corpo limitado pelo parabolóide $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2\frac{x}{a}$ e pelo plano $x = a$.

2264.1. Achar o volume do corpo limitado pela superfície

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}.$$

2264.2. Achar o volume do corpo limitado pelas superfícies

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (z \geqslant 0).$$

C. *Aplicações das integrais triplas à mecânica e à física*

2265. Achar a massa M do paralelepípedo retangular $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$, se a densidade no ponto (x, y, z) é $\rho(x, y, z) = x + y + z$.

2266. Do octante da esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant c^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, cortaram o corpo $OABC$, limitado pelos planos de coordenadas e pelo plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ $(a \leqslant c,\ b \leqslant c)$ (fig. 100). Achar a massa deste corpo se sua densidade em cada ponto (x, y, z) é igual a cota do mesmo.

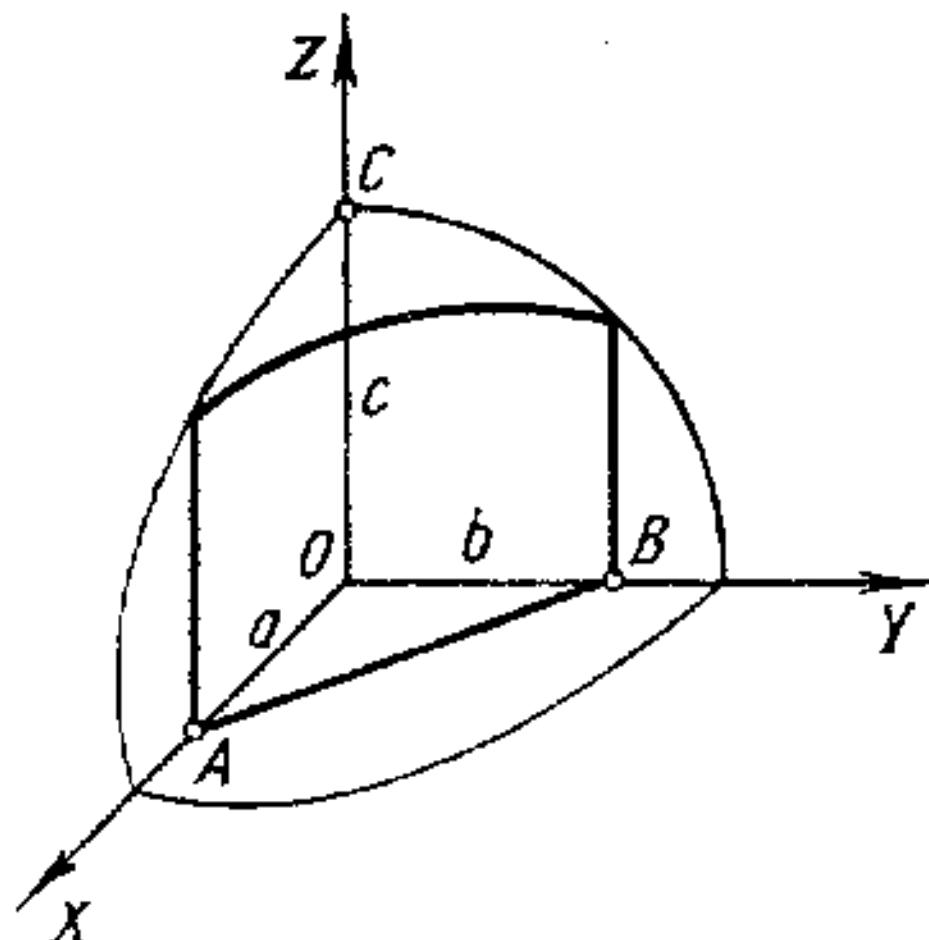
FIG. 100

2267*. No corpo de forma semi-esférica $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$, $z \geqslant 0$, a densidade varia proporcionalmente à distância do ponto ao centro. Achar o centro de gravidade deste corpo.

2268. Achar o centro de gravidade do corpo limitado pelo parabolóide $y^2 + 2z^2 = 4x$ e pelo plano $x = 2$.

2269*. Achar o momento de inércia do cilindro circular que tem por altura h e por raio da base a, em relação ao eixo que serve de diâmetro da base do próprio cilindro.

2270*. Achar o momento de inércia do cone circular que tem por altura h, por raio da base a e densidade ρ, em relação ao diâmetro de sua base.

2271.** Achar a atração que exerce o cone homogêneo de altura h e ângulo no vértice α (na seção axial) sobre um ponto material que tenha uma unidade de massa e que situe-se em seu vértice.

2272.** Demonstrar que a atração que exerce uma esfera homogênea sobre um ponto material externo não varia, se toda a massa da esfera se concentra em seu centro.

§ 8. Integrais impróprias dependentes do parâmetro. Integrais impróprias múltiplas

1°. Derivação pelo parâmetro. Cumprindo-se certas restrições que se impõem às funções $f(x, \alpha)$ e $f'_\alpha(x, \alpha)$ e as correspondentes integrais impróprias se verifica a *regra de Leibniz*

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^\infty f(x, \alpha)\,dx = \int_a^\infty f'_\alpha(x, \alpha)\,dx,$$

Exemplo 1. Através da derivação pelo parâmetro, calcular

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}\,dx \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0).$$

Solução. Seja

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}\,dx = F(\alpha, \beta).$$

Então

$$\frac{\partial F(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = -\int_0^\infty x e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha x^2}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{2\alpha}.$$

Donde $F(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2}\ln \alpha + C(\beta)$. Para achar $C(\beta)$ fazemos $\alpha = \beta$ na última igualdade. Temos $0 = -\frac{1}{2}\ln \beta + C(\beta)$.

Daí $C(\beta) = \frac{1}{2}\ln \beta$. Portanto,

$$F(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2}\ln \alpha + \frac{1}{2}\ln \beta = \frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

2°. Integrais duplas impróprias. a) *Caso em que o campo de integração é infinito.* Se a função $f(x, y)$ é contínua num campo infinito S, supõe-se

$$\iint_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\sigma \to S} \iint_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy, \tag{1}$$

onde σ é um campo limitado e fechado, situado totalmente em S sendo que $\sigma \to S$ significa que ampliamos o campo σ segundo uma lei arbitrária de forma que neste entre e nele permaneça qualquer ponto do campo S. Se o segundo membro tem limite e este não depende da escolha que se faça de σ a integral imprópria respectiva recebe o nome de *convergente*, em caso contrário chama-se *divergente*.

Se a função subintegral $f(x, y)$ não é negativa ($f(x, y) \geqslant 0$), para que a integral imprópria seja convergente é necessário e suficiente que exista o limite no segundo membro da igualdade (1), ainda que seja para um sistema de campos σ que completem o campo S.

b) *Caso de uma função descontínua.* Se a função $f(x, y)$ é contínua em todo um campo fechado e restrito S, com exceção do ponto $P(a; b)$, supoe-se

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{(S_\varepsilon)} f(x, y)\, dx\, dy, \tag{2}$$

onde S_ε é o campo obtido com a exclusão de S de um campo interno pequeno de diâmetro ε que contém o ponto P. No caso de existência do limite (2) que não depende da forma dos campos internos pequenos excluídos do campo S, a integral considerada se chama *convergente*, enquanto que em caso contrário, é *divergente*.

Se $f(x, y) \geqslant 0$, o limite do segundo membro da igualdade (2) não depende da forma dos campos internos excluídos de S; em particular, na qualidade de tais campos podem tomar-se círculos de raio $\frac{\varepsilon}{2}$ com centro no ponto P.

O conceito de integrais impróprias duplas pode ser facilmente transferido ao caso de integrais triplas.

Exemplo 2. Investigar a convergência da integral

$$\iint\limits_{(S)} \frac{dx\, dy}{(1 + x^2 + y^2)^p}, \tag{3}$$

onde S é todo o plano XOY.

Solução. Seja σ um círculo de raio ρ com centro na origem das coordenadas. Passando-se às coordenadas polares, se $p \neq 1$, temos:

$$I(\sigma) = \iint\limits_{(\sigma)} \frac{dx\, dy}{(1 + x^2 + y^2)^p} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho} \frac{r\, dr}{(1 + r^2)^p} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left. \frac{(1 + r^2)^{1-p}}{1 - p} \right|_0^{\rho} d\varphi = \frac{\pi}{1 - p} [(1 + \rho^2)^{1-p} - 1]$$

Se $p < 1$, o $\lim\limits_{\sigma \to S} I(\sigma) = \lim\limits_{\rho \to \infty} I(\sigma) = \infty$ e a integral diverge. Se, ao contrário, $p > 1$, o $\lim\limits_{\rho \to \infty} I(\sigma) = \frac{\pi}{p - 1}$ e a integral converge. Quando $p = 1$, temos

$$I(\sigma) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho} \frac{r\, dr}{1 + r^2} = \pi \ln(1 + \rho^2);$$

$\lim\limits_{\rho \to \infty} I(\sigma) = \infty$, isto é, a integral diverge.

Portanto, a integral (3) é convergente para $p > 1$.

2273. Achar $f'(x)$, se

$$f(x) = \int_x^{\infty} e^{xy^2}\, dy \quad (x > 0).$$

2274. Seja a função $f(z)$ contínua quando $z \in (-\infty, +\infty)$ e a integral $\int\limits_{+\infty}^{+\infty} \left| f(z) \right| (1 + z^2)^{-1}\, dz$ converge demonstrar que a função

$$u = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\, f(z)}{x^2 + (y - z)^2}\, dz$$

satisfaz a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

2275. A transformação de Laplace $F(p)$ para a função $f(t)$ é determinada pela fórmula

$$F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt.$$

Achar $F(p)$, se: a) $f(t) = 1$; b) $f(t) = e^{\alpha t}$; c) $f(t) = \operatorname{sen} \beta t$; d) $f(t) = \cos \beta t$.

2276. Aplicando a fórmula

$$\int\limits_0^1 x^{n-1}\, dx = \frac{1}{n} \quad (n > 0),$$

calcular a integral

$$\int\limits_0^1 x^{n-1} \ln x\, dx.$$

2277*. Aplicando a fórmula

$$\int\limits_0^\infty e^{-pt}\, dt = \frac{1}{p} \quad (p > 0),$$

calcular a integral

$$\int\limits_0^\infty t^2 e^{-pt}\, dt.$$

Utilizando a derivação pelo parâmetro, calcular as seguintes integrais:

2278. $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\, dx \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0).$

2279. $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \operatorname{sen} mx\, dx \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0).$

2280. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x(1+x^2)}\,dx.$ **2281.** $\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad (|\alpha|<1).$

2282. $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\operatorname{sen}\beta x}{x}\,dx \quad (\alpha \geqslant 0).$

Calcular as seguintes integrais impróprias:

2283. $\int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-(x+y)}\,dy.$ **2284.** $\int_0^1 dy \int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\,dx.$

2285. $\iint\limits_{(S)} \frac{dx\,dy}{x^4+y^2}$, onde S é um campo que se determina pelas desigualdades $x \geqslant 1,\ y \geqslant x^2$.

2286*. $\int_0^\infty dx \int_0^\infty \frac{dy}{(x^2+y^2+a^2)^2} \quad (a>0).$

2287. *A integral de Euler — Poisson*, determinada pela fórmula $I=\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$, pode ser também escrita na forma $I=\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy$. Multiplicando entre si estas fórmulas e passando depois às coordenadas polares, calcular I.

2288. Calcular $\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \int_0^\infty \frac{dz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}$.

Verificar se convergem as seguintes integrais duplas impróprias:

2289.** $\iint\limits_{(S)} \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, onde S é o círculo $x^2+y^2 \leqslant 1$.

2290. $\iint\limits_{(S)} \frac{dx\,dy}{(x-y^2)^\alpha}$, onde S é um campo que se determina pela desigualdade $x^2+y^2 \geqslant 1$ ("parte externa" do círculo).

2291*. $\iint\limits_{(S)} \frac{dx\,dy}{\sqrt[3]{(x-y)^2}}$, onde S é o quadrado $|x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1$.

2292. $\iiint\limits_{(V)} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}$, onde V é o campo que se determina pela desigualdade $x^2+y^2+z^2 \geqslant 1$ ("parte externa" da esfera).

§ 9. Integrais curvilíneas

1°. Integrais curvilíneas de primeira espécie. Seja $f(x, y)$ uma função contínua e $y = \varphi(x)[a \leqslant x \leqslant b]$, a equação de uma curva regular determinada C.

Construimos um sistema de pontos $M_i(x_i, y_i)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ que dividam a curva C em arcos elementares $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i} = \Delta s_i$ e formamos a soma integral $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta s_i$. O limite desta soma, quando $n \to \infty$ e máx $\Delta s_i \to 0$ recebe o nome de *integral curvilínea de primeira espécie*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta s_i = \int_C f(x, y)\, ds$$

(ds é a diferencial do arco) e se calcula pela fórmula

$$\int_C f(x, y)\, ds = \int_a^b f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}\, dx.$$

Quando a curva C é dada em forma paramétrica: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $[\alpha \leqslant t \leqslant \beta]$, temos:

$$\int_C f(x, y)\, ds = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)\; \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt.$$

São consideradas também integrais curvilíneas de primeira espécie de função de três variáveis $f(x, y, z)$, tomadas sobre uma curva no espaço, que se calculam analogamente. A integral curvilínea de primeira espécie *não depende do sentido do caminho de integração*. Se a função subintegral f é interpretada como a densidade linear da curva de integração C, esta integral representará *a massa da curva* C

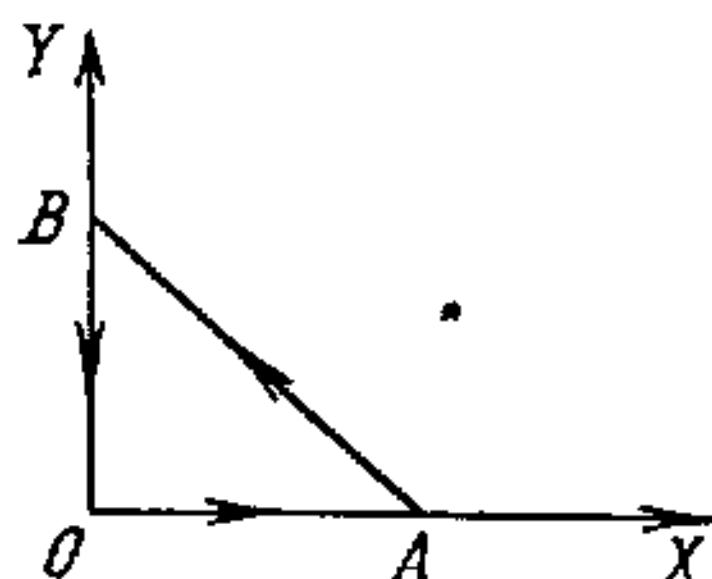



FIG. 101

Exemplo 1. Calcular a integral curvilínea

$$\int_C (x + y)\, ds,$$

onde C é o contorno do triângulo ABO, cujos vértices são $A(1; 0)$, $B(0; 1)$ e $O(0; 0)$ (fig. 101).

Solução. A equação de AB é: $y = 1 - x$, a de OB: $x = 0$ e a de OA: $y = 0$ Portanto, teremos

$$\int_C (x+y)\,ds = \int_{AB} (x+y)\,ds + \int_{BO} (x+y)\,ds + \int_{OA} (x+y)\,ds =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{2}\,dx + \int_0^1 y\,dy + \int_0^1 x\,dx = \sqrt{2} + 1.$$

2°. Integrais curvilíneas de segunda espécie. Se $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ são funções contínuas e $y = \varphi(x)$ é uma curva regular C que se percorre ao variar x de a até b, a *integral curvilínea de segunda* espécie correspondente é expressa da seguinte forma:

$$\int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int_a^b [P(x, \varphi(x)) + \varphi'(x)\,Q(x, \varphi(x))]\,dx.$$

No caso mais geral, quando a curva C é dada em forma paramétrica: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, onde t varia de α até β, temos:

$$\int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int_\alpha^\beta [P(\varphi(t), \psi(t))\,\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\,\psi'(t)]\,dt.$$

Fórmulas análogas são válidas para a integral curvilínea de segunda espécie tomada sobre uma curva no espaço.

A integral curvilínea de segunda espécie **troca seu sinal pelo sinal contrário ao mudar o sentido da forma de integração.** Mecanicamente esta integral pode ser interpretada como o trabalho da força variável $\{P(x, y), Q(x, y)\}$ correspondente, ao longo da curva de integração C.

Exemplo 2. Calcular a integral curvilínea

$$\int_C y^2\,dx + x^2\,dy,$$

onde C é a metade superior da elipse $x = a\cos t$, $y = b\,\text{sen}\,t$, $(a > 0, b > 0)$, que se percorre no sentido dos ponteiros do relógio.

Solução. Temos:

$$\int_C y^2\,dx + x^2\,dy = \int_\pi^0 [b^2\,\text{sen}^2\,t \cdot (-a\,\text{sen}\,t) + a^2\cos^2 t \cdot b\cos t]\,dt =$$

$$= -ab^2 \int_\pi^0 \text{sen}^3\,t\,dt + a^2 b \int_\pi^0 \cos^3 t\,dt = \frac{4}{3}\,ab^2.$$

3°. Caso de diferencial exata. Se a expressão subintegral da integral curvilínea de segunda espécie é a diferencial exata de uma função uniforme determinada $U = U(x, y)$, isto é, $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = dU(x, y)$, esta integral curvilínea não depende do caminho de integração e é válida a fórmula de Newton — Leibniz

$$\int_{(x_1;\,y_1)}^{(x_2;\,y_2)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = U(x_2, y_2) - U(x_1, y_1), \qquad (1)$$

onde $(x_1; y_1)$ é o ponto inicial e $(x_2; y_2)$, o ponto final do caminho. Em particular, se o contorno de integração C é fechado, temos

$$\oint_C P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0. \tag{2}$$

Se 1) o contorno de integração C está compreendido totalmente em um determinado recinto simplesmente conexo S e 2) as funções $P(x, y)$ e $Q(x, y)$, junto com suas derivadas parciais de 1ª ordem, são contínuas no campo S, a condição necessária e suficiente para a existência da função U é que se verifique identicamente em todo o campo S a igualdade

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{3}$$

(ver integração de diferenciais exatas). Se as condições 1) e 2) não são satisfeitas, a subsistência da condição (3) não garante a existência da função uniforme U e as fórmulas (1) e (2) podem resultar errôneas (ver o problema 2332). Mostraremos um método para achar a função $U(x, y)$ por meio de sua diferencial exata, baseado no emprego de integrais curvilíneas (isto é, um método mais de integração da diferencial exata). Como contorno de integração C toma-se a linha quebrada P_0P_1M (fig. 102), onde $P_0(x_0; y_0)$ é um ponto fixo e $M(x; y)$ um ponto variável. Neste caso,

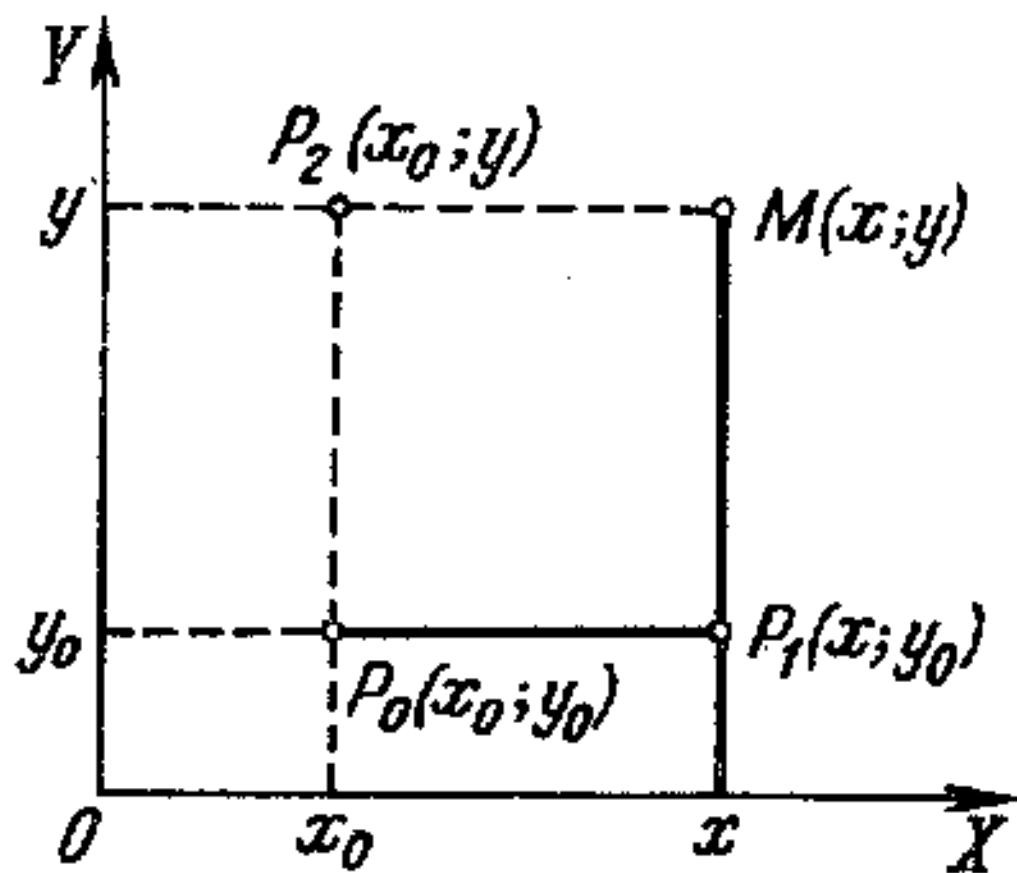



FIG. 102

ao longo de P_0P_1 temos que $y = y_0$ e $dy = 0$, enquanto que ao longo de P_1M temos que $dx = 0$. Obtemos:

$$U(x, y) - U(x_0, y_0) = \int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy =$$

$$= \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\, dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\, dy.$$

Analogamente, integrando sobre a linha quebrada P_0P_2M, temos:

$$U(x, y) - U(x_0, y_0) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\, dy + \int_{x_0}^{x} P(x, y)\, dx.$$

Exemplo 3. $(4x + 2y)\,dx + (2x - 6y)\,dy = dU$. Achar U.

Solução. Temos $P(x, y) = 4x + 2y$ e $Q(x, y) = 2x - 6y$; ao mesmo tempo que, evidentemente, cumpre-se a condição (3). Seja $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$. Então,

$$U(x, y) = \int_0^x 4x\,dx + \int_0^y (2x - 6y)\,dy + C = 2x^2 + 2xy - 3y^2 + C$$

ou

$$U(x, y) = \int_0^y -6y\,dy + \int_0^x (4x + 2y)\,dx + C = -3y^2 + 2x^2 + 2xy + C,$$

onde $C = U(0; 0)$ é uma constante arbitrária.

4°. Fórmula de Green para o plano. 1) Se C é o limite parcialmente regular do campo S e as funções $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ são contínuas, junto com suas derivadas parciais de 1ª ordem no trajeto fechado $S + C$ é válida *a fórmula de Green*

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

onde o sentido do percurso do contorno C é escolhido de forma que o campo S fique à esquerda.

5°. Aplicações das integrais curvilíneas. 1) *A área* limitada por um contorno fechado simples é igual a

$$S - = \oint_C y\,dx = \oint_C x\,dy$$

(o sentido do percurso do contorno deve ser contrário ao movimento dos ponteiros do relógio).

Mais cômoda para as aplicações é a seguinte fórmula:

$$S = \frac{1}{2}\oint_C (x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2}\oint_C x^2\,d\left(\frac{y}{x}\right).$$

2) *O trabalho de uma força*, cujas projeções são $X = X(x, y, z)$, $Y = Y(x, y, z)$, $Z = Z(x, y, z)$ (ou respectivamente, o trabalho de um campo de forças), ao longo do trajeto C, é expresso pela integral

$$A = \int_C X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

Se a força tem potencial, isto é, se existe uma função $U = U(x, y, z)$ (função tencial ou de força), tal que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = Z,$$

o trabalho, independentemente da forma do trajeto C, é igual a

$$A = \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} Xdx + Ydy + Zdz = \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} dU = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1),$$

onde (x_1, y_1, z_1) é o ponto inicial e (x_2, y_2, z_2) é o ponto final do trajeto.

A. *Integrais curvilíneas da primeira espécie*

Calcular as seguintes integrais curvilíneas (os parâmetros são positivos):

2293. $\int\limits_C xy\,ds$, onde C é o contorno do quadrado $|x| + |y| = a$ $(a > 0)$.

2294. $\int\limits_C \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, onde C é o segmento de reta que une entre si os pontos $O\ (0;\ 0)$ e $A(1;\ 2)$.

2295. $\int\limits_C xy\,ds$, onde C é um quarto da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, situado no primeiro quadrante.

2296. $\int\limits_C y^2\,ds$, onde C é o primeiro arco da ciclóide $x = a(t - \text{sen}\,t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

2297. $\int\limits_C \sqrt{x^2 + y^2}\,ds$, onde C é o arco da evolvente da circunferência $x = a(\cos t + t\,\text{sen}\,t)$, $y = a(\text{sen}\,t - t\cos t)$ $[0 \leqslant t \leqslant 2\pi]$.

2298. $\int\limits_C (x^2 + y^2)^2\,ds$, onde C é o arco da espiral logarítmica $r = ae^{m\varphi}\,(m > 0)$ desde o ponto $A(0;\ a)$ até o ponto $O(-\infty;\ 0)$.

2299. $\int\limits_C (x + y)\,ds$, onde C é o laço direito da lemniscata $r^2 = a^2\cos 2\varphi$.

2300. $\int\limits_C (x + z)\,ds$, onde C é um arco da curva $x = t$, $y = \frac{3t^2}{\sqrt{2}}$, $z = t^3 [0 \leqslant t \leqslant 1]$.

2301. $\int\limits_C \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, onde C é a primeira espira da linha helicoidal $x = a\cos t$, $y = a\,\text{sen}\,t$, $z = bt$.

2302. $\int\limits_C \sqrt{2y^2 + z^2}\,ds$. onde C é circunfêrencia $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x = y$.

2303*. Achar a área da superfície lateral do cilindro parabólico $y = \frac{3}{8}x^2$, limitada pelos planos $z = 0$, $x = 0$, $z = x$, $y = 6$.

2304. Achar o comprimento do arco da linha helicoidal cônica $x = ae^t\cos t$, $y = ae^t\,\text{sen}\,t$, $z = ae^t$ desde o ponto $O(0;\ 0;\ 0)$ até o ponto $A(a;\ 0;\ a)$.

2305. Determinar a massa de contorno da elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, se sua densidade linear em cada ponto $M(x, y)$ é igual a $|y|$.

2306. Achar a massa da primeira espira da linha helicoidal $x = a\cos t$, $y = a\,\mathrm{sen}\, t$, $z = bt$, se a densidade em cada ponto é igual ao raio vetor do mesmo.

2307. Determinar as coordenadas do centro de gravidade do semi-arco da ciclóide

$$x = a(t - \mathrm{sen}\, t),\quad y = a(1 - \cos t)\quad [0 \leqslant t \leqslant \pi]$$

2308. Achar o momento de inércia em relação ao eixo OZ da primeira espira da linha helicoidal $x = a\cos t$, $y = a\,\mathrm{sen}\, t$, $z = bt$.

2309. Com que força influe a massa M, distribuída com densidade constante pela circunferência $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, sobre a massa m, situada no ponto $A(0;\ 0;\ b)$?

B. *Integrais curvilíneas de segunda espécie*

Calcular as seguintes integrais curvilíneas (os parâmetros são positivos):

2310. $\int\limits_{AB} (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)\,dy$, onde AB é o arco da parábola $y = x^2$ do ponto $A(1;\ 1)$ ao ponto $B(2;\ 4)$.

2311. $\int\limits_{C} (2a - y)\,dx + x\,dy$, onde C é o primeiro arco da ciclóide $x = a(t - \mathrm{sen}\, t)$, $y = a(1 - \cos t)$, percorrido no sentido de crescimento do parâmetro t.

2312. $\int\limits_{OA} 2xy\,dx - x^2\,dy$, tomado ao longo de diferentes trajetos, que partem da origem das coordenadas O $(0;\,0)$ e que finalizam no ponto $A(2;\ 1)$ (fig. 103):

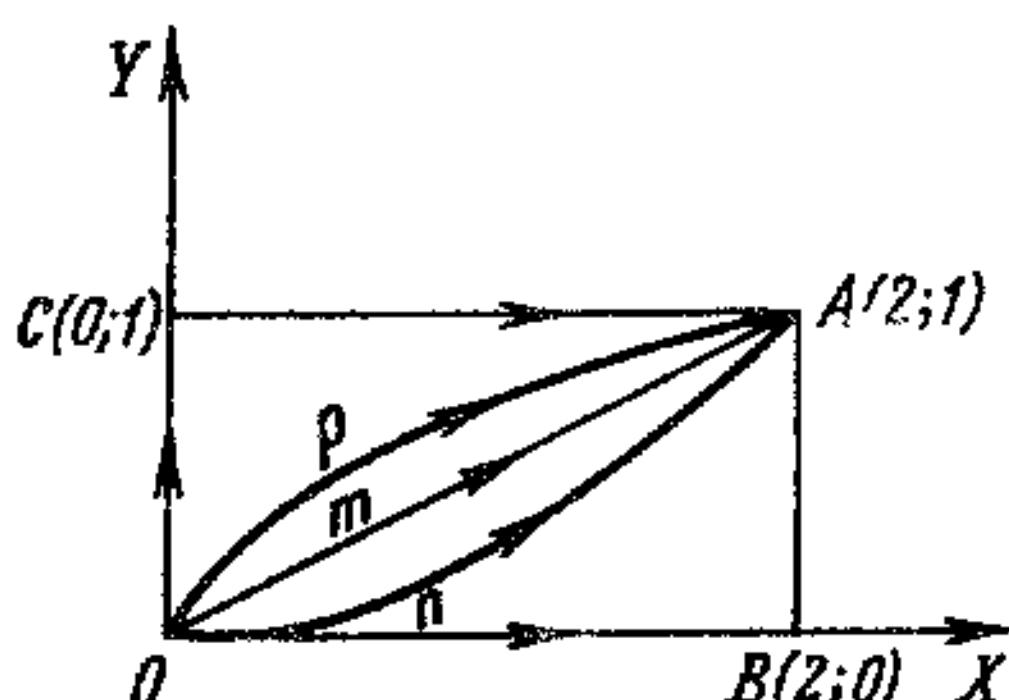



FIG. 103

a) sobre a reta OmA;
b) sobre a parábola OnA, cujo eixo de simetria é o eixo OY;

c) sobre a parábola OpA, cujo eixo de simetria é o eixo OX;
d) sobre a linha quebrada OBA;
e) sobre a linha quebrada OCA.

2313. $\int\limits_{OA} 2xy\,dx + x^2\,dy$ nas mesmas condições do problema **2312.**

2314*. $\oint \frac{(x+y)\,dx - (x-y)\,dy}{x^2+y^2}$, tomado ao longo da circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.

2315. $\int\limits_C y^2dx + x^2dy$, onde C é a metade superior da elipse $x = a\cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$, que segue no sentido dos ponteiros do relógio.

2316. $\int\limits_{AB} \cos y\,dx - \operatorname{sen} x\,dy$, tomado ao longo do segmento AB da bissetriz do segundo ângulo coordenado, se a abscissa do ponto A é igual a 2 e a ordenada do ponto B igual a 2.

2317. $\oint\limits_C \frac{xy(y\,dx - x\,dy)}{x^2+y^2}$, onde C é o laço direito da lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$, que segue em sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.

2318. Calcular as integrais curvilíneas das expressões diferenciais exatas seguintes:

a) $\int\limits_{(-1;\,2)}^{(2;\,3)} x\,dy + y\,dx$, b) $\int\limits_{(0;\,1)}^{(3;\,4)} x\,dx + y\,dy$,

c) $\int\limits_{(0;\,0)}^{(1;\,1)} (x+y)(dx+dy)$,

d) $\int\limits_{(1;\,2)}^{(2;\,1)} \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$ (por um trajeto que não corte o eixo OX),

e) $\int\limits_{\left(\frac{1}{2};\,\frac{1}{2}\right)}^{(x;\,y)} \frac{dx+dy}{x+y}$ (por um trajeto que não corte a reta $x+y=0$),

f) $\int\limits_{(x_1;\,y_1)}^{(x_2;\,y_2)} \varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy$, onde as funções $\varphi(x)$ e $\psi(y)$ são contínuas nos segmentos $[x_1, x_2]$ e $[y_1, y_1]$, respectivamente.

2319. Achar as funções primitivas das expressões subintegrais e calcular as seguintes integrais:

a) $\int\limits_{(-2;\,-1)}^{(3;\,0)} (x^4 + 4xy^3)\,dx + (6x^2y^2 - 5y^4)\,dy$,

b) $\int\limits_{(0;\,-1)}^{(1;\,0)} \frac{x\,dy - y\,dx}{(x-y)^2}$ (o trajeto de integração não é cortado pela reta $y = x$),

c) $\int\limits_{(1;\,1)}^{(3;\,1)} \frac{(x+2y)\,dx + y\,dy}{(x+y)^2}$ (o trajeto de integração não é cortado pela reta $y = -x$),

d) $\int\limits_{(0\;0)}^{(1;\,1)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x\right) dy.$

2320. Calcular a integral

$$I = \int \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}},$$

tomada no sentido dos ponteiros do relógio, ao longo de um quarto da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, que se encontra no primeiro quadrante.

2321. Demonstrar que se $f(u)$ é uma função contínua e C é um contorno fechado parcialmente regular, a

$$\oint\limits_C f(x^2 + y^2)(x\;dx + y\;dy) = 0.$$

2322. Achar a função primitiva U, se:

a) $du = (2x + 3y)\,dx + (3x - 4y)\,dy$;

b) $du = (3x^2 - 2xy + y^2)\,dx - (x^2 - 2xy + 3y^2)\,dy$;

c) $du = e^{x-y}[(1 + x + y)\,dx + (1 - x - y)\,dy]$;

d) $du = \frac{dx}{x+y} + \frac{dy}{x+y}$.

Calcular as seguintes integrais curvilíneas, tomadas ao longo de curvas no espaço:

2323. $\int\limits_C (y - z)\,dx + (z - x)\,dy + (x - y)\,dz$, onde C é uma espira da linha helicoidal

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\,\text{sen}\,t, \\ z = bt, \end{cases}$$

correspondente à variação do parâmetro t de 0 a 2π.

2324. $\oint\limits_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$, onde C é a circunferência

$$\begin{cases} x = R\cos\alpha\cos t, \\ y = R\cos\alpha\operatorname{sen} t, \\ z = R\operatorname{sen}\alpha \quad (\alpha = \text{const}), \end{cases}$$

percorrida no sentido de crescimento do parâmetro.

2325. $\int\limits_{OA} xy\,dx + yz\,dy + zx\,dz$, onde OA é o arco da circunferência

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx, \quad z = x,$$

situado do outro lado do plano XOZ, onde $y > 0$.

2326. Calcular as integrais curvilíneas das seguintes diferenciais exatas:

a) $\int\limits_{(1;\,0;\,-3)}^{(6;\,4;\,8)} x\,dx + y\,dy - z\,dz$, b) $\int\limits_{(1;\,1;\,1)}^{(a;\,b;\,c)} yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz$,

c) $\int\limits_{(0;\,0;\,0)}^{(3;\,4;\,5)} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$,

d) $\int\limits_{(1;\,1;\,1)}^{\left(x;\,y;\,\frac{1}{xy}\right)} \frac{yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz}{xyz}$ (o trajeto de integração encontra-se no primeiro octante).

C. *Fórmula de Green*

2327. Através da fórmula de Green transformar a integral curvilínea

$$I = \oint\limits_C \sqrt{x^2 + y^2}\,dx + y[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})]\,dy$$

onde o contorno C limita um campo S.

2328. Aplicando a fórmula de Green, calcular

$$I = \oint\limits_\Gamma 2(x^2 + y^2)\,dx + (x + y)^2\,dy,$$

onde Γ é o contorno de um triângulo cujos vértices estão nos pontos $A(1;\ 1)$, $B(2;\ 2)$ e $C(1;\ 3)$ e que é percorrido no sentido positivo. Comprovar o resultado obtido calculando a integral diretamente.

2329. Aplicando a fórmula de Green, calcular a integral

$$\oint_C - x^2y\,dx + xy^2\,dy,$$

onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = R^2$, percorrida no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.

2330. Pelos pontos $A(1;\,0)$ e $B(2;\,3)$ traçaram-se uma parábola AmB, cujo eixo coincide com o eixo OY e sua corda é AnB. Achar $\oint\limits_{AmBnA} (x+y)\,dx - (x-y)\,dy$ diretamente, aplicando a fórmula de Green.

2331. Achar $\int\limits_{AmB} e^{xy}[y^2\,dx + (1+xy)\,dy]$, se os pontos A e B estão situados no eixo OX e a área limitada pelo trajeto de integração AmB e pelo segmento AB é igual a S.

2332*. Calcular $\oint\limits_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$. Examinar dois casos:

a) quando a origem das coordenadas está fora do contorno C,
b) quando o contorno rodeia n vezes a origem das coordenadas.

2333.** Demonstrar que se C é uma curva fechada, então

$$\oint_C \cos(X,\,n)\,ds = 0,$$

onde s é o comprimento do arco e n, a normal exterior.

2334. Através da fórmula de Green achar a integral

$$I = \oint_C [x\cos(X,\,n) + y\,\mathrm{sen}(X,\,n)]\,ds,$$

onde ds é a diferencial do arco e n a normal exterior ao contorno C.

2335*. Calcular a integral

$$\oint_C \frac{dx - dy}{x + y}.$$

tomada ao longo do contorno do quadrado que tem seus vértices nos pontos $A(1;\,0)$, $B(0;\,1)$, $C(-1;\,0)$ e $D(0;\,-1)$, com a condição de que o percurso do contorno seja feito em sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.

D. *Aplicações da integral curvilínea*

Calcular a área das figuras limitadas pelas seguintes curvas:

2336. Pela elipse $x = a\cos t$, $y = b\,\mathrm{sen}\,t$.

2337. Pelo astróide $x = a\cos^3 t$, $y = a\,\mathrm{sen}^3 t$.

2338. Pela cardióide $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\text{sen}\, t - \text{sen}\, 2t)$.

2339*. Pelo laço da folha de Descartes $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ $(a > 0)$.

2340. Pela curva $(x + y)^3 = axy$.

2341*. Uma circunferência de raio r gira sem resvalar sobre outra circunferência fixa, de raio R, conservando-se sempre fora dela. Supondo que $\frac{R}{r}$ seja um número inteiro, achar a área limitada pela curva (epiciclóide) que descreve um ponto qualquer da circunferência móvel. Analisar o caso particular em que $r = R$ (cardióide).

2342*. Uma circunferência de raio r gira sem resvalar em uma circunferência fixa, de raio R, conservando-se sempre dentro dela. Supondo que $\frac{R}{r}$ seja um número inteiro, achar a área limitada pela curva (hipociclóide) que descreve um ponto qualquer da circunferência móvel. Analisar o caso particular em que $r = \frac{R}{4}$ (astróide).

2343. Um campo é formado por uma força de grandeza constante F, que tem a direção do semi-eixo positivo OX. Achar o trabalho deste campo, quando um ponto material descreve no sentido dos ponteiros do relógio, o quarto de círculo $x^2 + y^2 = R^2$ que se encontra no primeiro quadrante.

2344. Achar o trabalho que realiza a força de gravidade ao deslocar um ponto material de massa m da posição $A(x_1; y_1; z_1)$ até a posição $B(x_2; y_2; z_2)$ (o eixo OZ está dirigido verticalmente para cima).

2345. Achar o trabalho de uma força elástica, dirigida à origem das coordenadas, cuja grandeza é proporcional ao afastamento do ponto em relação à origem das coordenadas, se o ponto de aplicação desta força descreve, no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, um quarto da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, situada no primeiro quadrante.

2346. Achar a função potencial da força $R\{X, Y, Z\}$ e determinar o trabalho desta força no setor do trajeto dado, se:

a) $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -mg$ (força da gravidade) e o ponto material se desloca da posição $A(x_1, y_1, z_1)$ para a posição $B(x_2, y_2, z_2)$;

b) $X = -\frac{\mu x}{r^3}$, $Y = -\frac{\mu y}{r^3}$, $Z = -\frac{\mu z}{r^3}$, onde $\mu = \text{const}$ e $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (força de atração de Newton) e o ponto material se desloca da posição $A(a, b, c)$ para o infinito;

c) $X = -k^2x$, $Y = -k^2y$, $Z = -k^2z$, onde $k = \text{const}$ (força elástica), encontrando-se o ponto inicial do trajeto na esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ e o final na esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ $(R > r)$.

§ 10. Integrais de superfície

1°. Integrais de superfície de primeira espécie. Seja $f(x, y, z)$ uma função contínua e $z = \varphi(x, y)$, uma superfície regular S.

A integral de superfície de primeira espécie representa o limite de soma integral

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta S_i,$$

onde ΔS_i é a área de um elemento i da superfície S, a que pertence o ponto (x_i, y_i, z_i), sendo que o diâmetro máximo destes elementos em que se divide a superfície, tende a zero.

O valor desta integral não depende do lado da superfície S que se escolha para a integração.

Se a projeção σ da superfície S sobre o plano XOY é uniforme, isto é, que qualquer reta paralela ao eixo OZ corta a superfície S em um só ponto, a integral de superfície de primeira espécie correspondente pode ser calculada pela fórmula

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_{(\sigma)} f[x,\ y,\ \varphi(x,\ y)]\sqrt{1 + \varphi_x'^2(x, y) + \varphi_y'^2(x, y)}\, dx\, dy.$$

Exemplo 1. Calcular a integral de superfície

$$\iint_S (x + y + z)\, dS,$$

onde S é a superfície do cubo $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

Calculamos a soma das integrais de superfície tomadas sobre a face superior do cubo ($z = 1$) e sobre a face inferior do mesmo ($z = 0$):

$$\int_0^1\int_0^1 (x + y + 1)\, dx\, dy + \int_0^1\int_0^1 (x + y)\, dx\, dy = \int_0^1\int_0^1 (2x + 2y + 1)\, dx\, dy = 3.$$

É evidente que a integral de superfície procurada será três vezes maior e igual a

$$\iint_S (x + y + z)\, dS = 9.$$

2°. Integral de superfície de segunda espécie. Se $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$ e $R = R(x, y, z)$ são funções contínuas e S^+ é a face de uma superfície regular e bilateral S que se caracteriza pela direção da normal $\boldsymbol{n}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, a *integral de superfície de segunda espécie* correspondente é expressa da forma seguinte:

$$\iint_{S^+} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS.$$

Ao passar para a outra face S^- da superfície, esta integral muda seu sinal para o sinal contrário.

Se a superfície S é dada de forma implícita, $F(x, y, z) = 0$, os cossenos diretores da normal desta superfície são determinados pelas fórmulas

$$\cos\alpha = \frac{1}{D}\frac{\partial F}{\partial x},\quad \cos\beta = \frac{1}{D}\frac{\partial F}{\partial y},\quad \cos\gamma = \frac{1}{D}\frac{\partial F}{\partial z},$$

onde

$$D = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2},$$

e a escolha do sinal a ser colocado ante o radical deve ser feita de acordo com a face da superfície S que se tome.

3°. **Fórmula de Stokes.** Se as funções $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$ e $R = R(x, y, z)$ têm derivadas contínuas e C é um contorno fechado e parcialmente regular simples, que limita uma superfície regular e bilateral S, tem lugar *a fórmula de Stokes*

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS,$$

onde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ são os cossenos diretores da normal à superfície S, devendo determinar-se a normal de tal forma que por parte desta o percurso do contorno C seja efetuado no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio (no sistema direito de coordenadas).

Calcular as seguintes integrais de superfície de primeira espécie:

2347. $\iint_S (x^2 + y^2)\,dS$, onde S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

2348. $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2}\,dS$, onde S é a superfície lateral do cone

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0 \quad (0 \leqslant z \leqslant b).$$

Calcular as seguintes integrais de superfície de segunda espécie:

2349. $\iint_S yz\,dy\,dz + xz\,dz\,dx + xy\,dx\,dy$, onde S é a face externa da superfície do tetraedro limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = a$.

2350. $\iint_S z\,dx\,dy$, onde S é a face externa do elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

2351. $\iint_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$, onde S é a face externa da superfície da semi-esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(z \geqslant 0)$.

2352. Achar a massa da superfície do cubo $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, se a densidade superficial no ponto $M(x;\ y;\ z)$ é igual a xyz.

2353. Determinar as coordenadas do centro de gravidade da cápsula parabólica homogênea $az = x^2 + y^2$ $(0 \leqslant z \leqslant a)$.

2354. Achar o momento de inércia da parte da superfície lateral do cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0 \leqslant z \leqslant h)$, em relação ao eixo OZ.

2355. Através da fórmula de Stokes, transformar as integrais:

a) $\oint\limits_C (x^2-yz)\,dx+(y^2-zx)\,dy+(z^2-xy)\,dz$;

b) $\oint\limits_C y\,dx+z\,dy+x\,dz$.

Aplicando a fórmula de Stokes, achar as integrais dadas a seguir e comprovar os resultados calculando diretamente:

2356. $\oint\limits_C (y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz$, onde C é a circunferência

$$x^2+y^2+z^2=a^2, \quad x+y+z=0.$$

2357. $\oint\limits_C (y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz$, onde C é a elipse

$$x^2+y^2=1, \quad x+z=1.$$

2358. $\oint\limits_C x\,dx+(x+y)\,dy+(x+y+z)\,dz$, onde C é a curva

$$x=a\operatorname{sen}t, \quad y=a\cos t, \quad z=a(\operatorname{sen}t+\cos t) \quad [0 \leqslant t \leqslant 2\pi].$$

2359. $\oint\limits_{ABCA} y^2\,dx+z^2\,dy+x^2\,dz$, onde $ABCA$ é o contorno do ΔABC com os vértices nos pontos $A(a;0;0)$, $B(0;a;0)$, $C(0;0;a)$.

2360. Em que caso a integral curvilínea

$$I=\oint\limits_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

será igual a zero para qualquer contorno fechado de C?

§ 11. Fórmula de Ostrogradski — Gauss

Se S é uma superfície regular fechada, que limita um V finito, e $P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x, y, z)$ e $R=R(x, y, z)$ são funções contínuas, junto com suas derivadas parciais de primeira ordem, no campo fechado V, tem lugar a *fórmula de Ostrogradski—Gauss*

$$\iint\limits_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS=\iiint\limits_{(V)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz,$$

onde $\cos\alpha$, $\cos\beta$ e $\cos\gamma$ são os cossenos diretores da normal exterior à superfície S.

Através da fórmula de Ostrogradski—Gauss, transformar as seguintes integrais de superfície, sobre as superfícies fechadas S, que limitam o volume V (onde $\cos\alpha$, $\cos\beta$ e $\cos\gamma$ são os cossenos diretores da normal exterior à superfície S).

2361. $\iint\limits_S xy\,dx\,dy + yz\,dy\,dz + zx\,dz\,dx.$

2362. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy.$

2363. $\iint\limits_S \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dS.$

2364. $\iint\limits_S \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right) dS.$

Valendo-se da fórmula de Ostrogradski—Gauss calcular as seguintes integrais de superfície (os parâmetros são positivos):

2365. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$, onde S é a face externa da superfície do cubo $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant a$.

2366. $\iint\limits_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$, onde S é a face externa da pirâmide limitada pelas superfícies $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

2367. $\iint\limits_S x^3\,dy\,dz + y^3\,dz\,dx + z^3\,dx\,dy$, onde S é a face externa da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

2368. $\iint\limits_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,dS$, onde S é a face externa completa do cone

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0 \quad [0 \leqslant z \leqslant b].$$

2369. Demonstrar que se S é uma superfície fechada e $\boldsymbol{l}$ uma direção constante qualquer, então

$$\iint\limits_S \cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{l})\,dS = 0,$$

onde $\boldsymbol{n}$ é a normal exterior à superfície S.

2370. Demonstrar que o volume V, limitado pela superfície S, é igual a

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS,$$

onde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ são os cossenos diretores da normal exterior à superfície S.

§ 12. Elementos da teoria do campo

1°. Campo escalar e campo vetorial. *O campo escalar* é determinado pela função escalar do ponto $u = f(P) = f(x, y, z)$, onde $P(x, y, z)$ é um ponto do espaço. As superfícies $f(x, y, z) = C$, onde $C = \text{const}$, chamam-se *superfícies de nível* do campo escalar.

O campo vetorial é determinado pela função vetorial do ponto $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(P) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$, onde P é um ponto no espaço e $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ é o raio vetor do ponto P. Na forma coordenada $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$, onde $a_x = a_x(x, y, z)$, $a_y = a_y(x, y, z)$, $a_z = a_z(x, y, z)$ são as projeções do vetor $\boldsymbol{a}$ sobre os eixos das coordenadas. *As linhas vetoriais (linhas de força, linhas de corrente)* do campo vetorial são deduzidas do sistema de equações diferenciais

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}.$$

O campo escalar ou vetorial independente do tempo t, chama-se *estacionário*, e o dependente, *não é estacionário*.

2°. Gradiente. O vetor

$$\operatorname{grad} U(P) = \frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k} \equiv \nabla U,$$

onde $\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$ é o operador de Hamilton (nabla), recebe o nome de *gradiente* do campo derivado $U = f(P)$ no ponto P (ver cap. VI, § 6). O vetor $\operatorname{grad} U(P) \neq 0$ está dirigido pela normal n à superfície de nível no ponto P, no sentido de crescimento da função U e tem um comprimento igual a

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}.$$

Se a direção no ponto P é dada pelo vetor unitário $\boldsymbol{l}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, então

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \operatorname{grad} U \cdot \boldsymbol{l} = \operatorname{grad}_l U = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma$$

(derivada da função U no ponto P na direção l).

3°. Divergência e rotação. Chama-se *divergência* de um campo vetorial derivado $\boldsymbol{a}(P) = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$, o escalar

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial x} \equiv \nabla\boldsymbol{a}.$$

Recebe o nome de *rotação* de um campo vetorial $\boldsymbol{a}(P) = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$ o vetor

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \equiv \nabla \times \boldsymbol{a}.$$

4°. Fluxo do vetor. Denomina-se *fluxo* do campo vetorial contínuo $\boldsymbol{a}(P)$ através da superfície S, no sentido determinado pelo vetor unitário da normal $\boldsymbol{n}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ a esta superfície, a integral

$$\iint_S \boldsymbol{an}\, dS = \iint_S a_n\, dS = \iint_S (a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma)\, dS.$$

Se S é uma superfície fechada, que limita um volume V, e $\boldsymbol{n}$ é o vetor unitário da normal externa à superfície S, será válida *a fórmula de Ostrogradski—Gauss*, cuja forma vetorial é

$$\oiint_S a_n\, dS = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dV.$$

5°. Circulação do vetor; trabalho do campo. *A integral linear* do vetor contínuo $\boldsymbol{a}$ sobre a curva parcialmente regular C é determinada pela fórmula

$$\int_C \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = \int_C a_s\, ds = \int_C a_x\, dx + a_y\, dy + a_z\, dz \tag{1}$$

e represénta o *trabalho* do campo $\boldsymbol{a}$ ao longo da curva C(a_s é a projeção do vetor $\boldsymbol{a}$ sobre a tangente a C).

Se a curva C é fechada, a integral linear (1) se chama *circulação* do campo vetorial $\boldsymbol{a}$ ao longo do contorno C.

Se a curva fechada C limita uma superfície bilateral S, é válida a *fórmula de Stokes*, cuja forma vetorial é

$$\oint_C \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = \iint_S \boldsymbol{n} \operatorname{rot} \boldsymbol{a}\, dS = \iint_S (\operatorname{rot} \boldsymbol{a})_n\, dS,$$

onde $\boldsymbol{n}$ é o vetor da normal à superfície S, cuja direção deve ser escolhida de tal modo, que para o observador que olhe no sentido de $\boldsymbol{n}$, o percurso do contorno C seja efetuado em direção contrária à dos ponteiros do relógio, quando o sistema de coordenadas é direito.

6°. Campo potencial e campo solenoidal. Um campo vetorial $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ chama-se *potencial*, se

$$\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} U,$$

onde $U = f(\boldsymbol{r})$ é uma função escalar diferenciável (*potencial* do campo).

Para que um campo $\boldsymbol{a}$ seja potencial, dado em um campo simplesmente conexo que se deriva continuamente, é necessário e suficiente que $\boldsymbol{a}$ seja *irrotacional*, isto é, que $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0$. Neste caso existe um potencial U, determinado pela equação

$$dU = a_x\, dx + a_y\, dy + a_z\, dz.$$

Se o potencial U é uma função uniforme, temos $\int_{AB} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = U(B) - U(A)$; em particular, a circulação do vetor $\boldsymbol{a}$ será igual a zero: $\oint_C \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = 0$.

Um campo vetorial derivado $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ chama-se *solenoidal*, se em cada ponto do campo $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 0$; neste caso o fluxo do vetor através de qualquer superfície fechada será igual a zero.

Se o campo é ao mesmo tempo potencial e solenoidal, então div (grad U) = 0 e a função potencial U é harmônica, isto é, satisfaz a equação de Laplace $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0$, ou seja $\Delta U=0$, onde $\Delta=\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador de Laplace.

2371. Determinar as superfícies de nível do campo escalar $U=f(r)$, onde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Quais serão as superfícies de nível do campo $U=F(\rho)$, onde $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$?

2372. Determinar as superfícies de nível do campo escalar

$$U=\operatorname{arcsen}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

2373. Demonstrar que as linhas vetoriais do campo vetorial $\boldsymbol{a}(P)=\boldsymbol{c}$, onde $\boldsymbol{c}$ é um vetor constante, são retas paralelas ao vetor $\boldsymbol{c}$.

2374. Achar as linhas vetoriais do campo $\boldsymbol{a}=-\omega y\boldsymbol{i}+\omega x\boldsymbol{j}$, onde ω é uma constante.

2375. Deduzir as fórmulas:

a) grad $(C_1U+C_2V)=C_1$ grad $U+C_2$ grad V, onde C_1 e C_2 são constantes;

b) grad $(UV)=U$ grad $V+V$ grad U;

c) grad $(U^2)=2U$ grad U;

d) grad $\left(\frac{U}{V}\right)=\frac{V \text{ grad } U-U \text{ grad } V}{V^2}$;

e) grad $\varphi(U)=\varphi'(U)$ grad U.

2376. Achar a grandeza e a direção do gradiente do campo $U=x^3+y^3+z^3-3xyz$ no ponto $A(2;1;1)$. Determinar em que pontos o gradiente do campo é perpendicular ao eixo OZ e em quais é igual a zero.

2377. Calcular o grad U, se U é respectivamente igual a: a) r; b) r^2; c) $\frac{1}{r}$; d) $f(r)$ $(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$.

2378. Achar o gradiente do campo escalar $U=\boldsymbol{c}\boldsymbol{r}$, onde $\boldsymbol{c}$ é um vetor constante. Quais serão as superfícies de nível deste campo e como estão situadas em relação ao vetor $\boldsymbol{c}$?

2379. Achar a derivada da função $U=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ em um ponto dado $P(x, y, z)$ na direção do raio vetor $\boldsymbol{r}$ deste ponto. Em que caso esta derivada será igual à grandeza do gradiente?

2380. Achar a derivada da função $U=\frac{1}{r}$ na direção $\boldsymbol{l}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$. Em que caso esta derivada é igual a zero?

2381. Deduzir as fórmulas:

a) div $(C_1\boldsymbol{a}_1 + C_2\boldsymbol{a}_2) = C_1 \operatorname{div} \boldsymbol{a}_1 + C_2 \operatorname{div} \boldsymbol{a}_2$, onde C_1 e C_2 são constantes;

b) div $(U\boldsymbol{c}) = \operatorname{grad} U \cdot \boldsymbol{c}$, onde $\boldsymbol{c}$ é um vetor constante;

c) div $(U\boldsymbol{a}) = \operatorname{grad} U \cdot \boldsymbol{a} + U \operatorname{div} \boldsymbol{a}$.

2382. Calcular div $\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$.

2383. Achar div $\boldsymbol{a}$ para o campo vetorial central $\boldsymbol{a}(P) = f(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}$, onde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

2384. Deduzir as fórmulas:

a) rot $(C_1\boldsymbol{a}_1 + C_2\boldsymbol{a}_2) = C_1 \operatorname{rot} \boldsymbol{a}_1 + C_2 \operatorname{rot} \boldsymbol{a}_2$, onde C_1 e C_2 são constantes;

b) rot $(U\boldsymbol{c}) = \operatorname{grad} U \times \boldsymbol{c}$, onde $\boldsymbol{c}$ é um vetor constante;

c) rot $(U\boldsymbol{a}) = \operatorname{grad} U \times \boldsymbol{a} + U \operatorname{rot} \boldsymbol{a}$.

2385. Calcular a divergência e a rotação do vetor $\boldsymbol{a}$, se $\boldsymbol{a}$ é igual respectivamente a: a) $\boldsymbol{r}$; b) $r\boldsymbol{c}$ e c) $f(r)\,\boldsymbol{c}$, onde $\boldsymbol{c}$ é um vetor constante.

2386. Achar a divergência e a rotacão do campo das velocidades lineares dos pontos de um corpo que gira com uma velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ constante em torno do eixo OZ, em direção contrária à dos ponteiros do relógio.

2387. Calcular a rotação do campo das velocidades lineares $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ dos pontos de um corpo que gira com uma velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ constante em torno de um determinado eixo que passa pela origem das coordenadas.

2388. Calcular a divergência e a rotação do gradiente de um campo escalar U.

2389. Demonstrar que div (rot $\boldsymbol{a}$) $= 0$.

2390. Usando o teorema de Ostrogradski — Gauss, demonstrar que o fluxo do vetor $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}$, através de uma superfície fechada que limita um volume arbitrário v, é igual ao triplo deste volume.

2391. Achar o fluxo do vetor $\boldsymbol{r}$ através da superfície total do cilindro $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $0 \leqslant z \leqslant H$.

2392. Achar o fluxo do vetor $\boldsymbol{a} = x^3\boldsymbol{i} + y^3\boldsymbol{j} + z^3\boldsymbol{k}$, através de: a) superfície lateral do cone $\frac{x^2 + y^2}{R^2} \leqslant \frac{z^2}{H^2}$, $0 \leqslant z \leqslant H$; b) através da superfície total deste mesmo cone.

2393*. Calcular a divergência e o fluxo da força de atração $F = -\frac{m\boldsymbol{r}}{r^3}$ de um ponto de massa m, situado na origem das coordenadas, através de uma superfície fechada arbitrária que envolve este ponto.

2394. Calcular a integral linear do vetor $\boldsymbol{r}$ ao longo de uma espira da linha helicoidal $x = R\cos t$; $y = R \operatorname{sen} t$; $z = ht$, desde $t = 0$ até $t = 2\pi$.

2395. Pelo teorema de Stokes, calcular a circulação do vetor $\boldsymbol{a} = x^2y^3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ ao longo da circunferência $x^2 + y^2 = R^2$; $z = 0$, tomando em qualidade de superfície o hemisfério $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

2396. Demonstrar que se $\boldsymbol{F}$ é uma força central, isto é, que está dirigida a um ponto fixo 0 e depende somente da distância r até este ponto: $\boldsymbol{F} = f(r)\mathbf{r}$, onde $f(r)$ é uma função uniforme contínua, o campo será potencial. Achar o potencial U do campo.

2397. Achar o potencial U do campo de gravitação que forma um ponto material de massa m, situado na origem das coordenadas: $\boldsymbol{a} = -\frac{m}{r^3}\boldsymbol{r}$. Demonstrar que o potencial U satisfaz a equação de Laplace $\Delta U = 0$.

2398. Verificar se os campos vetoriais seguintes têm potencial U e, caso tenham, achá-lo:

a) $\boldsymbol{a} = (5x^2y - 4xy)\boldsymbol{i} + (3x^2 - 2y)\boldsymbol{j}$;

b) $\boldsymbol{a} = yz\boldsymbol{i} + zx\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$;

c) $\boldsymbol{a} = (y + z)\boldsymbol{i} + (x + z)\boldsymbol{j} + (x + y)\boldsymbol{k}$.

2399. Demonstrar que o campo central espacial $\boldsymbol{a} = f(r)\,\boldsymbol{r}$ será solenoidal somente quando $f(r) = \frac{k}{r^3}$, onde $k = \text{const}$.

2400. Será solenoidal o campo vetorial $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r})$, onde $\boldsymbol{c}$ é um vetor constante?

Capítulo VIII
SÉRIES

---

§ 1. Séries numéricas

1°. Conceitos principais. Uma série numérica

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

é convergente, se sua *soma parcial*

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

em limite quando $n \to \infty$. O número $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ recebe o nome de *soma* da série e o número

$$R_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$$

o de *resto* da série. Se o $\lim_{n\to\infty} S_n$ não existe, a série recebe o nome de *divergente*.

Se a série é convergente, o $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *(condição necessária para a convergência)*. Mas a afirmação contrária não é correta.

Para que a série (1) seja convergente é necessário e suficiente que para qualquer número positivo ε pode-se encontrar um N tal, que para $n > N$ e para qualquer número positivo p, é válida a desigualdade

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

(critério de Cauchy).

A convergência ou divergência de uma série não se altera se acrescentarmos ou suprimirmos um número finito de termos.

2°. Critérios de convergência e divergência das séries de termos positivos.

a) I *critério de comparação*. Se $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$, a partir de um determinado $n = n_0$ e a série

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad (2)$$

é convergente, a série (1) também será convergente. Se, pelo contrário, a série (1) é divergente, a série (2) também o será.

Em qualidade de séries comparativas é muito cômodo tomar, em particular, a *progressão geométrica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \quad (a \neq 0),$$

que e convergente quando $|q| < 1$ e divergente quando $|q| \geqslant 1$, e a *série harmônica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

que é *divergente*.

Exemplo 1. A série

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{n \cdot 2^n} + \dots$$

é convergente, já que aqui

$$a_n = \frac{1}{n \cdot 2^n} < \frac{1}{2^n},$$

e a progressão geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n},$$

cuja razão é $q = \frac{1}{2}$, é convergente.

Exemplo 2. A série

$$\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \dots + \frac{\ln n}{n} + \dots$$

é divergente, já que seu termo geral $\frac{\ln n}{n}$ é maior que o termo correspondente $\frac{1}{n}$ da série harmônica (que é divergente).

b) II *critério de comparação*. Se existe um $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n}$ finito e diferente de zero (em particular, se $a_n \sim b_n$), as séries (1) e (2) são convergentes ou divergentes simultaneamente.

Exemplo 3. A série

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n - 1} + \dots$$

é divergente, já que

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2n - 1} : \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} \neq 0,$$

e a série cujo termo geral é $\frac{1}{n}$, é divergente.

Exemplo 4. A série

$$\frac{1}{2 - 1} + \frac{1}{2^2 - 2} + \frac{1}{2^3 - 3} + \dots + \frac{1}{2^n - n} + \dots$$

é convergente, porque

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2^n - n} : \frac{1}{2^n} \right) = 1, \text{ isto é, } \frac{1}{2^n - n} \sim \frac{1}{2^n},$$

e a série cujo termo geral é $\frac{1}{2^n}$, é convergente.

c) *Critério de D'Alembert*. Quando $a_n > 0$ (a partir de um determinado $n = n_0$) e existe o limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

a série (1) será convergente, se $q < 1$, e divergente, se $q > 1$. Quando $q = 1$, a convergência da série não fica esclarecida.

Exemplo 5. Investigar a convergência da série

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} + \dots$$

Solução. Temos

$$a_n = \frac{2n-1}{2^n}, \qquad a_{n+1} = \frac{2n+1}{2^{n+1}}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)\,2^n}{2^{n+1}(2n-1)} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2n}}{1-\frac{1}{2n}} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, a série dada é convergente.

d) *Critério de Cauchy*. Quando $a_n \geqslant 0$ (a partir de um determinado $n = n_0$) e existe o limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

a série (1) é convergente, se $q < 1$, e divergente se $q > 1$. No caso em que $q = 1$, a convergência da série não fica esclarecida.

e) *Critério integral de Cauchy*. Se $a_n = f(n)$, onde a função $f(x)$ é positiva, monótona decrescente e contínua quando $x \geqslant a \geqslant 1$, a série (1) e a integral

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

são convergentes ou divergentes simultaneamente.

Valendo-se do critério integral pode-se demonstrar que a *série de Dirichlet*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \tag{3}$$

é convergente, se $p > 1$, e divergente se $p \leqslant 1$. A convergência de muitas séries pode ser investigada comparando-as com a correspondente série de Dirichlet (3).

Exemplo 6. Investigar a convergência da série

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \dots + \frac{1}{(2n-1)\,2n} + \dots$$

Solução. Temos

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)\,2n} = \frac{1}{4n^2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2n}} \sim \frac{1}{4n^2}.$$

Como a série de Dirichlet é convergente quando $p = 2$, baseando-se no II critério de confronto, pode-se afirmar que a série dada também é convergente.

3°. **Critérios de convergência das séries de termos positivos e negativos.** Se a série

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots, \tag{4}$$

formada pelos valores absolutos dos termos da série (1) é convergente, a série (1) também é convergente e recebe o nome de *absolutamente convergente*. Se, ao contrário, a série (1) é convergente, enquanto que a (4) é divergente, a série (1) chama-se, então, *condicionalmente convergente*.

Para averiguar se a série (1) é absolutamente convergente, podem empregar-se para a série (4) os já conhecidos critérios de convergência das séries de termos positivos. Em particular, a série (1) será absolutamente convergente, se

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \text{ ou } \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} < 1.$$

No caso geral da divergência da série (4) não segue a divergência da série (1). Porém, se o $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ ou $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} > 1$, então será divergente não só a série (4), mas também a série (1).

Critério de Leibniz. Se para uma série alternada

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots \quad (b_n \geqslant 0) \tag{5}$$

são válidas as condições: 1) $b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \geqslant \ldots$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, a série (5) é convergente.

Para o resto da série R_n, neste caso, será válida a apreciação

$$|R_n| \leqslant b_{n+1}.$$

Exemplo 7. Analisar a convergência da série

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \left(\frac{4}{7}\right)^4 + \ldots + (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n + \ldots$$

Solução. Compomos a série de valores absolutos dos termos da série dada:

$$1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \left(\frac{4}{7}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{n}{2n-1}\right) + \ldots$$

Como

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2},$$

a série dada é absolutamente convergente.

Exemplo 8. A série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n} + \ldots$$

é convergente, já que são válidas as condições do critério de Leibniz. Porém, converge não absolutamente (condicionalmente), já que a série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

é divergente (série harmônica).

Observação. Para que as séries alternadas sejam convergentes, não é suficiente que seu termo geral tenda a zero. O critério de Leibniz afirma unicamente que a série alternada converge se o valor absoluto do termo geral da mesma tende a zero monotonamente. Por exemplo, a série

$$1-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{k}-\frac{1}{5^k}+\ldots$$

é divergente, apesar de que seu termo geral tenda a zero (a variação monótona do valor absoluto deste termo geral aqui, naturalmente, não é valida). Efetivamente, neste caso $S_{2k}=S'_k+S''_k$, onde

$$S'_k=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}, \qquad S''_k=-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{5^k}\right),$$

e o $\lim\limits_{k\to\infty} S'_k=\infty$ (S'_k é a soma parcial da série harmônica), enquanto que o $\lim\limits_{k\to\infty} S''_k$ existe e é finito (S''_k é a soma parcial da progressão geométrica, que é convergente), portanto $\lim\limits_{k\to\infty} S_{2k}=\infty$.

Por outro lado, para que a série alternada seja convergente, não é necessário que seja válido o critério de Leibniz, já que a série alternada pode ser convergente, se o valor absoluto de seu termo geral tende a zero de forma não monótona. Assim, a série

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^3}-\frac{1}{(2n)^2}+\ldots$$

é convergente, e mais, absolutamente, apesar de que o critério de Leibniz não é válido, já que o valor absoluto do termo geral da série, ainda que tenda a zero, não se faz monotonamente.

4°. Séries de termos complexos. A série que tem por termo geral $c_n=a_n+ib_n$ (i é uma unidade imaginaria) é convergente, se, e somente se, são convergentes simultaneamente as séries de seus termos reais $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, e neste caso

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n=\sum_{n=1}^{\infty} a_n+i\sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{6}$$

A série (6) é indubitavelmente convergente e se denomina *absolutamente convergente* se converge a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|=\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2+b_n^2},$$

cujos termos são os módulos dos termos da série (6).

5°. Operações com as séries.

a) Cada um dos termos de uma série convergente pode ser multiplicado por um número qualquer k, se

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots=S,$$

então

$$ka_1+ka_2+\ldots+ka_n+\ldots=kS.$$

b) Entende-se por *soma (diferença)* de duas séries convergentes

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots=S_1, \tag{7}$$

$$b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots=S_2 \tag{8}$$

a série correspondente

$$(a_1\pm b_1)+(a_2\pm b_2)+\ldots+(a_n\pm b_n)+\ldots=S_1\pm S_2.$$

c) Chama-se *produto* das séries (7) e (8) a série

$$c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots, \tag{9}$$

onde $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1$ $(n = 1, 2, \dots)$.

Se as séries (7) e (8) são absolutamente convergentes, a série (9) também o séra e sua soma será igual a $S_1 S_2$.

d) Se uma série é absolutamente convergente, sua soma não varia quando se altera a ordem de seus termos. Esta propriedade não tem lugar quando a convergência não é absoluta.

Escrever a fórmula mais simples do enésimo termo das seguintes séries, de acordo com os termos indicados:

2401. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$ **2402.** $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots$

2403. $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \dots$ **2404.** $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$

2405. $\frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{5}{16} + \frac{6}{25} + \dots$ **2406.** $\frac{2}{5} + \frac{4}{8} + \frac{6}{11} + \frac{8}{14} + \dots$

2407. $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \dots$

2408. $1 + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 4 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10} + \dots$

2409. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

2410. $1 + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{4} + 5 + \frac{1}{6} + \dots$

Nos problemas n°s. **2411 — 2415** é necessário escrever os 4 ou 5 primeiros termos da série, partindo do termo geral a_n já conhecido.

2411. $a_n = \frac{3n - 2}{n^2 + 1}$. **2412.** $a_n = \frac{(-1)^n n}{2^n}$.

2413. $a_n = \frac{2 + (-1)^n}{n^2}$. **2414.** $a_n = \frac{1}{[3 + (-1)^n]^n}$.

2415. $a_n = \frac{\left(2 + \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}\right) \cos n\pi}{n!}$.

Investigar a convergência das seguintes séries, valendo-se dos critérios de confronto (ou do critério necessário):

2416. $1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1} + \dots$

2417. $\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3 + \dots + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \dots$

2418. $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \dots + \frac{n + 1}{2n + 1} + \dots$

2419. $\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt[3]{10}} + \frac{1}{\sqrt[4]{10}} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n+1]{10}} + \dots$

2420. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n}+\ldots$

2421. $\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\ldots+\frac{1}{10n+1}+\ldots$

2422. $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\ldots$

2423. $2+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\ldots+\frac{2^n}{n}+\ldots$

2424. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$

2425. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{8^2}+\ldots+\frac{1}{(3n-1)^2}+\ldots$

2426. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt[3]{2}}{3\sqrt{2}}+\frac{\sqrt[3]{3}}{4\sqrt{3}}+\ldots+\frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}+\ldots$

Empregando o critério de D'Alembert investigar a convergência das séries:

2427. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2\sqrt{2}}+\ldots+\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}+\ldots$

2428. $\frac{1}{2}+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9}+\ldots+\frac{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n-3)}+\ldots$

Empregando o critério de Cauchy, investigar a convergência das séries:

2429. $\frac{2}{1}+\left(\frac{3}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n+\ldots$

2430. $\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\left(\frac{3}{8}\right)^5+\ldots+\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}+\ldots$

Investigar a convergência das seguintes séries de termos positivos:

2431. $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$

2432. $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2-1}+\ldots$

2433. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots$

2434. $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\frac{9}{19}+\ldots+\frac{n^2}{2n^2+1}+\ldots$

2435. $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\ldots+\frac{n}{n^2+1}+\ldots$

2436. $\frac{3}{2^2\cdot 3^2}+\frac{5}{3^2\cdot 4^2}+\frac{7}{4^2\cdot 5^2}+\ldots+\frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}+\ldots$

2437. $\frac{3}{4}+\left(\frac{6}{7}\right)^2+\left(\frac{9}{10}\right)^3+\ldots+\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n+\ldots$

2438. $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{5}{7}+\left(\frac{7}{10}\right)^{\frac{3}{2}}+\ldots+\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}+\ldots$

2439. $\frac{1}{e}+\frac{8}{e^2}+\frac{27}{e^3}+\ldots+\frac{n^3}{e^n}+\ldots$

2440. $1+\frac{2}{2^2}+\frac{4}{3^3}+\ldots+\frac{2^{n-1}}{n^n}+\ldots$

2441. $\frac{1!}{2+1}+\frac{2!}{2^2+1}+\frac{3!}{2^3+1}+\ldots+\frac{n!}{2^n+1}+\ldots$

2442. $1+\frac{2}{1!}+\frac{4}{2!}+\ldots+\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots$

2443. $\frac{1}{4}+\frac{1\cdot 3}{4\cdot 8}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 8\cdot 12}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{4\cdot 8\cdot 12\ldots 4n}+\ldots$

2444. $\frac{(1!)^2}{2!}+\frac{(2!)^2}{4!}+\frac{(3!)^2}{6!}+\ldots+\frac{(n!)^2}{(2n!)}+\ldots$

2445. $1000+\frac{1\,000\cdot 1\,002}{1\cdot 4}+\frac{1\,000\cdot 1\,002\cdot 1\,004}{1\cdot 4\cdot 7}+\ldots$

$$\ldots\frac{1\,000\cdot 1\,002\cdot 1\,004\ldots(998+2n)}{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}+\ldots$$

2446. $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9}+\ldots+\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11\cdot 14\ldots(6n-7)(6n-4)}{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13\cdot 17\ldots(8n-11)(8n-7)}+\ldots$

2447. $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\ldots+\frac{1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\ldots(4n-4)(4n-2)}+\ldots$

2448. $\frac{1}{1!}+\frac{1\cdot 11}{3!}+\frac{1\cdot 11\cdot 21}{5!}+\ldots+\frac{1\cdot 11\cdot 21\ldots(10n-9)}{(2n-1)!}+\ldots$

2449. $1+\frac{1\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1\cdot 4\cdot 9}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\ldots+$

$$+\frac{1\cdot 4\cdot 9\ldots n^2}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\ldots(4n-5)(4n-3)}+\ldots$$

2450. $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

2451. $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}\frac{1}{n^2}$.

2452. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

2453. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+1}{n^2}$.

2454. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$.

2455. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

2456. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$

2457. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n}$.

2458. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 - n}$.

2459. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

2460. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$.

2461. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n + \sqrt{\ln^3 n}}$.

2462. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n} - \sqrt{n}}$.

2463. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(2n-1)(5\sqrt[3]{n} - 1)}$.

2464. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)$.

2465. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

2466. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

2467. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.

2468*. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$.

2469. Demonstrar que a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln^q n}$:

1) é convergente, qualquer que seja q, se $p > 1$ e quando $q > 1$, se $p = 1$;

2) é divergente, qualquer que seja q, se $p < 1$ e quando $q \leqslant 1$, se $p = 1$.

Verificar a convergência das seguintes séries alternadas. Se são convergentes, provar se o são absoluta ou condicionalmente.

2470. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \ldots$

2471. $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \ldots$

2472. $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \ldots$

2473. $1 - \frac{2}{7} + \frac{3}{13} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} n}{6n-5} + \ldots$

2474. $\frac{3}{1 \cdot 2} - \frac{5}{2 \cdot 3} + \frac{7}{3 \cdot 4} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} + \ldots$

2475. $-\frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} - \ldots + (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \cdot \frac{n}{2^n} + \ldots$

2476. $-\frac{2}{2\sqrt{2}-1} + \frac{3}{3\sqrt{3}-1} - \frac{4}{4\sqrt{4}-1} + \ldots$

$$\ldots + (-1)^n \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1} - 1} + \ldots$$

2477. $-\frac{3}{4}+\left(\frac{5}{7}\right)^2-\left(\frac{7}{10}\right)^3+\ldots+(-1)^n\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n+\ldots$

2478. $\frac{3}{2}-\frac{3\cdot 5}{2\cdot 5}+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 5\cdot 8}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-1)}+\ldots$

2479. $\frac{1}{7}-\frac{1\cdot 4}{7\cdot 9}+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{7\cdot 9\cdot 11}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{7\cdot 9\cdot 11\ldots(2n+5)}+\ldots$

2480. $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\ln 10}+\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{(\ln 10)^2}+\ldots+\frac{\operatorname{sen}n\alpha}{(\ln 10)^n}+\ldots$

2481. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$. **2482.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\operatorname{tg}\frac{1}{n\sqrt{n}}$.

2483. Certificar-se de que o critério de convergência de D'Alembert não resolve o problema de esclarecimento da convergência da serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, onde

$$a_{2k-1}=\frac{2^{k-1}}{3^{k-1}},\qquad a_{2k}=\frac{2^{k-1}}{3^k}\ (k=1,\ 2,\ldots),$$

enquanto que usando o critério de Cauchy pode-se estabelecer que esta série é convergente.

2484*. Certificar-se de que o critério de Leibniz não é aplicável às séries alternadas a)—d). Comprovar quais destas séries são divergentes, quais convergentes condicionalmente e quais absolutamente convergentes:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}+\ldots$

$$\left(a_{2k-1}=\frac{1}{\sqrt{k+1}-1},\qquad a_{2k}=-\frac{1}{\sqrt{k+1}+1}\right);$$

b) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^5}+\ldots$

$$\left(a_{2k-1}=\frac{1}{2^{k-1}},\qquad a_{2k}=-\frac{1}{3^{2k-1}}\right);$$

c) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{3^3}+\ldots$

$$\left(a_{2k-1}=\frac{1}{2k-1},\qquad a_{2k}=-\frac{1}{3^k}\right);$$

d) $\frac{1}{3}-1+\frac{1}{7}-\frac{1}{5}+\frac{1}{11}-\frac{1}{9}+\ldots$

$$\left(a_{2k-1}=\frac{1}{4k-1},\qquad a_{2k}=-\frac{1}{4k-3}\right).$$

Investigar a convergência das seguintes séries de termos complexos:

2485. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2+i)^n}{2^n}$. **2486.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2i-1)^n}{3^n}$.

2487. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(3+i)^n}$. **2488.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$.

2489. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+i}$. **2490.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+i)\sqrt{n}}$.

2491. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[n+(2n-1)\,i]^2}$. **2492.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n(2-i)+1}{n(3-2i)-3i}\right]^n$.

2493. Entre as curvas $y = \frac{1}{x^3}$ e $y = \frac{1}{x^2}$, à direita de seu ponto de interseção, construiram-se segmentos paralelos ao eixo OY e que mantém entre si distâncias iguais. Será finita a soma dos comprimentos destes segmentos?

2494. Será finita a soma dos comprimentos dos segmentos de que se fala no problema anterior, se a curva $y = \frac{1}{x^2}$ for substituída pela curva $y = \frac{1}{x}$?

2495. Formar a soma das séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{3^n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - n}{3^n}$. Será ela convergente?

2496. Formar a diferença das séries divergentes $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ e investigar sua convergência.

2497. Será convergente a série formada pela diminuição de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$?

2498. Encontrar duas séries tais, que sua soma seja convergente e sua diferença divergente.

2499. Formar o produto das séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$. Será ele convergente?

2500. Formar a série $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots\right)^2$. Será ela convergente?

2501. É dada a série $-1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} + \ldots$ Avaliar c valor do erro que se comete ao substituir a soma desta série pela

soma dos quatro primeiros termos e pela soma dos cinco primeiros termos. Que se pode dizer sobre os sinais destes erros?

2502*. Avaliar o erro que se comete ao substituir a soma da série

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\ldots$$

pela soma de seus n primeiros termos.

2503. Avaliar o erro que se comete ao substituir a soma da série

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$$

pela soma de seus n primeiros termos. Em particular, avaliar a exatidão desta aproximação quando $n=10$.

2504.** Avaliar o erro que se comete ao substituir a soma da série

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

pela soma de seus n primeiros termos. Em particular, avaliar a exatidão desta aproximação quando $n=1000$.

2505.** Avaliar o erro que se comete ao substituir a soma da série

$$1+2\left(\frac{1}{4}\right)^2+3\left(\frac{1}{4}\right)^4+\ldots+n\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-2}+\ldots$$

pela soma de seus n primeiros termos.

2506. Quantos termos da série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ é preciso tomar para calcular sua soma com precisão de até 0,01, ou de até 0,001?

2507. Quantos termos da série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n+1)\,5^n}$ é preciso tomar para calcular sua soma com precisão de até 0,01; 0,001 ou 0,0001?

2508*. Achar a soma da série $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$

2509. Achar a soma da série

$$\sqrt[3]{x}+(\sqrt[5]{x}-\sqrt[3]{x})+(\sqrt[7]{x}-\sqrt[5]{x})+\ldots+(\sqrt[2k+1]{x}-\sqrt[2k-1]{x})+\ldots$$

§ 2. Séries de funções

1°. Campo de convergência. O conjunto dos valores do argumento x, para os quais a série de funções

$$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots \qquad (1)$$

é convergente, chama-se *campo de convergência* desta série. A função

$$S(x)=\lim_{n\to\infty} S_n(x),$$

onde $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$, e x pertence ao campo de convergência, recebe o nome de *soma* da série e $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ o de *resto* da série.

Nos casos mais simples, para determinar o campo de convergência da série (1) basta aplicar a esta série os conhecidos critérios de convergência, considerando x fixo.

Exemplo 1. Determinar o campo de convergência da série

$$\frac{x+1}{1 \cdot 2} + \frac{(x+1)^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{(x+1)^3}{3 \cdot 2^3} + \dots + \frac{(x+1)^n}{n \cdot 2^n} + \dots \tag{2}$$

Solução. Chamando de u_n o termo geral da série, teremos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x+1|^{n+1} 2^n n}{2^{n+1}(n+1)|x+1|^n} = \frac{|x+1|}{2}.$$

Baseando-se no critério de D'Alembert pode-se afirmar que a série é convergente (sendo absolutamente convergente), se $\frac{|x+1|}{2} < 1$, isto é, se $-3 < x < 1$; a série é divergente, se $\frac{|x+1|}{2} > 1$, isto é, se $-\infty < x < -3$ ou $1 < x < \infty$ (fig. 104). Quando $x = 1$ obtém-se a série harmônica $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$, que (de acordo com o critério de Leibniz) é convergente (porém, não absolutamente).

Isto é, a série converge quando $-3 \leqslant x < 1$.

Convergente
Divergente
Divergente
-3
-1
0
1
X

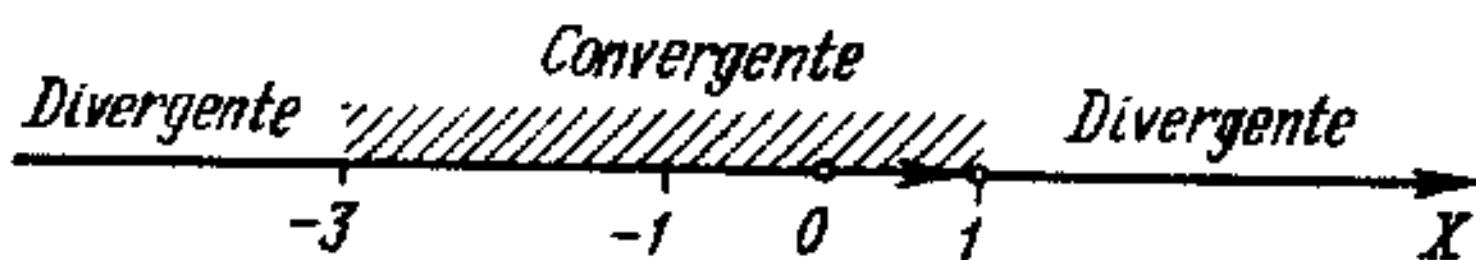



FIG. 104

2°. **Séries de potências.** Para toda *série de potências*

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n + \dots \tag{3}$$

(c_n e a são números reais) existe um intervalo *(intervalo de convergência)* $|x - a| < R$ com centro no ponto $x = a$, em cujo interior a série (3) é absolutamente convergente; quando $|x - a| > R$ a série é divergente. *O raio de convergência* R pode ser, em casos particulares, igual a 0 e a ∞. Nos pontos extremos do intervalo de convergência $x = a \pm R$ pode ter lugar tanto a convergência, como a divergência da série de potências. O intervalo de convergência é determinado geralmente por meio de critérios D'Alembert e de Cauchy, aplicando-os à série formada pelos valores absolutos dos termos da série dada (3).

Aplicando à série de valores absolutos

$$|c_0| + |c_1||x-a| + \dots + |c_n||x-a|^n + \dots$$

os critérios de D'Alembert e de Cauchy, obteremos respectivamente as seguintes fórmulas para o raio de convergência da série de potências (3)

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} \quad \text{e} \quad R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|.$$

No entanto, deve-se usá-los com muito cuidado, já que frequentemente os limites que figuram nos segundos membros destas fórmulas não existem. Assim, por exemplo, se um conjunto infinito de coeficientes c_n se anula (o que, em particular, ocorre quando a série consta somente de termos de potências pares ou somente de potências ímpares

de $(x - a)$), não podem ser empregadas as fórmulas indicadas. Devido a isto recomenda-se que ao determinar o intervalo de convergência, se empregue o critério de D'Alembert ou de Cauchy diretamente, como se fez acima ao investigar-se a série (2), sem recorrer-se às fórmulas gerais de determinação do raio de convergência.

Se $z = x + iy$ é uma variável complexa, para a série de potências

$$c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots \tag{4}$$

$(c_n = a_n + ib_n,\ z_0 = x_0 + iy_0)$ existe um determinado círculo *(círculo de convergencia)* $|z - z_0| < R$ com centro no ponto $z = z_0$, em cujo interior a série é absolutamente convergente; quando $|z - z_0| > R$, a série é divergente. Nos pontos situados na mesma circunferência deste círculo de convergência, a série (4) pode ser tanto convergente como divergente. O círculo de convergência é determinado, em geral, através dos critérios de D'Alembert e de Cauchy, aplicados à série

$$|c_0| + |c_1| \cdot |z - z_0| + |c_2| \cdot |z - z_0|^2 + \ldots + |c_n| \cdot |z - z_0|^n + \ldots,$$

cujos termos são os módulos dos termos da série dada. Assim, por exemplo, utilizando o critério de D'Alembert é fácil observar que o círculo de convergência da série

$$\frac{z+1}{1 \cdot 2} + \frac{(z+1)^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{(z+1)^3}{3 \cdot 2^3} + \ldots + \frac{(z+1)^n}{n \cdot 2^n} + \ldots$$

determina-se pela desigualdade $|z + 1| < 2$ (é suficiente repetir as operações feitas na pag. 310 para determinar o intervalo de convergência da série (2) e substituir x por z). O centro do círculo de convergência está no ponto $z = -1$, e o raio R deste círculo (raio de convergência) é igual a 2.

3°. **Convergência uniforme.** A série de funções (1) converge uniformemente num intervalo determinado, se para qualquer $\varepsilon > 0$, pode-se achar um N tal, que não depende de x, que quando $n > N$, para todos os valores de x do intervalo dado, é válida a desigualdade $|R_n(x)| < \varepsilon$, onde $R_n(x)$ é o resto da série dada.

Se $|f_n(x)| \leqslant c_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ para $a \leqslant x \leqslant b$ e a série numérica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ é convergente, a série de funções (1) será absoluta e uniformemente convergente no segmento $[a, b]$ *(critério de Weierstrass)*.

A série de potências (3) converge absoluta e uniformemente em qualquer segmento situado dentro de seu intervalo de convergência. Pode-se derivar e integrar termo a termo a série de potências (3) dentro de seu intervalo de convergência (quando $|x - a| < R$), isto é, que se

$$c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \ldots + c_n(x - a)^n + \ldots = f(x), \tag{5}$$

então para qualquer x do intervalo de convergência da série (3), temos:

$$c_1 + 2c_2(x - a) + \ldots + nc_n(x - a)^{n-1} + \ldots = f'(x), \tag{6}$$

$$\int_{x_0}^{x} c_0\,dx + \int_{x_0}^{x} c_1(x - a)\,dx + \int_{x_0}^{x} c_2(x - a)^2\,dx + \ldots + \int_{x_0}^{x} c_n(x - a)^n\,dx + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x - a)^{n+1} - (x_0 - a)^{n+1}}{n + 1} = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \tag{7}$$

(o número x_0 também pertence ao intervalo de convergência da série (3)). Com isto, as séries (6) e (7) têm o mesmo intervalo de convergência que a série (3).

Achar o campo de convergência das séries:

2510. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

2511. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^x}$.

2512. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{\ln x}}$.

2513. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

2514. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \operatorname{sen} \frac{x}{3^n}$.

2515.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}}$.

2516. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n \operatorname{sen} x}$.

2517. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$.

2518. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! x^n}$.

2519. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) x^n}$.

2520. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}$.

2521. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^5 x^{2n}}$.

2522. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 3^n (x-5)^n}$.

2523. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{x^{n^n}}$.

2524*. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n + \frac{1}{2^n x^n} \right)$.

2525. $\sum_{n=-1}^{\infty} x^n$.

Achar o intervalo de convergência das seguintes séries de potências e investigar a convergência nos extremos deste intervalo:

2526. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

2527. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$.

2528. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

2529. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^{2n-1}}{(4n-3)^2}$.

2530. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$.

2531. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}$.

2532. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^2 x^n$.

2533. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

2534. $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$.

2535. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$.

2536. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^{2n-1} x^n$.

2537. $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}$.

2538. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2} \right)^n$.

2539. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}$.

2540. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n \cdot 3^n \cdot \ln n}$.

2541. $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}$.

2542.** $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^{n!}$.

2543*. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^{n-1}n^n}$.

2544*. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^n}}{n^n}$.

2545. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-5)^n}{n \cdot 3^n}$.

2546. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 5^n}$.

2547. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n \cdot 9^n}$.

2548. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{2n}$.

2549. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$.

2550. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n(x+3)^n$.

2551. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{2n \cdot 4^n}$.

2552. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1)\, 2^n}$.

2553. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)^{2n}(x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}$.

2554. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+3)^n}{n^n}$.

2555. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

2556. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{(n+1)\ln(n+1)}$.

2557. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$.

2558. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$.

2559*. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} (x-1)^n$.

2560. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^n (x+1)^n}{2^{n-1} \cdot n^n}$.

2561. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1} (x-2)^n$.

2562. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2\, 2^{n+1}}$.

2563. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}$.

Determinar o círculo de convergência:

2564. $\sum_{n=0}^{\infty} i^n z^n$.

2565. $\sum_{n=0}^{\infty} (1+ni)\, z^n$.

2566. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{n \cdot 3^n}$.

2567. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2^n}$.

2568. $(1+2i)+(1+2i)(3+2i)z+\ldots+(1+2i)(3+2i)\ldots$
$\ldots(2n+1+2i)z^n+\ldots$

2569. $1+\frac{z}{1-i}+\frac{z^2}{(1-i)(1-2i)}+\ldots+\frac{z^n}{(1-i)(1-2i)\ldots(1-ni)}+\ldots$

2570. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+2ni}{n+2i}\right)^n z^n$.

2571. Partindo do conceito de convergência uniforme, demonstrar que a série

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

não converge uniformemente no intervalo $(-1, 1)$, porém é uniformemente convergente em qualquer segmento de seu interior.

Solução. Utilizando a fórmula da soma da progressão geométrica, para $|x| < 1$ obtemos

$$R_n(x) = x^{n+1} + x^{n+2} + \ldots = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Tomemos o segmento $|-1+\alpha, 1-\alpha|$ dentro do intervalo $(-1, 1)$, onde α é um numero positivo tão pequeno como se deseje. Neste segmento $|x| \leqslant 1-\alpha$, $|-x| \geqslant \alpha$ e, portanto,

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{(1-\alpha)^{n+1}}{\alpha}.$$

Para demonstrar a convergência uniforme da série dada no segmento $[-1+\alpha, 1-\alpha]$, é suficiente provar que para qualquer $\varepsilon > 0$ pode-se encontrar um N tal, que dependa exclusivamente de ε, e que para qualquer $n > N$ se verifique a desigualdade $|R_n(x)| < \varepsilon$ para todos os x do segmento examinado.

Tomando qualquer $\varepsilon > 0$, fazemos que $\frac{(1-\alpha)^{n+1}}{\alpha} < \varepsilon$; daí $(1-\alpha)^{n+1} < \varepsilon\alpha$, $(n+1)\ln(1-\alpha) < \ln(\varepsilon\alpha)$, isto é, $n+1 > \frac{\ln(\varepsilon\alpha)}{\ln(1-\alpha)}$ (já que $\ln(1-\alpha) < 0$) e $n > \frac{\ln(\varepsilon\alpha)}{\ln(1-\alpha)} - 1$. Tomando, desta forma, $N = \frac{\ln(\varepsilon\alpha)}{\ln(1-\alpha)} - 1$, nos convencemos de que, de fato, quando $n > N$, se verifica a desigualdade $[R_n(x)] < \varepsilon$ para todos os x do segmento $[-1+\alpha, 1-\alpha]$ e, portanto, fica demonstrada a convergência uniforme da série dada em qualquer segmento situado dento de $(-1, 1)$.

Quanto à totalidade do intervalo $(-1, 1)$, este contém pontos tão próximos como se deseje, do ponto $x = 1$, e como o $\lim\limits_{x\to 1} R_n(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{n+1}}{1-x} = \infty$, por maior que seja n, sempre podem ser encontrados pontos x, para os quais $R_n(x)$ será maior que qualquer outro número, tão grande como se deseje. Portanto, é impossível escolher um N tal, que para $n > N$ tenha lugar a desigualdade $|R_n(x)| < \varepsilon$ em todos os pontos do intervalo $(-1, 1)$, o que quer dizer que a convergência desta série no intervalo $(-1, 1)$ não é uniforme.

2572. Partindo do conceito de convergência uniforme, demonstrar que:

a) a série

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

converge uniformemente em qualquer intervalo finito;

b) a série

$$\frac{x^2}{1} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n} + \ldots$$

converge uniformemente em todo o intervalo de convergência $(-1, 1)$;

c) a série

$$1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \dots + \frac{1}{n^x} + \dots$$

converge uniformemente no intervalo $(1 + \delta, \infty)$, onde δ é um número positivo qualquer;

d) a série

$$(x^2 - x^4) + (x^4 - x^6) + (x^6 - x^8) + \dots + (x^{2n} - x^{2n+2}) + \dots$$

é convergente não só dentro do intervalo $(-1, 1)$, mas também nos extremos do mesmo, porém a convergência da série $(-1,1)$ não é uniforme.

Demonstrar a convergência uniforme das seguintes séries de funções nos intervalos indicados:

2573. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ no segmento $[-1; 1]$.

2574. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{2^n}$ em todo o eixo numérico.

2575. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ no segmento $[0; 1]$.

Usando a derivação e integração termo a termo, achar as somas das séries:

2576. $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$

2577. $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$

2578. $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$

2579. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$

2580. $1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n + \dots$

2581. $1 - 3x^2 + 5x^4 - \dots + (-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2} + \dots$

2582. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x^2 + \dots + n(n+1)x^{n-1} + \dots$

Encontrar a soma das séries:

2583. $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \dots + \frac{n}{x^n} + \dots$

2584. $x + \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} + \dots + \frac{x^{4n-3}}{4n-3} + \dots$

2585*. $1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{2}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)3^{n-1}} + \dots$

2586. $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} + \dots$

§ 3. Série de Taylor

1°. Desenvolvimento de uma função em série de potências. Se uma função $f(x)$ admite um desenvolvimento em série de potências de $x - a$ num entorno de $| x - a | < R$ do ponto a, esta série *(série de Taylor)*, terá a forma

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \dots \quad (1)$$

Quando $a = 0$ a série de Taylor também recebe o nome de ***série de Maclaurin***. A igualdade (1) é justa, se para $| x - a | < R$ *o termo complementar* da fórmula de Taylor

$$R_n(x) = f(x) - \left[f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k\right] \to 0$$

quando $n \to \infty$.

Para avaliar o termo complementar da série pode-se empregar a fórmula

$$R_n(x) = \frac{(x - a)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}[a + \theta_n(x - a)], \text{ onde } 0 < \theta_n < 1 \quad (2)$$

(forma de Lagrange).

Exemplo 1. Desenvolver a função $f(x) = \cosh x$ em série de potências de x.

Solução. Achamos as derivadas da função dada $f(x) = \cosh x$, $f'(x) = \operatorname{senh} x$, $f''(x) = \cosh x$, $f'''(x) = \operatorname{senh} x$, ...; em geral, $f^{(n)}(x) = \cosh x$, se n é par e $f^{(n)}(x) = \operatorname{senh} x$, se n é ímpar. Fazendo $a = 0$, temos $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 1$, $f'''(0) = 0$, ...; em geral, $f^{(n)}(0) = 1$, se n é par, e $f^{(n)}(0) = 0$ se n é ímpar. Donde, beseando-se em (1), teremos:

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (3)$$

Para determinar o intervalo de convergência da série (3) usamos o critério de D'Alembert. Temos:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2n+2}}{(2n + 2)!} : \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{(2n + 1)(2n + 2)} = 0$$

para qualquer x. Portanto, a série é convergente no intervalo $-\infty < x < \infty$ O termo complementar da série, de acordo com a fórmula (2), tem a forma

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n + 1)!} \cosh \theta x, \text{ se } n \text{ é ímpar, e}$$

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n + 1)!} \operatorname{senh} \theta x, \text{ se } n \text{ é par.}$$

Como $0 < \theta < 1$, teremos

$$| \cosh \theta x | = \frac{e^{\theta x} + e^{-\theta x}}{2} \leq e^{|x|}, \ | \operatorname{senh} \theta x | = \left| \frac{e^{\theta x} - e^{-\theta x}}{2} \right| \leq e^{|x|},$$

e por isso $| R_n(x) | \leq \frac{| x |^{n+1}}{(n + 1)!} e^{|x|}$. A série cujo termo geral é $\frac{| x |^n}{n!}$ é convergente para qualquer x (o que é fácil de comprovar através do critério de D'Alembert), por isso, de acordo com o critério necessário de convergência

$$\lim_{n\to\infty} \frac{| x |^{n+1}}{(n + 1)!} = 0,$$

e, portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, qualquer que seja x. Isto significa que a soma da série (3) para qualquer x, é de fato igual a $\cosh x$.

2°. Métodos usados para desenvolver em série de potências. Usando os desenvolvimentos fundamentais

$$\text{I. } e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots (-\infty < x < \infty),$$

$$\text{II. } \operatorname{sen} x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots (-\infty < x < \infty),$$

$$\text{III. } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots (-\infty < x < \infty),$$

$$\text{IV. } (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots (-1 < x < 1) \ ^{*)},$$

$$\text{V. } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots (-1 < x \leqslant 1),$$

pode-se, em muitos casos, obter-se facilmente o desenvolvimento de uma função dada em série de potências, sem que haja necessidade de investigar o resto da série. Às vezes, ao fazer o desenvolvimento, é necessário utilizar a derivação ou integração termo a termo. Quando se trata de desenvolver em série de potências de funções racionais, recomenda-se desenvolver tais funções em frações simples.

Exemplo 2. Desenvolver em série de potências de x**) a função

$$f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)}.$$

Solução. Desenvolvendo a função em frações simples, teremos

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+2x}.$$

Como

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \quad + x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \tag{4}$$

$$\frac{1}{1+2x} = 1 - 2x + (2x)^2 - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^n, \tag{5}$$

definitivamente, teremos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} [1 + (-1)^n 2^{n+1}] x^n. \tag{6}$$

---

*) Nos limites do intervalo de convergência (isto é, quando $x = -1$ e $x = 1$) o desenvolvimento IV se comporta da seguinte maneira: se $m \geqslant 0$, converge absolutamente em ambos os extremos; se $0 > m > -1$ diverge quando $x = 1$ e converge condicionalmente quando $x = 1$; se $m \leqslant -1$, diverge em ambos os extremos.

**) Daqui para diante subentendem-se "potências inteiras e não positivas".

As progressões geométricas (4) e (5) são convergentes respectivamente quando $|x| < 1$ e $|x| < \frac{1}{2}$; portanto, a fórmula (6) é válida quando $|x| < \frac{1}{2}$, isto é, quando $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

3°. Série de Taylor para uma função de duas variáveis. O desenvolvimento de uma função infinitamente diferenciável de duas variáveis $f(x, y)$ na *série de Taylor*, num entorno do ponto (a, b), tem a forma

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]f(a, b) + \frac{1}{2!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^2 f(a, b) + \ldots + \frac{1}{n!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(a, b) + \ldots \qquad (7)$$

Se $a = b = 0$, a série de Taylor chama-se também *série de Maclaurin*. Neste caso usam-se as seguintes anotações:

$$\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]f(a, b) = \left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=a\\y=b}}(x-a) + \left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=a\\y=b}}(y-b);$$

$$\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^2 f(a, b) = \left.\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=a\\y=b}}(x-a)^2 + 2\left.\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x=a\\y=b}}(x-a)(y-b) + \left.\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=a\\y=b}}(y-b)^2, \text{ etc.}$$

O desenvolvimento da série (7) tem lugar, se o termo complementar da série

$$R_n(x, y) = f(x, y) - \left\{f(a, b) + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^k f(a, b)\right\} \to 0$$

quando $n \to \infty$. O termo complementar da série pode ser representado da forma

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} f(x, y)\bigg|_{\substack{x=a+\theta(x-a)\\y=b+\theta(y-b)}}$$

onde $0 < \theta < 1$.

Desenvolver em séries de potências inteiras e não negativas de x as funções indicadas, achar os intervalos de convergência das séries obtidas e investigar o comportamento dos termos complementares das mesmas:

2587. $a^x (a > 0)$. **2588.** $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

2589. $\cos(x + a)$. **2590.** $\operatorname{sen}^2 x$.

2591*. $\ln(2 + x)$.

Utilizando os desenvolvimentos fundamentais I—V escrever o desenvolvimento em série de potências de x, das seguintes funções e indicar os intervalos de convergência das series:

2592. $\frac{2x-3}{(x-1)^2}$. **2593.** $\frac{3x-5}{x^2-4x+3}$.

2594. xe^{-2x}. **2595.** e^{x^2}.

2596. senh x. **2597.** $\cos 2x$.

2598. $\cos^2 x$. **2599.** sen $3x + x\cos 3x$.

2600. $\frac{x}{9+x^2}$. **2601.** $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

2602. $\ln\frac{1+x}{1-x}$. **2603.** $\ln(1+x-2x^2)$.

Aplicando a derivação, desenvolver em série de potências de x as seguintes funções e indicar os intervalos em que estes desenvolvimentos têm lugar:

2604. $(1+x)\ln(1+x)$. **2605.** arctg x.

2606. arcsen x. **2607.** $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

Utilizando diferentes métodos, desenvolver em série de potências de x as seguintes funções e indicar os intervalos em que estes desenvolvimentos têm lugar:

2608. sen$^2 x \cos^2 x$. **2609.** $(1+x)e^{-x}$.

2610. $(1+e^x)^3$. **2611.** $\sqrt[3]{8+x}$.

2612. $\frac{x^2-3x+1}{x^2-5x+6}$. **2613.** $\cosh^3 x$.

2614. $\frac{1}{4-x^4}$. **2615.** $\ln(x^2+3x+2)$.

2616. $\int_0^x \frac{\text{sen}\, x}{x}\,dx$. **2617.** $\int_0^x e^{-x^2}\,dx$.

2618. $\int_0^x \frac{\ln(1+x)\,dx}{x}$. **2619.** $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Escrever os três primeiros termos diferentes de zero dos desenvolvimentos em série de potências de x das seguintes funções:

2620. tg x. **2621.** th x

2622. $e^{\cos x}$. **2623.** sec x.

2624. $\ln\cos x$. **2625.** e^x sen x.

2626*. Demonstrar que para calcular o comprimento da elipse pode-se utilizar a fórmula aproximada

$$s \approx 2\pi a\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right),$$

onde ε é a excentricidade e $2a$, o eixo maior da elipse.

2627. Um fio pesado, não extensível, suspenso por seus extremos, forma por seu próprio peso a catenária $y = a \cosh \frac{x}{a}$, sendo $a = \frac{H}{q}$, onde H é a tensão horizontal do fio e q, o peso de uma unidade de comprimento do mesmo. Demonstrar que para valores pequenos de x é possível admitir-se, com uma aproximação da ordem de x^4, que o fio pende formando a parábola $y = a + \frac{x^2}{2a}$.

2628. Desenvolver a função $x^3 - 2x^2 - 5x - 2$ em série de potências de $x + 4$.

2629. $f(x) = 5x^3 - 4x^2 - 3x + 2$. Desenvolver $f(x + h)$ em série de potências de h.

2630. Desenvolver $\ln x$ em série de potências de $x - 1$.

2631. Desenvolver $\frac{1}{x}$ em série de potências de $x - 1$.

2632. Desenvolver $\frac{1}{x^2}$ em série de potências de $x + 1$.

2633. Desenvolver $\frac{1}{x^2 + 3x + 2}$ em série de potências de $x + 4$

2634. Desenvolver $\frac{1}{x^2 + 4x + 7}$ em série de potências de $x + 2$

2635. Desenvolver e^x em série de potências de $x + 2$.

2636. Desenvolver $\sqrt{x}$ em série de potências de $x - 4$.

2637. Desenvolver $\cos^2 x$ em série de potências de $x - \frac{\pi}{2}$.

2638. Desenvolver $\cos^2 x$ em série de potências de $x - \frac{\pi}{4}$.

2639*. Desenvolver $\ln x$ em série de potências de $\frac{1 - x}{1 + x}$.

2640. Desenvolver $\frac{x}{\sqrt{1 + x}}$ em série de potências de $\frac{x}{1 + x}$.

2641. Que erro se comete se supormos que aproximadamente

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}?$$

2642. Com que exatidão pode-se calcular o número $\frac{\pi}{4}$ se empregarmos a série

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots,$$

tomando a soma de seus cinco primeiros termos, quando $x = 1$?

2643*. Calcular o número $\frac{\pi}{6}$ com precisão de até 0,001 através do desenvolvimento em série de potências de x, da função arcsen x (ver o número 2606).

2644. Quantos termos é necessário tirar da série

$$\cos x = 1 - \frac{x}{2!} + \ldots$$

para calcular o cos 18° com exatidão de até 0,001?

2645. Quantos termos é necessário tirar da série

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

para calcular o sen 15° com exatidão de até 0,0001?

2646. Quantos termos é necessário tirar da série

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$$

para achar o número e com exatidão de até 0,0001?

2647. Quantos termos é necessário tirar da série

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots,$$

para calcular ln 2 com exatidão de até 0,01? até 0,001?

2648. Calcular $\sqrt[3]{7}$ com exatidão de até 0,01 através do desenvolvimento da função $\sqrt[3]{8 + x}$ em série de potências de x.

2649. Esclarecer a procedência da fórmula aproximada $\sqrt{a^2 + x} \approx$ $\approx a + \frac{x}{2a}$ $(a > 0)$, calcular com ela $\sqrt{23}$, fazendo $a = 5$ e avaliar o erro cometido.

2650. Calcular $\sqrt[4]{19}$ com exatidão de até 0,001.

2651. Para que valores de x a fórmula aproximada

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

dá um erro não maior que 0,01; 0,001; 0,0001?

2652. Para que valores de x a fórmula aproximada

$$\operatorname{sen} x = x$$

dá um erro não maior que 0,01 e 0,001?

2653. Calcular $\int\limits_0^{1/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$ com exatidão de até 0,0001.

2654. Calcular $\int\limits_0^{1} e^{-x^2}\, dx$ com exatidão de até 0,0001.

2655. Calcular $\int_0^1 \sqrt[3]{x} \cos x \, dx$ com exatidão de até 0,001.

2656. Calcular $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} dx$ com exatidão de até 0,001.

2657. Calcular $\int_0^{1/4} \sqrt[4]{1 + x^3} \, dx$ com exatidão de até 0,0001.

2658. Calcular $\int_0^{1/9} \sqrt{x} e^x \, dx$ com exatidão de até 0,001.

2659. Desenvolver em série de potências de x e y a função $\cos(x - y)$, achar o campo de convergência da série obtida e analizar o resto da mesma.

Escrever o desenvolvimento em série de potências de x e y das seguintes funções e indicar os campos de convergência das séries:

2660. $\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y$. **2661.** $\operatorname{sen}(x^2 + y^2)$. **2662*.** $\frac{1 - x + y}{1 + x - y}$.

2663*. $\ln(1 - x - y + xy)$. **2664*.** $\operatorname{arctg} \frac{x + y}{1 - xy}$.

2665. $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$. Desenvolver $f(x + h, y + k)$ em série de potências de h e k.

2666. $f(x, y) = x^3 - 2y^3 + 3xy$. Achar o acréscimo desta função ao passar dos valores $x = 1$ e $y = 2$ para os valores $x = 1 + h$ e $y = 2 + k$.

2667. Desenvolver a função e^{x+y} em série de potências de $x - 2$ e $y + 2$.

2668. Desenvolver a função sen $(x + y)$ em série de potências de x e $y - \frac{\pi}{2}$.

Escrever os três ou quatro primeiros termos de desenvolvimento em série de potências de x e y das seguintes funções:

2669. $e^x \cos y$. **2670.** $(1 + x)^{1+y}$.

§ 4. Séries de Fourier

1°. **Teorema de Dirichlet.** Diz-se que uma função $f(x)$ satisfaz às *condições de Dirichlet* em um intervalo (a, b), se neste intervalo a função

1) está uniformemente restrita, isto é, $|f(x)| \leqslant M$ para $a < x < b$, onde M é constante;

2) não tem mais que um número finito de pontos de descontinuidade e todos eles de 1ª espécie (isto é, que em cada ponto de descontinuidade ξ a função $f(x)$

tem um limite finito à esquerda $f(\xi - 0) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(\xi - \varepsilon)$ e um limite finito à direita $f(\xi + 0) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(\xi + \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$;

3) não tem mais que um número finito de pontos de extremo estrito.

O teorema de Dirichlet afirma que toda função $f(x)$ que satisfaça no intervalo $(-\pi, \pi)$ às condições de Dirichlet em qualquer ponto x deste intervalo, em que $f(x)$ seja contínua, esta pode-se desenvolver em *série trigonométrica de Fourier*:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + a_2 \cos 2x + b_2 \operatorname{sen} 2x + \ldots +$$
$$+ a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx + \ldots, \quad (1)$$

em que os *coeficientes de Fourier* a_n e b_n são calculados pelas fórmulas

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \ (n = 0, 1, 2, \ldots); \quad b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Se x é um ponto de descontinuidade da função $f(x)$, pertencente ao intervalo $(-\pi, \pi)$, a soma da série de Fourier $S(x)$ será igual à média aritmética dos limites à esquerda e à direita da função:

$$S(x) = \frac{1}{2}[f(x - 0) + f(x + 0)].$$

Nos extremos do intervalo $x = -\pi$ e $x = \pi$

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2}[f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)].$$

2°. Séries incompletas de Fourier. Se a função $f(x)$ é par (isto é, se $f(-x) = f(x)$), então na fórmula (1)

$$b_n = 0 \ (n = 1, 2, \ldots)$$

e

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \ (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Se a função $f(x)$ é ímpar (isto é, se $f(-x) = -f(x)$), então $a_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ e

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Uma função dada no intervalo $(0, \pi)$ pode ser prolongada à vontade no intervalo $(-\pi, 0)$, como par ou ímpar; portanto, pode desenvolver-se no intervalo $(0, \pi)$ em série incompleta de Fourier, como se deseje, em série de senos ou de cossenos de arcos múltiplos.

3°. Séries de Fourier de período $2l$. Se uma função $f(x)$ satisfaz as condições de Dirichlet no intervalo $(-l, l)$, de comprimento $2l$, para os pontos de continuidade da função, pertencentes a este intervalo, se verificará o desenvolvimento

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{\pi x}{l} + b_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} + a_2 \cos \frac{2\pi x}{l} + b_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{l} + \ldots$$
$$\ldots + a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} + \ldots,$$

onde

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n = 1, 2, \ldots). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Nos pontos de descontinuidade da função $f(x)$ e nos extremos do intervalo $x = \pm l$, a soma da série de Fourier é determinada igualmente como se faz quando se desenvolve no intervalo $(-\pi, \pi)$.

No caso em que a função $f(x)$ se desenvolve em série de Fourier em um intervalo arbitrário $(a, a + 2l)$ de comprimento $2l$, os limites de integração nas fórmulas (2) devem ser substituídos respectivamente, por a e $a + 2l$.

Desenvolver em séries de Fourier, no intervalo $(-\pi, \pi)$, as funções seguintes; determinar a soma das séries nos pontos de descontinuidade e nos extremos do intervalo ($x = -\pi$, $x = \pi$); construir o gráfico da própria função e da soma da série correspondente (dentro e fora do intervalo $(-\pi, \pi)$):

2671. $f(x) = \begin{cases} c_1 \text{ quando } -\pi < x \leqslant 0, \\ c_2 \text{ quando } 0 < x < \pi. \end{cases}$

Examinar o caso particular em que $c_1 = -1$, $c_2 = 1$.

2672. $f(x) = \begin{cases} ax \text{ quando } -\pi < x \leqslant 0, \\ bx \text{ quando } 0 \leqslant x < \pi. \end{cases}$

Examinar os casos particulares: a) $a = b = 1$; b) $a = -1, b = 1$; c) $a = 0$, $b = 1$; d) $a = 1$, $b = 0$.

2673. $f(x) = x^2$. **2674.** $f(x) = e^{ax}$.

2675. $f(x) = \operatorname{sen} ax$. **2676.** $f(x) = \cos ax$.

2677. $f(x) = \operatorname{sen h} ax$. **2678.** $f(x) = \cos \text{h}\, ax$.

2679. Desenvolver em série de Fourier a função $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ no intervalo $(0, 2\pi)$.

2680. Desenvolver a função $f(x) = \dfrac{\pi}{4}$, no intervalo $(0, \pi)$, em série de senos de arcos múltiplos. Empregar o desenvolvimento obtido para a soma das séries numéricas seguintes:

a) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$; b) $1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \ldots$;

c) $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \ldots$

Desenvolver em séries incompletas de Fourier, no intervalo $(0, \pi)$, as funções seguintes: a) em séries de senos de arcos múltiplos, b) em séries de cossenos de arcos múltiplos. Desenhar os gráficos das

funções e os gráficos das somas das séries correspondentes em seus campos de existência.

2681. $f(x) = x$. Achar, através do desenvolvimento obtido, a soma da série

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$$

2682. $f(x) = x^2$. Achar, através do desenvolvimento obtido, a soma das séries numéricas:

1) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots;$

2) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots$

2683. $f(x) = e^{ax}$.

2684. $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ quando } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0 \text{ quando } \frac{\pi}{2} \leqslant x < \pi. \end{cases}$

2685. $f(x) = \begin{cases} x \quad \text{quando } 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x \text{ quando } \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$

Desenvolver no intervalo $(0, \pi)$, em série de senos de arcos múltiplos, as funções:

2686. $f(x) = \begin{cases} x \text{ quando } 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0 \text{ quando } \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$

2687. $f(x) = x(\pi - x)$.

2688. $f(x) = \operatorname{sen} \frac{x}{2}$.

Desenvolver no intervalo $(0, \pi)$, em série de cossenos de arcos múltiplos, as funções:

2689. $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ quando } 0 < x \leqslant h, \\ 0 \text{ quando } h < x < \pi. \end{cases}$

2690. $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2h} \text{ quando } 0 < x \leqslant 2h, \\ 0 \quad \text{quando } 2h < x < \pi. \end{cases}$

2691. $f(x) = x \operatorname{sen} x$.

2692. $f(x) = \begin{cases} \cos x \text{ quando } 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}. \\ -\cos x \text{ quando } \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$

2693. Usando o desenvolvimento das funções x e x^2 no intervalo $(0, \pi)$, em série de cossenos de arcos múltiplos (ver N^{os} **2681, 2682**), demonstrar a igualdade

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12} \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi).$$

2694.** Demonstrar que se a função $f(x)$ é par e ao mesmo tempo $f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, sua série de Fourier no intervalo $(-\pi, \pi)$ representa o desenvolvimento em série de cossenos de arcos múltiplos ímpares; enquanto que a função $f(x)$ é ímpar e $f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ se desenvolve no intervalo $(-\pi, \pi)$ em série de senos de arcos múltiplos ímpares.

Desenvolver, nos intervalos indicados, as seguintes funções em séries de Fourier:

2695. $f(x) = |x| \quad (-1 < x < 1)$.

2696. $f(x) = 2x \quad (0 < x < 1)$.

2697. $f(x) = e^x \quad (-l < x < l)$.

2698. $f(x) = 10 - x \quad (5 < x < 15)$.

Desenvolver as seguintes funções em séries incompletas de Fourier nos intervalos indicados: a) em série de senos de arcos múltiplos e b) em série de cossenos de arcos múltiplos:

2699. $f(x) = 1 \quad (0 < x < 1)$.

2700. $f(x) = x \quad (0 < x < l)$.

2701. $f(x) = x^2 \quad (0 < x < 2\pi)$.

2702. $f(x) = \begin{cases} x & \text{quando } 0 < x \leqslant 1, \\ 2 - x & \text{quando } 1 < x < 2. \end{cases}$

2703. Desenvolver a função seguinte em série de cossenos de arcos múltiplos, no intervalo $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{quando } \frac{3}{2} < x \leqslant 2, \\ 3 - x & \text{quando } 2 < x < 3. \end{cases}$$

Capítulo IX

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

§ 1. Prova das soluções. Formação de equações diferenciais das famílias das curvas. Condições iniciais

1°. Conceitos fundamentais. A equação da forma

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

onde F é uma função dada e $y = y(x)$ é a função procurada, chama-se *equação diferencial de n-ésima ordem*. Qualquer função $y = \varphi(x)$ que transforme a equação (1) em identidade, recebe o nome de *solução* desta equação e o gráfico desta função se chama *curva integral*. Se a solução é dada em forma implícita, $\Phi(x, y) = 0$, geralmente, recebe o nome de *integral*.

Exemplo 1. Verificar que a função $y = \operatorname{sen} x$ é a solução de equação

$$y'' + y = 0.$$

Solução. Temos:

$$y' = \cos x, \quad y'' = -\operatorname{sen} x$$

e, portanto,

$$y'' + y = -\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \equiv 0.$$

A integral

$$\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0 \tag{2}$$

da equação diferencial (1) que contém n constantes arbitrárias independentes $C_1, \dots, C_n$ e que é equivalente (no campo dado) à equação (1), se chama *integral geral* desta equação (no campo correspondente). Dando valores determinados às constantes $C_1, \dots, C_n$ na relação (2), obtém-se uma *integral particular* da equação (1).

Reciprocamente, tendo-se uma família de curvas (2) e excluindo os parâmetros $C_1, \dots, C_n$ do sistema de equações

$$\Phi = 0, \quad \frac{d\Phi}{dx} = 0, \quad \dots, \quad \frac{d^n\Phi}{dx^n} = 0,$$

obtém-se, no geral, uma equação diferencial da forma (1), cuja integral, no campo correspondente, é a relação (2).

Exemplo 2. Achar a equação diferencial da família de parábolas

$$y = C_1(x - C_2)^2. \tag{3}$$

Solução. Derivando duas vezes a expressão (3), temos:

$$y' = 2C_1(x - C_2) \quad \text{e} \quad y'' = 2C_1. \tag{4}$$

Excluindo das equações (3) e (4) os parâmetros C_1 e C_2, achamos a equação diferencial que procuramos

$$2yy'' = y'^2.$$

É fácil verificar que a função (3) transforma esta equação em identidade.

2°. **Condições iniciais.** Se para a solução particular $y = y(x)$ da equação diferencial

$$y^n = f(x, y, y', \dots, y^{n-1}), \tag{5}$$

onde f é determinada no contorno do ponto $(x_0, y_0, y_0', y_0'', \dots, y_0^{(n-1)})$, são dadas as *condições iniciais (problema de Cauchy)*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

e se conhece a *solução geral* da equação (5)

$$y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n),$$

então as constantes arbitrárias $C_1, \dots, C_n$ são determinadas, caso seja possível, pelo sistema de equações

$$\left.\begin{array}{l} y_0 = \varphi(x_0, C_1, \dots, C_n), \\ y_0' = \varphi'(x_0, C_1, \dots, C_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_0^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, \dots, C_n). \end{array}\right\}$$

Exemplo 3. Achar a curva da família

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x},$$

onde $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

Solução. Temos:

$$y' = C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x}.$$

Fazendo $x = 0$ nas fórmulas (6) e (7), temos:

$$1 = C_1 + C_2, \quad -2 = C_1 - 2C_2,$$

donde

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 1$$

e, portanto,

$$y = e^{-2x}.$$

Verificar se as funções seguintes são as soluções das equações diferenciais dadas:

2704. $xy' = 2y, \quad y = 5x^2.$

2705. $y'' = x^2 + y^2, \quad y = \frac{1}{x}.$

2706. $(x + y)\,dx + x\,dy = 0, \quad y = \frac{C^2 - x^2}{2x}.$

2707. $y'' + y = 0, \quad y = 3 \operatorname{sen} x - 4 \cos x.$

2708. $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad x = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t.$

2709. $y'' - 2y' + y = 0,$ a) $y = xe^x$, b) $y = x^2 e^x$.

2710. $y'' - (\lambda_1 + \lambda_2) y' + \lambda_1 \lambda_2 y = 0, \quad y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$

Demonstrar que as relações indicadas são integrais para as equações diferenciais dadas:

2711. $(x - 2y)\, y' = 2x - y, \quad x^2 - xy + y^2 = C^2.$

2712. $(x - y + 1)\, y' = 1, \quad y = x + Ce^y.$

2713. $(xy - x)\, y'' + xy'^2 + yy' - 2y' = 0, \quad y = \ln(xy).$

Formar as equações diferenciais das famílias de curvas dadas (C, C_1, C_2, C_3 são constantes arbitrárias):

2714. $y = Cx$. **2715.** $y = Cx^2$.

2716. $y^2 = 2Cx$. **2717.** $x^2 + y^2 = C^2$.

2718. $y = Ce^x$. **2719.** $x^3 = C(x^2 - y^2)$.

2720. $y^2 + \frac{1}{x} = 2 + Ce^{-\frac{y^2}{2}}$. **2721.** $\ln \frac{x}{y} = 1 + ay$ (a é parâmetro)

2722. $(y - y_0)^2 = 2px$ (y_0, p são parâmetros). **2723.** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$.

2724. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x$. **2725.** $y = (C_1 + C_2x)\, e^x + C_3$.

2726. Formar a equação diferencial de todas as retas do plano XOY.

2727. Formar a equação diferencial de todas as parábolas com eixo vertical no plano XOY.

2728. Formar a equação diferencial de todas as circunferências no plano XOY.

Achar, para as famílias das curvas dadas, as linhas que satisfaçam as condições iniciais indicadas:

2729. $x^2 - y^2 = C$, $y(0) = 5$.

2730. $y = (C_1 + C_2x)\, e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

2731. $y = C_1 \operatorname{sen}(x - C_2)$, $y(\pi) = 1$, $y'(\pi) = 0$.

2732. $y = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3e^{2x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -2$.

§ 2. Equações diferenciais de 1ª ordem

1°. Formas de equações diferenciais de 1ª ordem. A equação diferencial de 1ª ordem com uma função y incógnita, resolvida em relação à derivada y', tem a forma

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

onde $f(x, y)$ é uma função dada. Em alguns casos é conveniente considerar como função incógnita a variável x e escrever a equação (1) na forma

$$x' = g(x, y), \tag{1'}$$

onde $g(x, y) = \dfrac{1}{f(x, y)}$.

Tendo-se em conta que $y' = \dfrac{dy}{dx}$ e $x' = \dfrac{dx}{dy}$, as equações diferenciais (1) e (1') podem ser escritas na forma simétrica

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0, \tag{2}$$

onde $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ são funções conhecidas.

Por soluções da equação (2) entendem-se as funções da forma $y = \varphi(x)$ ou $x = \psi(y)$, que satisfazem a esta equação. A integral geral das equações (1) e (1'), ou da equação (2), tem a forma $\Phi(x, y, C) = 0$, onde C é uma constante arbitrária.

2°. Campo de direções. O conjunto de direções

$$\operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$$

chama-se *campo de direções* da equação diferencial (1) e é, geralmente, representado por meio de um sistema de traços ou setas com um ângulo de inclinação α.

As curvas $f(x, y) = k$ em cujos pontos a inclinação do campo tem um valor constante k, chamam-se isóclinas. Construindo as isóclinas e o campo de direções, nos casos mais simples é possível desenhar aproximadamente o campo das curvas integrais, considerando-se estas últimas como curvas que têm a direção dada do campo em cada um de seus pontos

Exemplo 1. Construir, pelo método de isóclinas, o campo das curvas integrais da equação

$$y' = x.$$

Solução. Construindo as isóclinas $x = k$ (linhas retas) e o campo de direções, obtemos aproximadamente o campo de curvas integrais (fig. 105). A solução geral é a família das parábolas

$$y = \frac{x^2}{2} + C.$$

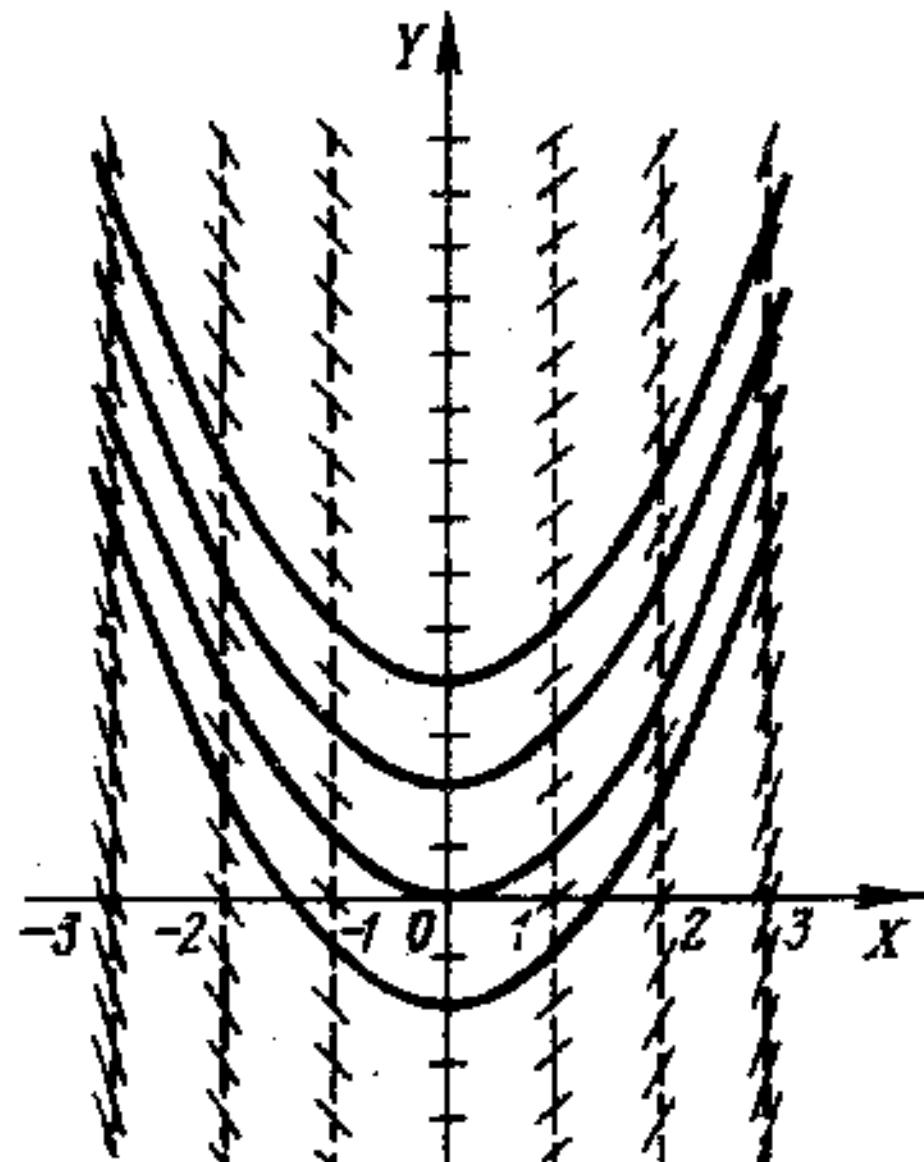



FIG. 105

Construir, pelo método de isóclinas, o campo aproximado das curvas integrais para as equações diferenciais indicadas a seguir:

2733. $y' = -x.$ **2734.** $y' = -\frac{x}{y}.$ **2735.** $y' = 1 + y^2.$

2736. $y' = \frac{x + y}{x - y}.$ **2737.** $y' = x^2 + y^2.$

3°. Teorema de Cauchy. Se uma função $f(x, y)$ é contínua em um campo determinado U $\{a < x < A,\ b < y < B\}$ e tem neste campo a derivada restrita $f'_y(x, y)$, então, por cada ponto (x_0, y_0) de U passa uma, e somente uma, curva integral $y = \varphi(x)$ da equação (1) $(\varphi(x_0) = y_0)$.

4°. Método das linhas quebradas de Euler. Para a construção aproximada da curva integral da equação (1), que passa por um ponto dado $M_0(x_0, y_0)$, esta curva é substituída por uma linha quebrada com vértices em $M_i(x_i, y_i)$, onde

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i, \quad y_{i+1} = y_i + \Delta y_i,$$

$$\Delta x_i = h \text{ (passo do processo)},$$

$$\Delta y_i = hf(x_i, y_i) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Exemplo 2. Para a equação

$$y' = \frac{xy}{2}$$

achar $y(1)$ pelo método de Euler, se $y(0) = 1$ $(h = 0,1)$.

Fazemos a tabela:

i	x_i	y_i	$\Delta y_i = \frac{x_i y_i}{20}$
0	0	1	0
1	0,1	1	0,005
2	0,2	1,005	0,010
3	0,3	1,015	0,015
4	0,4	1,030	0,021
5	0,5	1,051	0,026
6	0,6	1,077	0,032
7	0,7	1,109	0,039
8	0,8	1,148	0,046
9	0,9	1,194	0,054
10	1,0	1,248	

Assim, $y(1) = 1{,}248$. Para comparar, damos o valor exato de $y(1) = e^{1/4} \approx 1{,}284$

Usando o método de Euler, achar as soluções particulares das equações diferenciais dadas a seguir, para os valores de x indicados:

2738. $y' = y, \quad y(0) = 1$; achar $y(1)$ $(h = 0{,}1)$.

2739. $y' = x + y, \quad y(1) = 1$; achar $y(2)$ $(h = 0{,}1)$.

2740. $y' = -\dfrac{y}{1+x}, \quad y(0) = 2$; achar $y(1)$ $h = 0{,}1)$.

2741. $y' = y - \dfrac{2x}{y}, \quad y(0) = 1$; achar $y(1)$ $(h = 0{,}2)$.

§ 3. Equações diferenciais de 1ª ordem com variáveis separáveis. Trajetórias ortogonais

1°. Equações diferenciais de 1ª ordem com variáveis separáveis. Chama-se equação com *variáveis separáveis*, a equação diferencial de 1ª ordem da forma

$$y' = f(x)\, g(y) \tag{1}$$

ou

$$X(x)\, Y(y)\, dx + X_1(x)\, Y_1(y)\, dy = 0 \tag{1'}$$

(f, g, X, X_1, Y, Y_1 são contínuas).

Dividindo ambos os membros da equação (1) por $g(y)$ e multiplicando por dx, temos $\dfrac{dy}{g(y)} = f(x)dx$. Daí, integrando, obtemos a integral geral da equação (1) na forma

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C. \tag{2}$$

Analogamente, dividindo os dois membros da equação (1') por $X_1(x)\, Y(y)$ e integrando, obtém-se a integral geral da equação (1') na forma

$$\int \frac{X(x)}{X_1(x)}\, dx + \int \frac{Y_1(y)}{Y(y)}\, dy = C. \tag{2'}$$

Se para um valor determinado de $y = y_0$, temos que $g(y_0) = 0$, a função $y = y_0$ também é a solução da equação (1), o que é fácil de convencer-se. Analogamente, as retas $x = a$ e $y = b$ serão curvas integrais da equação (1'), se a e b são raizes das equações $X_1(x) = 0$ e $Y(y) = 0$, por cujos primeiros membros se dividiu a equaçao inicial.

Exemplo 1. Resolver a equação

$$y' = -\frac{y}{x}. \tag{3}$$

Achar, em particular, a solução que satisfaz a condição inicial:

$$y\ (1) = 2.$$

Solução. Podemos escrever a equação (3) da seguinte forma:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Daí, separando as variáveis, teremos:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

e, portanto,

$$\ln |y| = -\ln |x| + \ln C_1,$$

onde a constante arbitrária $\ln C_1$ foi tomada em forma logarítmica. Depois de potenciar, obtém-se a solução geral

$$y = \frac{C}{x}, \tag{4}$$

onde $C = \pm C_1$.

Ao dividir por y poderíamos perder a solução $y = 0$, porém esta última está contida na fórmula (4) quando $C = 0$.

Utilizando a condição inicial dada, temos que $C = 2$ e, portanto, a solução particular procurada é

$$y = \frac{2}{x}.$$

2°. **Algumas equações diferenciais que podem reduzir-se a equações com variáveis separáveis.** As equações diferenciais da forma

$$y' = f(ax + by + c) \quad (b \neq 0)$$

(f é contínua) se reduzem à equação da forma (1) por meio da substituição $u = ax + by + c$, onde u é a nova função procurada.

3°. **Trajetórias ortogonais** são curvas que cortam as linhas da família dada $\Phi(x, y, a) = 0$ (a é um parâmetro) formando ângulo reto. Se $F(x, y, y') = 0$ é a equação diferencial da família, então

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$$

é a equação diferencial das trajetórias ortogonais.

Exemplo 2. Achar as trajetórias ortogonais da família das elipses

$$x^2 + 2y^2 = a^2. \tag{5}$$

Solução. Derivando ambas as partes da equação (5), achamos a equação diferencial da família

$$x + 2yy' = 0.$$

Daí, substituindo y' por $-\frac{1}{y'}$, 1 obtemos a equação diferencial das trajetórias ortogonais

$$x - \frac{2y}{y'} = 0 \text{ ou } y' = \frac{2y}{x}.$$

Integrando, teremos que $y = Cx^2$ (família das parábolas) (ver a fig. 106).

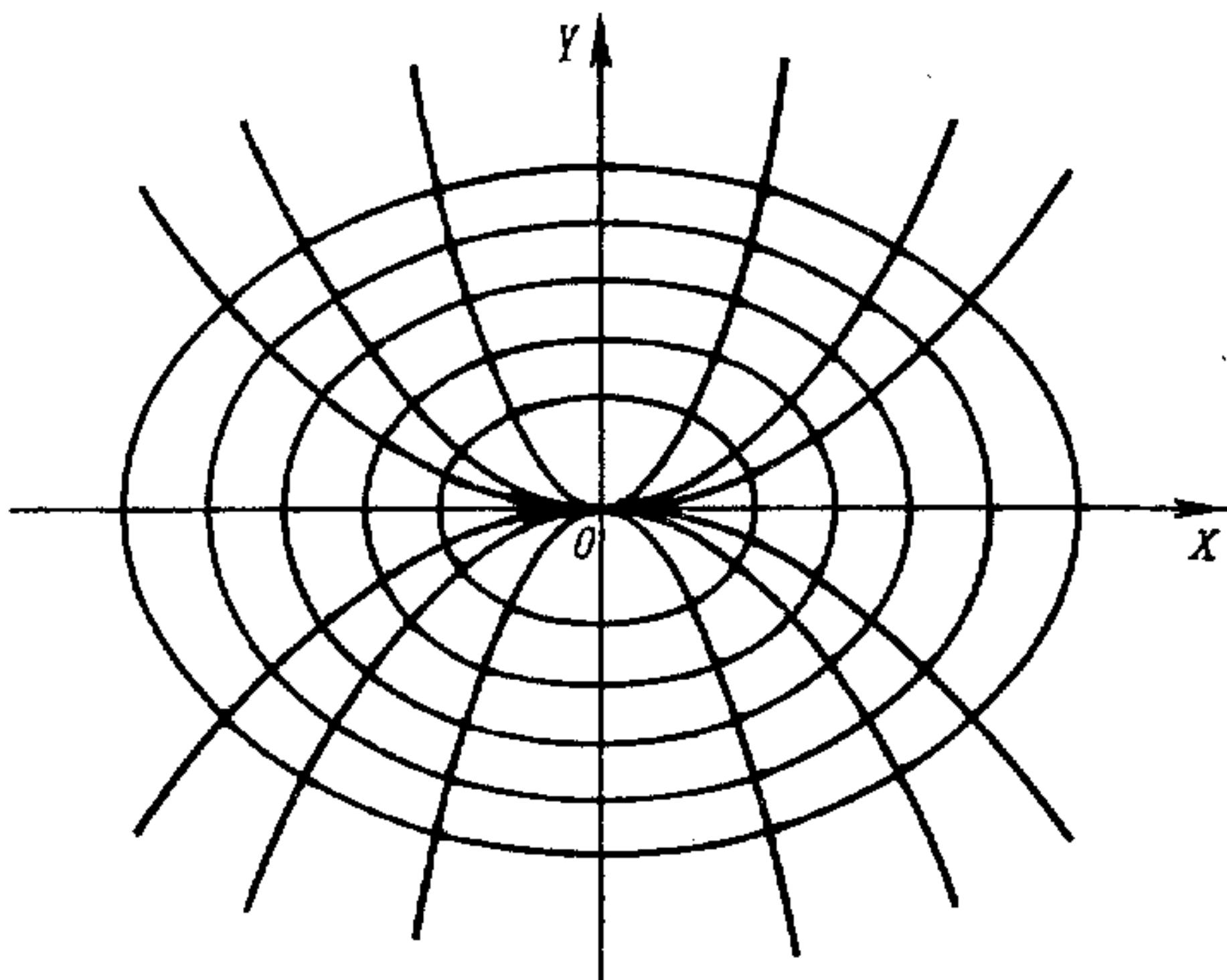



FIG. 106

4°. **Formação das equações diferenciais.** Ao formar a equação diferencial nos problemas geométricos, pode-se empregar com frequência o sentido geométrico da derivada, como tangente do ângulo que forma a reta tangente à curva com a direção positiva do eixo OX; isto permite, em muitos casos, determinar imediatamente a relação entre a ordenada y da curva procurada e sua abscissa x e y', isto é, obter a equação diferencial. Em outros casos (ver problemas n°s. **2783**, **2890**, **2895**), emprega-se o sentido geométrico da integral definida, como área de um trapézio mistilíneo ou o comprimento de um arco. Neste caso, diretamente da condição do problema, obtém-se uma equação integral simples (já que a função procurada encontra-se sob o sinal integral), mas que derivando seus dois membros pode-se transformar com facilidade em equação diferencial.

Exemplo 3. Achar a curva que passa pelo ponto (3; 2), para o qual o segmento de qualquer uma de suas tangentes, compreendido entre os eixos das coordenadas, divide-se ao meio no ponto de contacto.

Solução. Seja $M(x, y)$ o ponto médio da tangente AB, que segundo as condições é, por sua vez, o ponto de contacto (os pontos A e B são os pontos de interseção da tangente com os eixos OY e OX). De acordo com as condições, $OA = 2y$ e $OB = 2x$. O coeficiente angular da tangente à curva no ponto $M(x, y)$ é igual a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{OA}{OB} = -\frac{y}{x}.$$

Esta é a equação diferencial da curva procurada. Transformando-a, teremos

$$\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=0$$

e, portanto,

$$\ln x+\ln y=\ln C \quad \text{ou} \quad xy=C.$$

Empregando a condição inicial, determinamos que $C=3\cdot 2=6$. Isto é, a curva procurada é a hipérbole $xy=6$.

Resolver as equações diferenciais:

2742. $\operatorname{tg} x \operatorname{sen}^2 y\, dx+\cos^2 x \operatorname{ctg} y\, dy=0$.
2743. $xy'-y=y^3$.
2744. $xyy'=1-x^2$.
2745. $y-xy'=a(1+x^2y')$
2746. $3e^x \operatorname{tg} y\, dx+(1-e^x)\sec^2 y\, dy=0$.
2747. $y' \operatorname{tg} x=y$.

Achar as soluções particulares das seguintes equações, que satisfaçam as condições iniciais indicadas:

2748. $(1+e^x)\cdot y\cdot y'=e^x$; $y=1$ quando $x=0$.
2749. $(xy^2+x)\,dx+(x^2y-y)\,dy=0$; $y=1$ quando $x=0$.
2750. $y' \operatorname{sen} x=y\ln y$; $y=1$ quando $x=\frac{\pi}{2}$.

Resolver as seguintes equações diferenciais através da troca de variáveis:

2751. $y'=(x+y)^2$.
2752. $y'=(8x+2y+1)^2$.
2753. $(2x+3y-1)\,dx+(4x+6y-5)\,dy=0$.
2754. $(2x-y)\,dx+(4x-2y+3)\,dy=0$.

Nos n°s. **2755** e **2756** passar às coordenadas polares:

2755. $y'=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y}$.
2756. $(x^2+y^2)\,dx-xy\,dy=0$.

2757*. Achar a curva que tenha um segmento de tangente, cujo comprimento seja igual à distância do ponto de contacto até a origem das coordenadas.

2758. Achar a curva para a qual o segmento da normal, em qualquer ponto da mesma, compreendido entre os eixos das coordenadas, esteja dividido ao meio neste ponto.

2759. Achar a curva cuja subtangente tehna um comprimento constante $a(a>0)$.

2760. Achar a curva cuja subtangente seja o dobro da abscissa do ponto de contacto.

2761*. Achar a curva para a qual a abscissa do centro de gravidade da figura plana, limitada pelos eixos das coordenadas, por esta

mesma curva e pela ordenada de qualquer um dos seus pontos, seja igual a 3/4 da abscissa deste ponto.

2762. Achar a equação da curva que passa pelo ponto (3; 1), para a qual o segmento da tangente compreendido entre o ponto de contacto e o eixo OX esteja dividido ao meio pelo ponto de interseção com o eixo OY.

2763. Achar a equação da curva que passa pelo ponto (2;0), sabendo-se que o segmento da tangente desta curva, compreendido entre o ponto de contacto e o eixo OY, tem comprimento constante e igual a 2.

Achar as trajetórias ortogonais das famílias de curvas dadas a seguir (a é um parâmetro) e construir estas famílias e suas projeções ortogonais:

2764. $x^2 + y^2 = a^2$. **2765.** $y^2 = ax$.

2766. $xy = a$. **2767.** $(x - a)^2 + y^2 = a^2$.

§ 4. Equações diferenciais homogêneas de 1ª ordem

1°. **Equações homogêneas.** Uma equação diferencial

$$P(x, y)dx + Q(x, y)\,dy = 0 \tag{1}$$

è *homogênea*, se $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ são funções homogêneas de mesmo grau. A equação (1) pode reduzir-se à forma

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

por meio da substituição $y = xu$, onde u é uma nova função incógnita, se transforma em equações com variáveis separadas. Pode-se também empregar a substituição $x = yu$.

Exemplo 1. Achar a solução geral da equação

$$y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$$

Solução. Fazemos a substituição $y = ux$; neste caso $u + xu' = e^u + u$, ou

$$e^{-u}\,du = \frac{dx}{x}.$$

Integrando, obtemos $u = -\ln\ln\frac{C}{x}$, donde

$$y = -x\ln\ln\frac{C}{x}.$$

2°. **Equações que podem ser reduzidas às homogêneas.** Se

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \tag{2}$$

onde f é contínua e $\delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, supondo-se na equação (2) $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, onde as constantes α e β são determinadas pelo sistema de equações

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \quad a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0,$$

obtemos uma equação diferencial homogênea quanto às variáveis u e v. Se $\delta = 0$, supondo-se na equação (2) $a_1x + b_1y = u$, obtemos uma equação com variáveis separadas.

Integrar as equações diferenciais:

2768. $y' = \frac{y}{x} - 1$. **2769.** $y' = -\frac{x+y}{x}$.

2770. $(x - y)y\,dx - x^2\,dy = 0$.

2771. Achar, para a equação $(x^2 + y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$ a família das curvas integrais e escolher as curvas que passam respectivamente pelos pontos $(4; 0)$ e $(1; 1)$.

2772. $y\,dx + (2\sqrt{xy} - x)\,dy = 0$.

2773. $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$.

2774. $(4x^2 + 3xy + y^2)\,dx + (4y^2 + 3xy + x^2)\,dy = 0$.

2775. Achar a solução particular da equação $(x^2 - 3y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$, com a condição de que $y = 1$ para $x = 2$.

Resolver as equações:

2776. $(2x - y + 4)\,dy + (x - 2y + 5)\,dx = 0$.

2777. $y' = \frac{1 - 3x - 3y}{1 + x + y}$. **2778.** $y' = \frac{x + 2y + 1}{2x + 4y + 3}$.

2779. Achar a equação da curva que passa pelo ponto $(1; 0)$ e que tem a propriedade de que o segmento, que intercepta sua tangente com o eixo OY, é igual ao raio polar do ponto de contacto.

2780.** Que forma se deve dar ao espelho de um projetor para que os raios de uma fonte de luz pontual reflitam-se formando um feixe paralelo?

2781. Achar a equação da curva cuja subtangente é igual à média aritmética das coordenadas do ponto de contacto.

2782. Achar a equação da curva para a qual o comprimento do segmento interceptado pela normal em qualquer um de seus pontos no eixo das coordenadas, é igual à distância deste ponto à origem das coordenadas.

2783*. Achar a equação da curva para a qual a área compreendida entre o eixo das abscissas, a mesma curva e duas ordenadas, uma das quais é constante e a outra variável, é igual a razão entre o cubo da ordenada variável e a abscissa correspondente.

2784. Achar a curva para a qual o comprimento do segmento do eixo das ordenadas, interceptado por qualquer uma de suas tangentes, é igual à abscissa do ponto de contacto.

§ 5. Equações diferenciais lineares de 1ª ordem. Equação de Bernoulli

1°. Equações lineares. A equação diferencial da forma

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{1}$$

de 1° grau em relação a y e y', onde P e Q são contínuas se chama *linear*.

Se a função $Q(x) \equiv 0$, a equação (1) toma a forma

$$y' + P(x)\,y = 0 \tag{2}$$

e recebe o nome de equação diferencial *linear homogênea*. Neste caso, as variáveis se separam e a solução geral da equação (2) é

$$y = C\,e^{-\int P(x)\,dx} \tag{3}$$

Para resolver a equação linear não homogênea (1), emprega-se o chamado método de *variação da constante arbitrária*. Este método consiste em, primeiramente, achar a solução geral da equação linear homogênea correspondente, isto é a expressão (3). Depois, supondo que nesta expressão C é a função de x, procuramos a solução da equação não homogênea (1) na forma (3). Para isto, colocamos na equação (1) y e y', deduzidas de (3), e da equação diferencial assim obtida determinamos a função $C(x)$. Desta forma, obtemos a solução geral da equação não homogênea (1) na forma

$$y = C(x)\,e^{-\int P(x)\,dx}.$$

Exemplo 1. Resolver a equação

$$y' = \operatorname{tg} x \cdot y + \cos x. \tag{4}$$

Solução. A equação homogênea correspondente é

$$y' - \operatorname{tg} x \cdot y = 0.$$

Resolvendo-a, teremos:

$$y = C \cdot \frac{1}{\cos x}.$$

Considerando C como função de x e derivando, achamos:

$$y = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{dC}{dx} + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \cdot C.$$

Colocando y e v' na equação (4), obtemos:

$$\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{dC}{dx} + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \cdot C = \operatorname{tg} x \cdot \frac{C}{\cos x} + \cos x, \quad \text{ou} \quad \frac{dC}{dx} = \cos^2 x,$$

donde

$$C(x) = \int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C_1.$$

Portanto, a solução geral da equação (4) tem a forma

$$y = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C_1\right) \cdot \frac{1}{\cos x}.$$

Para resolver a equação linear (1) pode-se empregar também a substituição

$$y = uv, \tag{5}$$

onde u e v são funções desconhecidas de x. Neste caso, a equação (1) toma a forma

$$[u' + P(x)\,u]\,v + v'u = Q(x). \qquad (6)$$

Exige-se que

$$u' + P(x)\,u = 0, \qquad (7)$$

de (7) achamos u e depois, de (6) achamos v e, finalmente, de (5) achamos y.

2°. **Equação de Bernoulli.** A equação de 1ª ordem da forma

$$y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^{\alpha},$$

onde $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$, chama-se *equação de Bernoulli*. Esta equação se reduz a linear através da substituição $z = y^{1-\alpha}$. Pode-se empregar também diretamente a substituição $y = uv$, ou o método de variação da constante arbitrária.

Exemplo 2. Resolver a equação

$$y' = \frac{4}{x}\,y + x\sqrt{y}.$$

Solução. Esta é uma equação de Bernoulli $\left(\alpha = \frac{1}{2}\right)$. Fazendo

$$y = uv,$$

teremos

$$u'v + v'u = \frac{4}{x}\,uv + x\sqrt{uv} \quad \text{ou} \quad v\left(u' - \frac{4}{x}\,u\right) + v'u = x\sqrt{uv}. \qquad (8)$$

Para determinar a função u exigimos que se verifique a relação

$$u' - \frac{4}{x}\,u = 0,$$

donde

$$u = x^4.$$

Colocando esta expressão na equação (8), temos:

$$v'x^4 = x\sqrt{vx^4},$$

donde achamos v:

$$v = \left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right)^2,$$

e, portanto, obtemos a solução geral na forma

$$y = x^4\left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right)^2.$$

Achar as integrais gerais das equações:

2785. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = x.$ **2786.** $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x} = x^3.$

2787*. $(1 + y^2)\,dx = (\sqrt{1 + y^2}\,\mathrm{sen}\,y - xy)\,dy.$

2788. $y^2dx - (2xy + 3)\,dy = 0.$

Achar as soluções particulares que satisfaçam as condições indicadas:

2789. $xy' + y - e^x = 0$; $y = b$ quando $x = a$.

2790. $y' - \dfrac{y}{1 - x^2} - 1 - x = 0$; $y = 0$ quando $x = 0$.

2791. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{1}{\cos x}$; $y = 0$ quando $x = 0$.

Achar as soluções gerais das equações:

2792. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=-xy^2.$

2793. $2xy\frac{dy}{dx}-y^2+x=0.$

2794. $y\,dx+\left(x-\frac{1}{2}x^3y\right)dy=0.$

2795. $3x\,dy=y(1+x\operatorname{sen}x-3y^3\operatorname{sen}x)\,dx.$

2796. São dadas três soluções particulares y, y_1, y_2 de uma equação linear. Demonstrar que a expressão

$$\frac{y_2-y}{y-y_1}$$

conserva um valor constante para qualquer x. Que sentido geométrico tem este resultado?

2797. Achar as curvas para as quais a área do triângulo formado pelo eixo OX, a tangente e o raio vetor do ponto de contacto, é constante.

2798. Achar a equação da curva para a qual o segmento interceptado pela tangente no eixo das abscissas é igual ao quadrado da ordenada do ponto de contacto.

2799. Achar a equação da curva para a qual o segmento interceptado pela tangente no eixo das ordenadas é igual à subnormal.

2800. Achar a equação da curva para a qual o segmento interceptado pela tangente no eixo das ordenadas é proporcional ao quadrado da ordenada no ponto de contacto.

2801. Achar a equação da curva para a qual o comprimento da tangente é igual à distância desde o ponto de interseção desta tangente com o eixo OX até o ponto $M(0, a)$.

§ 6. Equações diferenciais exatas. Fator integrante

1°. **Equações diferenciais exatas.** Se para a equação diferencial

$$P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=0 \qquad (1)$$

é válida a igualdade $\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$, a equação (1) pode ser escrita na forma $dU(x, y)=0$ e se chama equação diferencial exata. A integral geral da equação (1) é $U(x, y)=C$. A função $U(x, y)$ é determinada pelo método indicado no cap. VI, § 8, ou pela fórmula

$$U=\int_{x_0}^{x}P(x, y)\,dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0, y)\,dy$$

(ver o cap. VII, § 9).

Exemplo 1. Achar a integral da equação diferencial

$$(3x^2 + 6xy^2)\,dx + (6x^2y + 4y^3)\,dy = 0.$$

Solução. Esta é uma equação diferencial exata, já que $\frac{\partial(3x^2 + 6xy^2)}{\partial y} = \frac{\partial(6x^2y + 4y^3)}{\partial x} = 12\,xy$ e, portanto, a equação tem a forma $dU = 0$.

Neste caso

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2y + 4y^3;$$

Daí

$$U = \int (3x^2 + 6xy^2)\,dx + \varphi(y) = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y).$$

Derivando U em relação a y, achamos $\frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2y + \varphi'(y) = 6x^2y + 4y^3$ (pela condição); daí $\varphi'(y) = 4y^3$ e $\varphi(y) = y^4 + C_0$. Definitivamente, obtemos $U(x, y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C_0$ e, portanto, $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$ é a integral geral procurada da equação dada.

2°. **Fator integrante.** Se o primeiro membro da equação (1) não é uma diferencial exata e são válidas as condições do teorema de Cauchy, existe uma função $\mu = \mu(x, y)$ (*fator integrante*) tal, que

$$\mu(Pdx + Qdy) = dU. \tag{2}$$

Daí obtemos que a função μ satisfaz a equação

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q).$$

O fator integrante μ é facilmente encontrado em dois casos:

1) $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = F(x)$, então $\mu = \mu(x)$;

2) $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = F_1(y)$, então $\mu = \mu(y)$.

Exemplo 2. Resolver a equação $\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + (x^2 + y^2)\,dy = 0$.

Solução. Temos $P = 2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}$, $Q = x^2 + y^2$ e $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{2x + x^2 + y^2 - 2x}{x^2 + y^2} = 1$ e, portanto, $\mu = \mu(x)$. Como $\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$ ou $\mu\frac{\partial P}{\partial y} + Q\frac{d\mu}{dx}$, então

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx = dx \quad \text{e} \quad \ln\mu = x, \ \mu = e^x.$$

Multiplicando a equação por $\mu = e^x$, obtemos:

$$e^x\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + e^x(x^2 + y^2)\,dy = 0$$

que é uma equação diferencial exata. Integrando-a, teremos a integral geral

$$ye^x\left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right) = C.$$

Achar as integrais gerais das equações:

2802. $(x + y)\,dx + (x + 2y)\,dy = 0.$

2803. $(x^2 + y^2 + 2x)\,dx + 2xy\,dy = 0.$

2804. $(x^3 - 3xy^2 + 2)\,dx - (3x^2y - y^2)\,dy = 0.$

2805. $x\,dx = y\,dy = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}.$ **2806.** $\frac{2x\,dx}{y^3} + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}\,dy = 0.$

2807. Achar a integral particular da equação

$$\left(x + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0,$$

que satisfaça a condição inicial $y(0) = 2$.

Resolver as seguintes equações que admitem o fator integrante das formas $\mu = \mu(x)$ ou $\mu = \mu(y)$:

2808. $(x + y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0.$

2809. $y(1 + xy)\,dx - x\,dy = 0.$

2810. $\frac{y}{x}\,dx + (y^3 - \ln x)\,dy = 0.$

2811. $(x \cos y - y \operatorname{sen} y)\,dy + (x \operatorname{sen} y + y \cos y)\,dx = 0.$

§ 7. Equações diferenciais de 1ª ordem, não resolvidas em relação à derivada

1°. **Equações diferenciais se 1ª ordem, de grau superior.** Se a equação

$$f(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

é, por exemplo, de segundo grau em relação a y', resolvendo-a (1) em relação a y', obtemos duas equações:

$$y' = f_1(x, y), \quad y' = f_2(x, y). \tag{2}$$

Desta forma, por cada ponto $M_0(x_0, y_0)$ de um determinado campo do plano passarão, em geral, duas curvas integrais. A integral geral da equação (1) tem, neste caso, a forma

$$\Phi(x, y, C) = \Phi_1(x, y, C)\,\Phi_2(x, y, C) = 0, \tag{3}$$

onde Φ_1 e Φ_2 são as integrais gerais das equações (2).

Além disso, pode existir para a equação (1) uma integral singular. Geometricamente, a integral singular representa a envolvente da família de curvas (3) e pode ser obtida eliminando-se C do sistema de equações

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad \Phi'_C(x, y, C) = 0 \tag{4}$$

e eliminando-se $p = y'$ do sistema de equações

$$F(x, y, p) = 0, \quad F'_p(x, y, p) = 0. \tag{5}$$

Convém assinalar que as curvas determinadas pelas equações (4) ou (5) não são sempre soluções da equação (1); por isso, em cada caso concreto é necessário tirar a prova.

Exemplo 1. Achar as integrais geral e singular da equação

$$xy'^2 + 2xy' - y = 0.$$

Solução. Resolvendo em relação a y', temos duas equações homogêneas

$$y' = -1 + \sqrt{1 + \frac{y}{x}}, \quad y' = -1 - \sqrt{1 + \frac{y}{x}},$$

determinadas no campo

$$x(x + y) > 0,$$

cujas integrais gerais são

$$\left(\sqrt{1 + \frac{y}{x}} - 1\right)^2 = \frac{C}{x}, \quad \left(\sqrt{1 + \frac{y}{x}} + 1\right)^2 = \frac{C}{x}$$

ou

$$(2x + y - C) - 2\sqrt{x^2 + xy} = 0, \quad (2x + y - C) + 2\sqrt{x^2 + xy} = 0.$$

Multiplicando-as entre si, obtemos a integral geral da equação dada

$$(2x + y - C)^2 - 4(x^2 + xy) = 0$$

ou

$$(y - C)^2 = 4Cx$$

(família de parábolas).

Derivando a integral geral em relação a C e eliminando C, achamos a integral singular

$$y + x = 0.$$

(A prova mostra que $y + x = 0$ é a solução da equação dada).

A integral singular também pode ser achada derivando-se $xp^2 + 2xp - y = 0$ em relação a p e eliminando p.

2°. **Resolução da equação diferencial pelo método de introdução de um parâmetro.** Se a equação diferencial de 1ª ordem tem a forma

$$x = \varphi(y, y'),$$

as variáveis y e x podem ser determinadas pelo sistema de equações

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{dp}{dy}, \quad x = \varphi(y, p),$$

onde $p = y'$ desempenha o papel de parâmetro.

Analogamente, se $y = \varphi(x, y')$, as variáveis x e y são determinadas pelo sistema de equações

$$p = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial p}\frac{dp}{dx}, \quad y = \psi(x, p).$$

Exemplo 2. Achar as integrais geral e singular da equação

$$y = y'^2 - xy' \frac{x^2}{2}.$$

Solução. Fazendo a substituição $y' = p$, voltamos a escrever a equação na forma

$$y = p^2 - xp + \frac{x^2}{2}.$$

Derivando em relação a x e considerando p como função de x, temos

$$p = 2p\frac{dp}{dx} - p - x\frac{dp}{dx} + x$$

ou $\frac{dp}{dx}(2p - x) = (2p - x)$, ou $\frac{dp}{dx} = 1$. Integrando, obtemos $p = x + C$. Colocando-a na equação primitiva, teremos a solução geral:

$$y = (x + C)^2 - x(x + C) + \frac{x^2}{2}$$

ou

$$y = \frac{x^2}{2} + Cx + C^2.$$

Derivando esta solução geral em relação a C e eliminando C, obtemos a solução singular: $y = -\frac{x^2}{4}$. (A prova demonstra que $y = -\frac{x^2}{4}$ é a solução da equação dada).

Se igualarmos a zero o fator $2p - x$, no qual se fez a simplificação, obtemos $p = \frac{x}{2}$ e, colocando este valor de p na equação dada, obtemos $= y\frac{x^2}{4}$, isto e, a mesma solução singular.

Achar as integrais geral e singular das equações (nos n°s. **2812**— — **2813** construir o campo das curvas integrais):

2812. $y'^2 - \frac{2y}{x}y' + 1 = 0.$ **2813.** $4y'^2 - 9x = 0.$

2814. $yy'^2 - (xy + 1)y' + x = 0.$ **2815.** $yy'^2 - 2xy' + y = 0.$

2816. Achar as curvas integrais da equação $y'^2 + y^2 = 1$, que passam pelo ponto $M\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Resolver as seguintes equações, introduzindo o parâmetro $y' = p$:

2817. $x = \operatorname{sen} y' + \ln y'$. **2818.** $y = y'^2 e^{y'}$.

2819. $y = y'^2 + 2\ln y'$. **2820.** $4y = x^2 + y'^2$.

2821. $e^x = \frac{y^2 + y'^2}{2y'}$.

§ 8. Equações de Lagrange e de Clairaut

1°. Equação de Lagrange. A equação da forma

$$y = x\varphi(p) + \psi(p), \tag{1}$$

onde $p = y'$, recebe o nome de *equação de Lagrange*. Através da derivação e tendo em conta que $dy = p\,dx$, a equação (1) se reduz à linear em relação a x e dx:

$$p\,dx = \varphi(p)\,dx + [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\,dp. \tag{2}$$

Se $p \not\equiv \varphi(p)$, das equações (1) e (2) se obtém a solução geral em forma paramétrica:

$$x = Cf(p) + g(p), \quad y = [Cf(p) + g(p)]\,\varphi(p) + \psi(p),$$

onde p é um parâmetro e $f(p)$ e $g(p)$ são determinadas funções conhecidas. Além disso, pode existir solução singular, que se procura de forma comum.

2°. **Equação de Clairaut.** Se na equação (1) $\varphi(p) \equiv p$, obtém-se a *equação de Clairaut*

$$y = xp + \psi(p).$$

A solução geral desta equação tem a forma de $y = Cx + \psi(C)$ (família de retas). Além disso, existe solução singular (envolvente), que se obtém como resultado da eliminação do parâmetro p do sistema de equações

$$\begin{cases} x = -\psi'(p), \\ y = px + \psi(p). \end{cases}$$

Exemplo. Resolver a equação

$$y = 2y'x + \frac{1}{y'}. \tag{3}$$

Solução. Fazemos $y' = p$, então $y = 2px + \frac{1}{p}$; derivando e substituindo dy por $p\,dx$, obtemos:

$$p\,dx = 2p\,dx + 2x\,dp - \frac{dp}{p^2}$$

ou

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{2}{p}x + \frac{1}{p^3}.$$

Resolvendo esta equação linear, teremos:

$$x = \frac{1}{p^2}(\ln p + C).$$

Portanto, a equação geral será

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{p^2}(\ln p + C), \\[2ex] y = 2px + \dfrac{1}{p}. \end{cases}$$

Para achar a integral singular, segundo a regra geral, formamos o sistema

$$y = 2px + \frac{1}{p}, \quad 0 = 2x - \frac{1}{p^2}.$$

Daí

$$x = \frac{1}{2p^2}, \qquad y = \frac{2}{p}$$

e, portanto,

$$y = \pm 2\sqrt{2x}.$$

Colocando y na equação (3), nos convencemos de que a função obtida não é a solução e de que, portanto, a equação (3) não tem integral singular.

Resolver as seguintes equações de Lagrange:

2822. $y = \frac{1}{2} x \left(y' + \frac{4}{y'}\right)$. **2823.** $y = y' + \sqrt{1 - y'^2}$.

2824. $y = (1 + y')x + y'^2$. **2825*.** $y = -\frac{1}{2} y'(2x + y')$.

Achar as integrais geral e singular das seguintes equações de Clairaut e construir os campos das curvas integrais:

2826. $y = xy' + y'^2$. **2827.** $y = xy' + y'$.

2828. $y = xy' + \sqrt{1 + (y')^2}$. **2829.** $y = xy' + \frac{1}{y'}$.

2830. Achar a curva para a qual a área do triângulo formado pela tangente da mesma em qualquer ponto e os eixos das coordenadas, é constante.

2831. Achar a curva, se a distância desde um ponto dado até uma tangente qualquer da mesma é constante.

2832. Achar a curva para a qual o segmento de qualquer uma das suas tangentes compreendido entre os eixos das coordenadas, tem um comprimento constante e igual a l.

§ 9. Equações diferenciais diversas de 1ª ordem

2833. Determinar o tipo das seguintes equações diferenciais e indicar os métodos de sua resolução:

a) $(x + y)y' + x \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$; b) $(x - y)y' = y^2$;

c) $y' = 2xy = x^3$; d) $y' = 2xy + y^3$;

e) $xy' + y = \operatorname{sen} y$; f) $(y - xy')^2 = y'^3$;

g) $y = xe^{y'}$; h) $(y' - 2xy)\sqrt{y} = x^3$;

i) $y' = (x + y)^2$; j) $x \cos y' + y \operatorname{sen} y' = 1$;

l) $(x^2 - xy)y' = y^4$;

m) $(x^2 + 2xy^3)\,dx + (y^2 + 3x^2y^2)\,dy = 0$;

n) $(x^3 - 3xy)\,dx + (x^2 + 3)\,dy = 0$;

o) $(xy^2 + \ln x)\,dx = y^2\,dy$.

Resolver as equações:

2834. a) $\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right) dx + x \cos \frac{y}{x}\,dy = 0$;

b) $x \ln \frac{x}{y}\,dy - y\,dx = 0$.

2835. $x\,dx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3\right) dy$. **2836.** $(2xy^2 - y)\,dx + x\,dy = 0$.

2837. $xy' + y = xy^2 \ln x$. **2838.** $y = xy' + y' \ln y'$.

2839. $y = xy' + \sqrt{-ay'}$.
2840. $x^2(y+1)\,dx + (x^3-1)(y-1)\,dy = 0$.
2841. $(1+y^2)(e^{2x}\,dx - e^y\,dy) - (1+y)\,dy = 0$.
2842. $y' - y\dfrac{2x-1}{x^2} = 1$.
2843. $ye^y = (y^3 + 2xe^y)\,y'$.
2844. $y' + y\cos x = \operatorname{sen} x \cos x$.
2845. $(1-x^2)\,y' + xy = a$
2846. $xy' - \dfrac{y}{x+1} - x = 0$.
2847. $y'(x\cos y + a \operatorname{sen} 2y) = 1$.
2848. $(x^2y - x^2 + y - 1)\,dx + (xy + 2x - 3y - 6)\,dy = 0$.
2849. $y' = \left(1 + \dfrac{y-1}{2x}\right)^2$.
2850. $xy^3\,dx = (x^2y + 2)\,dy$.
2851. $y' = \dfrac{3x^2}{x^3 + y + 1}$.
2852. $2dx + \sqrt{\dfrac{x}{y}}\,dy - \sqrt{\dfrac{y}{x}}\,dx = 0$.
2853. $y' = \dfrac{y}{x} + \operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$.
2854. $yy' + y^2 = \cos x$.
2855. $x\,dy + y\,dx = y^2\,dx$.
2856. $y'(x + \operatorname{sen} y) = 1$.
2857. $y\dfrac{dp}{dy} = -p + p^2$.
2858. $x^3\,dx - (x^4 + y^3)\,dy = 0$.
2859. $x^2y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0$.
2860. $\dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{x\,dy - y\,dx}{y^2} = 0$.
2861. $e^y\,dx + (xe^y - 2y)\,dy = 0$.
2862. $y = 2xy' + \sqrt{1 + y'^2}$.
2863. $y' = \dfrac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x)$.
2864. $(2e^x + y^4)\,dy - ye^x\,dx = 0$.
2865. $y' = 2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2$.
2866. $xy(xy^2+1)\,dy - dx = 0$.
2867. $a(xy' + 2y) = xyy'$.
2868. $x\,dy - y\,dx = y^2\,dx$.
2869. $(x^2-1)^{3/2}\,dy + (x^3 + 3xy\sqrt{x^2-1})\,dx = 0$.
2870. $\operatorname{tg} x\dfrac{dy}{dx} - y = a \quad (a > 0)$.
2871. $\sqrt{a^2+x^2}\,dy + (x + y - \sqrt{a^2+x^2})\,dx = 0$.
2872. $xyy'^2 - (x^2+y^2)\,y' + xy = 0$.
2873. $y = xy' + \dfrac{1}{y'^2}$.
2874. $(3x^2 + 2xy - y^2)\,dx + (x^2 - 2xy - 3y^2)\,dy = 0$.
2875. $2yp\dfrac{dp}{dy} = 3p^2 + 4y^2$.

Achar as soluções das seguintes equações, para as condições iniciais indicadas:

2876. $y' = \frac{y+1}{x}$; $y = 0$ quando $x = 1$.

2877. $e^{x-y} y' = 1$; $y = 1$ quando $x = 1$.

2878. $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$; $y = 2$ quando $x = 0$.

2879. $e^{y}(y' + 1) = 1$; $y = 0$ quando $x = 0$.

2880. $y' + y = \cos x$; $y = \frac{1}{2}$ quando $x = 0$.

2881. $y' - 2y = -x^2$; $y = \frac{1}{4}$ quando $x = 0$.

2882. $y' + y = 2x$; $y = -1$ quando $x = 0$;

2883. $xy' = y$; a) $y = 1$ quando $x = 1$; b) $y = 0$ quando $x = 0$

2884. $2xy' = y$: a) $y = 1$ quando $x = 1$; b) $y = 0$ quando $x = 0$

2885. $2xyy' + x^2 - y^2 = 0$; *a*) $y = 0$ quando $x = 0$; b) $y = 1$, quando $x = 0$; c) $y = 0$ quando $x = 1$.

2886. Achar a curva que passa pelo ponto $(0;\ 1)$ e que a substangente seja igual à soma das coordenadas do ponto de contacto.

2887. Achar a curva, sabendo que a soma dos segmentos interceptados pela tangente nos eixos das coordenadas é constante e igual a $2a$.

2888. A soma dos comprimentos da normal e da subnormal é igual a unidade. Achar a equação da curva, sabendo que esta passa pela origem das coordenadas.

2889*. Achar a curva para a qual o ângulo formado pela tangente com o raio vetor do ponto de contacto, é constante.

2890. Achar a curva sabendo que a área compreendida entre os eixos das coordenadas, esta curva e a ordenada de qualquer ponto nela situado é igual ao cubo desta ordenada.

2891. Achar a curva sabendo que a área do setor limitado pelo eixo polar, a própria curva e o raio polar de qualquer um de seus pontos é proporcional ao cubo deste raio.

2892. Achar a curva para a qual o segmento que intercepta a tangente no eixo OX é igual ao comprimento da própria tangente.

2893. Achar a curva para a qual o segmento da tangente compreendido entre os eixos das coordenadas se divide ao meio pela parábola $y^2 = 2x$

2894. Achar a curva para a qual a normal em qualquer um de seus pontos é igual à distância deste ponto até a origem das coordenadas

2895*. A área da figura limitada por uma curva, pelos eixos das coordenadas e pela ordenada de qualquer um dos pontos da curva é igual ao comprimento do arco correspondente da mesma. Achar a equação desta curva, sabendo-se que ela passa pelo ponto $(0;\ 1)$.

2896. Achar a curva para a qual a área do triângulo que formam o eixo das abscissas, a tangente à curva e o raio vetor do ponto de contacto é constante e igual a a^2.

2897. Achar a curva sabendo que o ponto médio do segmento interceptado no eixo OX pela tangente e a normal à mesma, é constante $(a;\ 0)$.

Ao compor a equação diferencial de 1ª ordem, sobretudo nos problemas de física, são frequentes os casos em que é conveniente empregar o chamado *método das diferenciais* e que consiste em que as relações aproximadas entre os incrementos infinitamente pequenos das grandezas dadas e procuradas, corretas com uma aproximação até de infinitésimos de ordem superior, são substituídas pelas relações correspondentes entre suas diferenciais, o que não influe no resultado.

Problema. Em um depósito há 100 litros de solução aquosa que contém 10 kg de sal. A água é despejada neste depósito com uma velocidade de 3 litros por minuto e se expulsa a mistura com a velocidade de 2 litros por minuto, sendo que a concentração é mantida homogênea mexendo-se a água. Quanto sal haverá no depósito depois de transcorrida uma hora?

Solução. Dá-se o nome de concentração c de uma substância dada à quantidade da mesma, contida em uma unidade de volume. Se a concentração é homogênea, a quantidade de substância em um volume V será igual a cV.

Seja a quantidade de sal que há no depósito, depois de transcorrer t minutos, igual a x kg. A quantidade da mistura que há no depósito neste instante será $(100 + t)$ litros e, portanto, a concentração $c = \frac{x}{100 + t}$ kg por litro.

Durante o espaço de tempo dt, do depósito saem $2\,dt$ litros de mistura, que contém $2\,c\,dt$ kg de sal. Por isso, a variação dx do sal do depósito caracteriza-se pela relação

$$-\,dx = 2c\,dt, \quad \text{ou} \quad -\,dx = \frac{2x}{100 + t}\,dt.$$

Esta é, precisamente, a equação diferencial procurada. Separando as variáveis e integrando, teremos:

$$\ln x = -\,2\ln(100 + t) + \ln C$$

ou

$$x = \frac{C}{(100 + t)^2}.$$

A constante C é determinada a partir da condição de que quando $t = 0$, $x = 10$, isto é ,$C = 100\,000$. Depois de uma hora no depósito haverá

$$x = \frac{100\,000}{160^2} \approx 3{,}9 \text{ kg de sal.}$$

2898*. Demonstrar que a superfície livre de um líquido pesado que gira em torno de um eixo vertical, tem a forma de um parabolóide de revolução.

2899*. Achar a dependência que existe entre a pressão do ar e a altura, sabendo-se que esta pressão é igual a 1 kgf por 1 cm² ao nível do mar e de 0,92 kgf por 1 cm² a 500 metros de altura.

2900*. Segundo a lei de Hooke, um cordão elástico de comprimento l, sob a ação de uma força de dilatação F, sofre um acréscimo do comprimento igual a klF $(k = \text{const})$. Em quanto aumentará

o comprimento deste cordão pela ação de seu próprio peso W, se ele está pendurado por um de seus extremos? (O comprimento inicial do cordão é de l).

2901. Resolver este mesmo problema com a condição de que no extremo livre de cordão haja um peso P. Ao resolver os problemas **2902** e **2903** empregar a lei de Newton, segundo a qual a velocidade com que esfria um corpo é proporcional à diferença de temperaturas do corpo e do meio ambiente.

2902. Achar a dependência entre a temperatura T e o tempo t, se um corpo aquecido até T_0 graus é introduzido num meio cuja temperatura é constante e igual a a graus.

2903. Dentro de quanto tempo a temperatura de um corpo aquecido até 100° baixará até 30°, se a temperatura ambiente é igual a 20° e durante os primeiros 20 minutos o corpo esfriou até 60°?

2904. O efeito retardador do atrito sobre um disco que gira dentro de um líquido é proporcional à velocidade angular de rotação. Achar a dependência desta velocidade angular em relação ao tempo, sabendo-se que o disco, que começou a girar com uma velocidade de 100 r.p.m., depois de um minuto passa a girar com a velocidade de 60 r.p.m.

2905*. A velocidade de desintegração do rádio é proporcional à quantidade do mesmo. Sabe-se que passados 1600 anos resta a metade das reservas iniciais de rádio. Achar a porcentagem de rádio que estará desintegrado ao passarem-se 100 anos.

2906*. A velocidade de saida da água por um orifício que se encontra verticalmente a uma distância h da superfície livre do líquido é determinada pela fórmula

$$v = c\sqrt{2gh},$$

onde $c \approx 0{,}6$ e g é a aceleração da força de gravidade.

Quanto tempo levará para sair a água que preenche uma caldeira semiesférica de 2 m de diâmetro, se sai por um orifício redondo, localizado no seu fundo e que tem 0,1 m de raio?

2907*. A quantidade de luz absorvida ao passar por uma camada delgada de água é proporcional à quantidade de luz que incide sobre a mesma e à espessura desta camada. Se ao atravessar uma camada de água de 3 m de espessura é absorvida a metade da quantidade inicial de luz, que parte desta quantidade chegará até a profundidade de 30 m?

2908*. A resistência do ar durante a descida de um corpo em pára-quedas é proporcional ao quadrado da velocidade do movimento. Achar a velocidade limite de queda.

2909*. O fundo de um depósito de 300 litros de capacidade, está coberto por uma mistura de sal e de uma substância indissolúvel. Supondo que a velocidade com que se dissolve o sal é proporcional à diferença entre a concentração num instante dado e

a concentração da solução saturada (1 kg de sal para 3 litros de água) e que a quantidade de água pura dada dissolve 1/3 kg de sal por minuto, achar que quantidade de sal conterá a solução no fim de uma hora.

2910*. A força eletromotriz e de um circuito com intensidade de corrente i, Resistência R e indutância L, é igual à queda de tensão Ri, mais a força eletromotriz de auto-indução $L\frac{di}{dt}$. Determinar a intensidade da corrente i, no instante t, se $e = E \operatorname{sen} \omega t$ (E e ω são constantes) e $i = 0$, quando $t = 0$.

§ 10. Equações diferenciais de ordens superiores

1°. **Caso de integração imediata.** Se

$$y^{(n)} = f(x),$$

temos

$$y = \underbrace{\int dx \int \dots \int}_{n \text{ vezes}} f(x)\, dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_n.$$

2°. **Caso de redução a uma ordem inferior.** 1) Se a equação diferencial não contém y de forma explícita, por exemplo,

$$F(x, y', y'') = 0,$$

então, fazendo $y' = p$, obtemos uma equação de ordem inferior em uma unidade

$$F(x, p, p') = 0.$$

Exemplo 1. Achar a solução particular da equação

$$xy'' + y' + x = 0,$$

que satisfaça as condições

$$y = 0, \quad y' = 0, \text{ quando } x = 0.$$

Solução. Fazendo $y' = p$, temos $y'' = p'$, donde

$$xp' + p + x = 0.$$

Resolvendo esta equação como linear em relação à função p, obtemos:

$$px = C_1 - \frac{x^2}{2}.$$

Da condição $y' = p = 0$, quando $x = 0$, temos que $0 = C_1 - 0$, isto é, $C_1 = 0$ Portanto

$$p = -\frac{x}{2}$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2},$$

donde, tornando a integrar, obtemos:

$$y = -\frac{x^2}{4} + C_2.$$

Fazendo $y = 0$ quando $x = 0$, achamos $C_2 = 0$. Portanto, a solução que procuramos é

$$y = -\frac{1}{4} x^2.$$

2) Se a equação diferencial não contém x de forma explícita, por exemplo,

$$F(y, y', y_5'') = 0,$$

então, fazendo $y' = p$ e $y'' = p \frac{dp}{dy}$, obtemos uma equação de ordem inferior em uma unidade

$$F\left(y, p, p \frac{dp}{dy}\right) = 0.$$

Exemplo 2. Achar a solução particular da equação

$$yy'' - y'^2 = y^4$$

com a condição de que $y = 1$, $y' = 0$, quando $x = 0$.

Solução. Fazemos $y' = p$, neste caso $y'' = p \frac{dp}{dy}$ e a equação se transforma na seguinte:

$$yp \frac{dp}{dy} - p^2 = y^4.$$

Obtemos uma equação do tipo de Bernoulli em relação a p(y é considerado argu mento). Resolvendo-a, achamos:

$$p = \pm y\sqrt{C_1 + y^2}.$$

Da condição $y' = p = 0$, quando $y = 1$, temos $C_1 = -1$. Portanto,

$$p = \pm y\sqrt{y^2 - 1}$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \pm y\sqrt{y^2 - 1}.$$

Integrando, temos:

$$\arccos \frac{1}{y} \pm x = C_2.$$

Fazendo $y = 1$ e $x = 0$, obtemos que $C_2 = 0$, donde $\frac{1}{y} = \cos x$, ou $y = \sec x$.

Resolver as equações:

2911. $y'' = \frac{1}{x}$.

2912. $y'' = -\frac{1}{2y^3}$.

2913. $y'' = 1 - y'^2$.

2914. $xy'' + y' = 0$.

2915. $yy'' = y'^2$.

2916. $yy'' + y'^2 = 0$.

2917. $(1 + x^2) y'' + y'^2 + 1 = 0$.

2918. $y'(1 + y'^2) = ay''$.

2919. $x^2y'' + xy' = 1$.

2920. $yy' = y^2y' + y'^2$.

2921. $yy'' - y'(1 + y') = 0$.

2922. $y'' = -\frac{x}{y'}$.

2923. $(x + 1) y'' - (x + 2) y' + x + 2 = 0$.

2924. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$. **2925.** $y' + \frac{1}{4}(y'')^2 = xy''$.

2926. $xy''' + y'' = 1 + x$. **2927.** $y'''^2 + y''^2 = 1$.

Achar as soluções particulares para as condições iniciais indicadas:

2928. $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0$; $y = 0$, $y' = 3$ quando $x = 0$.

2929. $1 + y'^2 = 2yy''$; $y = 1$, $y' = 1$ quando $x = 1$.

2030. $yy'' + y'^2 = y'^3$; $y = 1$, $y' = 1$ quando $x = 0$.

2931. $xy'' = y'$; $y = 0$, $y' = 0$ quando $x = 0$.

Achar as integrais gerais das equações:

2932. $xy' = \sqrt{y^2 + y'^2}\, y'' - y'y''$.

2933. $yy'' = y'^2 + y'\sqrt{y^2 + y'^2}$.

2934. $y'^2 - yy'' = y^2y'$. **2935.** $yy'' + y'^2 - y'^2 \ln y = 0$.

Achar as soluções que satisfaçam as condições indicadas:

2936. $y''y^3 = 1$; $y = 1$, $y' = 1$ quando $x = \frac{1}{2}$.

2937. $yy' + y'^2 = 1$; $y = 1$, $y' = 1$ quando $x = 0$;

2938. $xy'' = \sqrt{1 + y'^2}$; $y = 0$ quando $x = 1$; $y = 1$ quando $x = e^2$.

2939. $y''(1 + \ln x) + \frac{1}{x} \cdot y' = 2 + \ln x$; $y = \frac{1}{2}$ $y' = 1$ quando $x = 1$.

2940. $y'' = \frac{y'}{x}\left(1 + \ln \frac{y'}{x}\right)$; $y = \frac{1}{2}$, $y' = 1$ quando $x = 1$.

2941. $y'' - y'^2 + y'(y - 1) = 0$; $y = 2$, $y' = 2$ quando $x = 0$.

2942. $3y'y'' = y + y'^3 + 1$; $y = -2$; $y' = 0$ quando $x = 0$.

2943. $y^2 + y'^2 - 2yy'' = 0$; $y = 1$, $y' = 1$ quando $x = 0$.

2944. $yy' + y'^2 + yy'' = 0$; $y = 1$ quando $x = 0$ e $y = 0$ quando $x = -1$.

2945. $2y' + (y'^2 - 6x) \cdot y'' = 0$; $y = 0$, $y' = 2$ quando $x = 2$.

2946. $y'y^2 + yy'' - y'^2 = 0$; $y = 1$, $y' = 2$ quando $x = 0$.

2947. $2yy' - 3y'^2 = 4y^2$; $y = 1$, $y' = 0$ quando $x = 0$.

2948. $2yy'' + y^2 - y'^2 = 0$; $y = 1$, $y' = 1$ quando $x = 0$.

2949. $y'' = y'^2 - y$; $y = -\frac{1}{4}$, $y' = \frac{1}{2}$ quando $x = 1$.

2950. $yy'' + \frac{1}{y^2} e^{y^2} y' - 2yy'^2 = 0$; $y = 1$, $y' = e$ quando $x = -\frac{1}{2e}$.

2951. $1 + yy'' + y'^2 = 0$; $y = 0$, $y' = 1$ quando $x = 0$.

2952. $(1 + yy')y'' = (1 + y'^2)y'$; $y = 1$, $y' = 1$ quando $x = 0$.

2953. $(x + 1)y'' + xy'^2 = y'$; $y = -2$, $y' = 4$ quando $x = 1$.

Resolver as equações:

2954. $y' = xy''^2 + y''^2$. **2955.** $y' = xy'' + y'' - y''^2$

2956. $y'''^2 = 4y''$.

2957. $yy'y'' = y'^3 + y''^2$. Destacar a curva integral que passa pelo ponto (0; 0) e que é tangente nele à reta $y + x = 0$.

2958. Achar as curvas de raio de curvatura constante.

2959. Achar a curva para a qual o raio de curvatura é poporcional ao cubo da normal.

2960. Achar a curva para a qual o raio da curvatura é igual à normal.

2961. Achar a curva para a qual o raio de curvatura é duas vezes maior que a normal.

2962. Achar as curvas para as quais a projeção do raio de curvatura sobre o eixo OY é constante.

2963. Achar a equação do cabo de uma ponto pênsil, supondo-se que a carga é distribuída uniformemente pela projeção deste cabo sobre uma reta horizontal. O peso do cabo é desprezado.

2964*. Achar a posição de equilibrio de um fio flexível, que não estira, preso por seus extremos a dois pontos, e que tem uma carga constante q (incluindo o próprio peso do fio) por unidade de comprimento.

2965*. Um corpo pesado sem velocidade inicial resvala por um plano inclinado. Achar a lei de seu movimento, se o ângulo de inclinacão é igual a α e o coeficiente de atrito é μ.

Indicação. A força de atrito é μN, onde N é a reação do plano.

2966.* A resistência do ar durante a queda dos corpos pode ser considerada proporcional ao quadrado da velocidade. Achar a lei do movimento, se a velocidade inicial é igual a zero.

2967*. Uma lancha a motor, de 300 kgf de peso, se move em linha reta com uma velocidade inicial de 66 m/s (—). A resistência da àgua é proporcional à velocidade e igual a 10 kgf, quando a velocidade é de 1 m/s (—). Dentro de quanto tempo a velocidade da lancha será igual a 8 m/s (—)?

§11. Equações diferenciais lineares

1°. Equações homogêneas. As funções $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, ..., $y_n = \varphi_n(x)$ chamam-se *linearmente dependentes* em (a, b), quando existem constantes C_1, C_2, ..., C_n tais, que sem ser todas iguais a zero, temos

$$C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n \equiv 0 \text{ quando } a < x < b;$$

em caso contrário estas funções recebem o nome de *linearmente independentes*.

A solução geral da equação diferencial *linear homogênea*

$$y^{(n)} + P_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + P_n(x)\, y = 0 \qquad (1)$$

com coeficientes contínuos $P_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ tem a forma

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

onde $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são soluções linearmente independentes da equação (1) *(sistema fundamental de soluções)*.

2°. **Equações não homogêneas.** A solução geral da equação diferencial *linear não homogênea*

$$y^{(n)} + P_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + P_n(x)\, y = f(x), \tag{2}$$

sendo os coeficientes $P_i(x)$ e o segundo membro $f(x)$ funções contínuas, tem a forma

$$y = y_0 + Y,$$

onde y_0 é a solução geral da equação homogênea correspondente (1) e Y, uma solução particular da equação não homogênea dada (2).

Se um sistema fundamental de soluções $y_1, y_2, \ldots, y_n$ da equação homogêna (1) é conhecido, a solução geral da correspondente equação não homogênea (2) pode ser encontrada pela fórmula

$$y = C_1(x)\, y_1 + C_2(x)\, y_2 + \ldots + C_n(x)\, y_n,$$

onde as funções $C_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ são obtidas do sistema de equações:

$$\left.\begin{array}{l} C_1'(x)\, y_1 + C_2'(x)\, y_2 + \ldots + C_n'(x)\, y_n = 0, \\ C_1'(x)\, y_1' + C_2'(x)\, y_2' + \ldots + C_n'(x)\, y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)\, y_1^{(n-2)} + C_2'(x)\, y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x)\, y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'(x)\, y_1^{(n-1)} + C_2'(x)\, y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)\, y_n^{(n-1)} = f(x) \end{array}\right\} \tag{3}$$

(método de variação das constantes arbitrárias).

Exemplo. Resolver a equação

$$xy'' + y' = x^2. \tag{4}$$

Solução. Resolvendo a equação homogênea

$$xy'' + y' = 0,$$

obtemos

$$y = C_1 \ln x + C_2. \tag{5}$$

Portanto, pode-se fazer

$$y_1 = \ln x \quad \text{e} \quad y_2 = 1$$

e procurar a solução da equação (4) na forma

$$y = C_1(x) \ln x + C_2(x).$$

Compondo o sistema (3) e tendo-se em conta que a forma reduzida da equação (4) é $y'' + \dfrac{y'}{x} = x$, obtemos

$$\begin{cases} C_1'(x) \ln x + C_2'(x) \cdot 1 = 0, \\ C_1'(x)\, \dfrac{1}{x} + C_2'(x) \cdot 0 = x. \end{cases}$$

Daí,

$$C_1(x) = \frac{x^3}{3} + A \quad \text{e} \quad C_2(x) = -\frac{x^3}{3} \ln x + \frac{x^3}{9} + B$$

e, portanto

$$y = \frac{x^3}{9} + A \ln x + B,$$

onde A e B são constantes arbitrárias.

2968. Investigar a dependência linear dos seguintes sistemas de funções:

a) $x, x+1$; b) $x^2, -2x^2$; c) $0, 1, x$;
d) $x, x+1, x+2$; e) x, x^2, x^3; f) e^x, e^{2x}, e^{3x};
g) sen x, cos x, 1; h) sen$^2 x$, cos$^2 x$, 1.

2969. Compor a equação diferencial linear homogênea, conhecendo-se seu sistema fundamental de soluções:

a) $y_1 = \operatorname{sen} x, \quad y_2 = \cos x$;
b) $y_1 = e^x, \quad y_2 = xe^x$;
c) $y_1 = x, \quad y_2 = x^2$;
d) $y_1 = e^x, \quad y_2 = e^x \operatorname{sen} x, \ y_3 = e^x \cos x$.

2970. Conhecendo o sistema fundamental de soluções de equação diferencial linear homogênea

$$y_1 = x, \ y_2 = x^2, \ y_3 = x^3,$$

achar sua solução particular y, que satisfaça as condições iniciais

$$y_{x=1} = 0, \ y'_{x=1} = -1, \ y''_{x=1} = 2.$$

2971*. Resolver a equação

$$y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0,$$

conhecendo sua solução particular $y_1 = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

2972. Resolver a equação

$$x^2(\ln x - 1) y'' - xy' + y = 0,$$

conhecendo sua solução particular $y_1 = x$.

Resolver as seguintes equações lineares não homogêneas pelo método de variação das constantes arbitrárias:

2973. $x y'' - y' = 3x^2$. **2974*.** $x^2y'' + xy' - y = x^2$.

2975. $y''' + y' = \sec x$.

§ 12. Equações diferenciais lineares de 2ª ordem com coeficiente constante

1°. **Equações homogêneas.** A equação linear homogênea de 2ª ordem com coeficientes constantes p e q, sem o segundo membro, tem a forma

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{1}$$

Se k_1 e k_2 são as raízes da equação característica

$$\varphi(k) \equiv k^2 + pk + q = 0, \tag{2}$$

a solução geral da equação (1) é escrita em uma das três formas seguintes:

1) $y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$, se k_1 e k_2 são reais e $k_1 \neq k_2$;

2) $y = e^{k_1x}(C_1 + C_2x)$, se $k_1 = k_2$;

3) $y = e^{\alpha x}(C_1\cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x)$, se $k_1 = \alpha + \beta i$ e $k_2 = \alpha - \beta i$ $(\beta \neq 0)$.

2°. **Equações não homogêneas.** A solução geral da equação linear não homogênea

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{3}$$

pode ser escrita em forma da soma

$$y = y_0 + Y,$$

onde y_0 é a solução geral da correspondente equação (1) sem o segundo membro, que se determina pelas fórmulas 1) — 3), e Y é uma solução particular da equação dada (3).

A função Y pode ser encontrada pelo *método dos coeficientes indeterminados* nos seguintes casos simples:

1. $f(x) = e^{ax}P_n(x)$, onde $P_n(x)$ é um polinômio de grau n.

Se a não é a raiz da equação característica (2), isto é, $\varphi(a) \neq 0$, se considera $Y = e^{ax}Q_n(x)$, onde $Q_n(x)$ é um polinômio de grau n com coeficientes indeterminados.

Se a é a raiz da equação característica (2), isto é, $\varphi(a) = 0$, se considera $Y = x^re^{ax}Q_n(x)$, onde r é o grau de multiplicidade da raíz a ($r = 1$ ou $r = 2$).

2. $f(x) = e^{ax}[P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \operatorname{sen} bx]$.

Se $\varphi (a \pm bi) \neq 0$, se considera

$$Y = e^{ax}[S_N(x) \cos bx + T_N(x) \operatorname{sen} bx],$$

onde $S_N(x)$ e $T_N(x)$ são polinômios de grau $N = máx \{n, m\}$.

Se, ao contrário, $\varphi(a \pm bi) = 0$, se considera

$$Y = x^re^{ax}[S_N(x) \cos bx + T_N(x) \operatorname{sen} bx],$$

onde r é o grau de multiplicidade da raíz $a \pm bi$ (para a equação de 2ª ordem $r = 1$).

No caso geral, para resolver a equação (3) se emprega *o método de variação das constantes arbitrárias* (ver o § 11).

Exemplo 1. Achar a solução geral da equação $2y'' - y' - y = 4xe^{2x}$.

Solução. A equação característica $2k^2 - k - 1 = 0$ tem as raízes $k_1 = 1$ e $k_2 = -\frac{1}{2}$. A solução geral da correspondente equação homogênea (de primeira forma) é $y_0 = C_1e^x + C_2e^{-\frac{x}{2}}$. O segundo membro da equação dada $f(x) = 4xe^{2x} \equiv e^{ax}P_n(x)$. Portanto, $Y = e^{2x}(Ax + B)$, já que $n = 1$ e $r = 0$. Derivando Y duas vezes e colocando as derivadas na equação dada, obtemos:

$$2e^{2x}(4Ax + 4B + 4A) - e^{2x}(2Ax + 2B + A) - e^{2x}(Ax + B) = 4xe^{2x}.$$

Simplificando por e^{2x} e igualando entre si os coeficientes que correspondem às primeiras potências de x e os termos independentes de ambos os membros da igualdade, temos $5A = 4$ e $7A + 5B = 0$, donde $A = \frac{4}{5}$ e $B = -\frac{28}{25}$.

Desta forma $Y = e^{2x}\left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right)$, a solução geral da equação dada é

$$Y = C_1e^x + C_2e^{-\frac{1}{2}x} + e^{2x}\left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right).$$

Exemplo 2. Achar a solução geral da equação $y'' - 2y' + y = xe^x$.

Solução. A equação característica $k^2 - 2k + 1 = 0$ tem uma raíz cujo grau de multiplicidade é duplo, $k = 1$. O segundo membro da equação é $f(x) = xe^x$; neste caso, $a = 1$ e $n = 1$. A solução particular é $Y = x^2e^x(Ax + B)$, já que a coincide com a raíz $k = 1$, cujo grau de multiplicidade é igual a dois e, portanto, $r = 2$.

Derivando Y duas vezes, colocando as derivadas na equação e igualando os coeficientes, obtemos $A = \frac{1}{6}$, $B = 0$. Portanto, a solução geral da equação dada se escreve da forma

$$y = (C_1 + C_2x)\,e^x + \frac{1}{6}\,x^3e^x.$$

Exemplo 3. Achar a solução geral da equação $y'' + y = x$ sen x.

Solução. A equação característica $k^2 + 1 = 0$ tem as raízes $k_1 = i$ e $k_2 = -i$. A solução geral da correspondente equação homogênea será [(ver 3), onde $\alpha = 0$ e $\beta = 1$]:

$$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x.$$

O segundo membro tem a forma

$$f(x) = e^{ax}[P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \operatorname{sen} bx],$$

onde $a = 0$, b $= 1$, $P_n(x) = 0$, $Q_m(x) = x$. A ele corresponde a solução particular

$$Y = x[(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \operatorname{sen} x]$$

(neste caso $N = 1$, $a = 0$, $b = 1$, $r = 1$).

Derivando duas vezes e colocando as derivadas na equação, igualamos entre si os coeficientes dos membros da igualdade que correspondem a cos x, x cos x, sen x e x sen x. Como resultado, obtemos quatro equações $2A + 2D = 0$, $4C = 0$, $-2B + 2C = 0$, $-4A = 1$, das quais se determinam $A = -1/4$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 1/4$. Por isso $Y = -\frac{x^2}{4} \cos x + \frac{x}{4} \operatorname{sen} x$.

A solução geral será

$$y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x - \frac{x^2}{4} \cos x + \frac{x}{4} \operatorname{sen} x.$$

3°. **Princípio de superposição de soluções.** Se o segundo membro da equação (3) é uma soma de várias funções:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$$

e Y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ são as soluções correspondentes das equações

$$y'' + py' + qy = f_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

a soma

$$y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$$

é a solução geral da equação (3).

Achar a solução geral das equações

2976. $y'' - 5y' + 6y = 0.$

2977. $y'' - 9y = 0.$

2978. $y'' - y' = 0.$

2979. $y'' + y = 0.$

2980. $y'' - 2y' + 2y = 0.$

2981. $y'' + 4y' + 13y = 0.$

2982. $y'' + 2y' + y = 0.$

2983. $y'' - 4y' + 2y = 0.$

2984. $y'' - ky = 0 \quad (k \neq 0).$

2985. $y = y'' + y'.$

2986. $\frac{y' - y}{y''} = 3.$

Achar as soluções particulares que satisfaçam as condições indicadas:

2987. $y'' - 5y' + 4y = 0$; $y = 5$, $y' = 8$ quando $x = 0$.
2988. $y'' + 3y' + 2y = 0$; $y = 1$, $y' = -1$ quando $x = 0$.
2989. $y'' + 4y = 0$; $y = 0$; $y' = 2$ quando $x = 0$.
2990. $y'' + 2y' = 0$; $y = 1$, $y' = 0$ quando $x = 0$.
2991. $y' = \frac{y}{a^2}$; $y = a$, $y' = 0$, quando $x = 0$.
2992. $y''+3y' = 0$; $y = 0$ quando $x = 0$ e $y = 0$ quando $x = 3$.
2993. $y''+\pi^2 y = 0$; $y = 0$ quando $x = 0$ e $y = 0$ quando $x = 1$.

2994. Indicar a forma das soluções particulares das seguintes equações não homogêneas:

a) $y'' - 4y = x^2 e^{2x}$; b) $y'' + 9y = \cos 2x$;
c) $y'' - 4y' + 4y = \operatorname{sen} 2x + e^{2x}$;
d) $y'' + 2y' + 2y = e^x \operatorname{sen} x$;
e) $y'' - 5y' + 6y = (x^2 + 1) e^x + xe^{2x}$;
f) $y'' - 2y' + 5y = xe^x \cos 2x - x^2 e^x \operatorname{sen} 2x$.

Achar as soluções gerais das equações:

2995. $y'' - 4y' + 4y = x^2$. **2996.** $y'' - y' + y = x^3 + 6$.
2997. $y'' + 2y' + y = e^{2x}$. **2998.** $y'' - 8y' + 7y = 14$.
2999. $y'' - y = e^x$. **3000.** $y'' + y = \cos x$.
3001. $y'' + y' - 2y = 8 \operatorname{sen} 2x$. **3002.** $y'' + y' - 6y = xe^{2x}$
3003. $y'' - 2y' + y = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} h\, x$.
3004. $y'' + y' = \operatorname{sen}^2 x$. **3005.** $y''-2y'+5y = e^x \cos 2x$.

3006. Achar a solução da equação $y'' + 4y = \operatorname{sen} x$, que satisfaz as condições $y = 1$, $y' = 1$ quando $x = 0$.

Resolver as equações:

3007. $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = A \operatorname{sen} pt$. Examinar os casos: 1) $p \neq \omega$; 2) $p = \omega$.

3008. $y'' - 7y' + 12y = -e^{4x}$. **3009.** $y'' - 2y' = x^2 - 1$.
3010. $y'' - 2y' + y = 2e^x$. **3011.** $y'' - 2y' = e^{2x} + 5$.
3012. $y'' - 2y' - 8y = e^x - 8 \cos 2x$.
3013. $y'' + y' = 5x + 2e^x$. **3014.** $y'' - y' = 2x - 1 - 3e^x$.
3015. $y'' + 2y' + y = e^x + e^{-x}$.
3016. $y'' - 2y' + 10y = \operatorname{sen} 3x + e^x$.
3017. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + \frac{x}{2}$.
3018. $y'' - 3y' = x + \cos x$.

3019. Achar a solução da equação $y'' - 2y' = e^{2x} + x^2 - 1$, que satisfaz as condições $y = \frac{1}{8}$, $y' = 1$ quando $x = 0$.

Resolver as equações:

3020. $y'' - y = 2x \operatorname{sen} x$. **3021.** $y'' - 4y = e^{2x} \operatorname{sen} 2x$.

3022. $y'' + 4y = 2 \operatorname{sen} 2x - 3 \cos 2x + 1$.

3023. $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \operatorname{sen} x$.

3024. $y'' = xe^x + y$. **3025.** $y'' + 9y = 2x \operatorname{sen} x + xe^{3x}$.

3026. $y'' - 2y' - 3y = x(1 + e^{3x})$.

3027. $y'' - 2y' = 3x + 2xe^x$. **3028.** $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$.

3029. $y'' + 2y - 3y = 2xe^{-3x} + (x + 1)e^x$.

3030*. $y'' + y = 2x \cos x \cos 2x$.

3031. $y'' - 2y = 2xe^x(\cos x - \operatorname{sen} x)$.

Empregando o método de variação das constantes arbitrárias, resolver as equações:

3032. $y'' + y = \operatorname{tg} x$. **3033.** $y'' + y = \operatorname{ctg} x$.

3034. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$. **3035.** $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$.

3036. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$. **3037.** $y'' + y = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$.

3038. a) $y'' - y = \operatorname{tg} hx$; b) $y'' - 2y = 4x^2e^{x^2}$.

3039. Dois pesos iguais pendem no extremo de uma mola. Achar a equação do movimento que efetuará um destes pesos, se o outro se soltar.

Solução. Suponhamos que o aumento de comprimento que experimenta a mola sob a ação de um dos pesos, em estado de repouso, é igual a a e que a massa dele é m. Designamos por x a coordenada deste peso, tomada em direção vertical a partir da posição de equilíbrio quando há apenas um peso. Neste caso,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - k(x + a),$$

onde, evidentemente, $k = \frac{mg}{a}$ e, portanto, $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{a}x$. A solução geral é $x = C_1 \cos \sqrt{\frac{g}{a}}\, t + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{g}{a}}\, t$. As condições iniciais nos dão $x = a$ e $\frac{dx}{dt} = 0$ quando $t = 0$; daí $C_1 = a$ e $C_2 = 0$, portanto

$$x = a \cos \sqrt{\frac{g}{a}}\, t.$$

3040*. A força que dilata uma mola é proporcional ao aumento do comprimento da mesma e igual a 1 kgf, para um aumento de comprimento de 1 cm. Na mola está suspensa uma carga, cujo peso é de 2 kgf. Achar o período do movimento oscilatório que receberá esta carga se a estirarmos um pouco para baixo e a seguir soltá-lá.

3041*. Uma carga de peso $P = 4$ kgf está suspensa numa mola que se dilata em 1 cm. Achar a lei do movimento desta carga, se o extremo superior da mola efetua oscilações harmônicas verticais $y = 2$ sen $30t$ cm e no momento inicial a carga estava em repouso (a resistência do meio é desprezada).

3042. Um ponto material de massa m é atraído por dois centros. A força de atração de cada um é proporcional à distância (o coeficiente de proporcionalidade é igual a k). Achar a lei do movimento deste ponto, sabendo-se que a distância entre os dois centros é $2b$, que no momento inicial o ponto em questão se encontrava no segmento que une entre si tais centros, a uma distância c do ponto médio do mesmo e que sua velocidade era igual a zero.

3043. Uma cadeia de 6 m de comprimento desliza sem atrito desde um suporte para baixo. Se o movimento se inicia no momento quando está suspenso 1 m de cadeia, quanto tempo levará para esta deslizar por completo?

3044*. Um tubo comprido e estreito gira com uma velocidade angular constante ω em torno de um eixo vertical, perpendicular a ele. Uma bola que se encontra dentro do tubo desliza por ele sem atrito. Achar as leis do movimento da bola em relação ao tubo, considerando que:

a) no momento inicial a bola se encontrava a uma distância a do eixo de rotação e sua velocidade neste momento era igual a zero;

b) no momento inicial a bola se encontrava no eixo de rotação e tinha uma velocidade inicial v_0.

§ 13. Equações diferenciais lineares de ordem superior a 2ª com coeficientes constantes

1°. **Equação homogênea.** O sistema fundamental de soluções $y_1, y_2, \dots, y_n$ da equação linear homogênea com coeficientes constantes

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (1)$$

é composto à base do caráter que têm as raízes da *equação característica*

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0. \qquad (2)$$

Isto é: 1) se k é uma raiz real da equação (2) de grau de multiplicidade m, a esta correspondem m soluções linearmente independentes da equação (1):

$$y_1 = e^{kx}, \quad y_2 = xe^{kx}, \dots, y_m = x^{m-1} e^{kx};$$

2) se $\alpha \pm \beta i$ é um par de raízes complexas da equação (2) de grau de multiplicidade m, a elas correspondem $2m$ soluções linearmente independentes da equação (1):

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x, \quad y_3 = xe^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_4 = xe^{\alpha x} \times$$
$$\times \operatorname{sen} \beta x, \dots, y_{2m-1} = x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_{2m} = x^{m-1} e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x.$$

2°. **Equação não homogênea.** A solução particular da equação não homogênea

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \qquad (3)$$

é procurada baseando-se nas regras do § 12, 2° e 3°.

Achar as soluções gerais das equações:

3045. $y''' - 13y'' + 12y' = 0$. **3046.** $y''' - y' = 0$.

3047. $y''' + y = 0$. **3048.** $y^{IV} - 2y'' = 0$.

3049. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$. **3050.** $y^{IV} + 4y = 0$.

3051. $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0$. **3052.** $y^{IV} + y' = 0$.

3053. $y^{IV} - 2y'' + y = 0$. **3054.** $y^{IV} - a^4y = 0 \quad (a \neq 0)$.

3055. $y^{IV} - 6y'' + 9y = 0$. **3056.** $y^{IV} + a^2y'' = 0 \quad (a \neq 0)$.

3057. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 0$. **3058.** $y^{IV} + 2y'' + y = 0$.

3059. $y^{(n)} + \frac{n}{1}y^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}y^{(n-2)} + \dots + \frac{n}{1}y' + y = 0$.

3060. $y^{IV} - 2y''' + y'' = e^x$. **3061.** $y^{IV} - 2y''' + y'' = x^3$.

3062. $y''' - y = x^3 - 1$. **3063.** $y^{IV} + y''' = \cos 4x$.

3064. $y''' + y'' = x^2 + 1 + 3xe^x$.

3065. $y''' + y'' + y' + y = xe^x$.

3066. $y''' + y' = \operatorname{tg} x \sec x$.

3067. Achar a solução particular da equação

$$y''' + 2y'' + 2y' + y = x,$$

que satisfaz as condições iniciais $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

§ 14. Equações de Euler

A equação linear da forma

$$(ax+b)^n y^{(n)} + A_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \dots + A_{n-1}(ax+b)y' + A_n y = f(x), \quad (1)$$

onde $a, b, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n$ são constantes, chama-se *equação de Euler*.

Para o campo $ax + b > 0$, introduzimos uma nova variável independente t, supondo

$$ax + b = e^t.$$

Então

$$y' = ae^{-t}\frac{dy}{dt}, \quad y'' = a^2e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right),$$

$$y''' = a^3e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right), \text{ etc.}$$

e a equação de Euler se transforma em uma equação linear com coeficientes constantes. Quando $ax + b < 0$, fazemos $ax + b = -e^t$.

Exemplo 1. Resolver a equação $x^2y'' + xy' + y = 1$.

Solução. Fazendo $x = e^t$, obtemos:

$$\frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).$$

Portanto, a equação dada toma a forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 1,$$

daí

$$y = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t + 1$$

ou

$$y = C_1 \cos (\ln x) + C_2 \operatorname{sen} (\ln x) + 1$$

Para a equação homogênea de Euler

$$x^n y^{(n)} + A_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + A_{n-1} x y' + A_n y = 0, \tag{2}$$

quando $x > 0$ pode-se procurar uma solução na forma

$$y = x^k. \tag{3}$$

Colocando em (2) $y, y', \ldots, y^{(n)}$, determinadas pela relação (3), obtemos a equação característica, da qual pode-se achar o expoente k.

Se k é uma raíz real da equação característica, de grau m de multiplicidade, a ela correspondem m soluções linearmente independentes

$$y_1 = x^k, \quad y_2 = x^k \ln x, \quad y_3 = x^k (\ln x)^2, \ldots, y_m = x^k (\ln x)^{m-1}.$$

Se $\alpha \pm \beta i$ é um par das raízes complexas de grau m de multiplicidade, a elas correspondem $2m$ soluções linearmente independentes

$$y_1 = x^\alpha \cos(\beta \ln x), \qquad y_2 = x^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln x),$$
$$y_3 = x^\alpha \ln x \cos(\beta \ln x), \qquad y_4 = x^\alpha \ln x \operatorname{sen}(\beta \ln x).$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_{2m-1} = x^\alpha (\ln x)^{m-1} \cos(\beta \ln x), \qquad y_{2m} = x^\alpha (\ln x)^{m-1} \operatorname{sen}(\beta \ln x).$$

Exemplo 2. Resolver a equação $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$.
Solução. Fazemos

$$y = x^k; \quad y' = kx^{k-1}, \quad y'' = k(k-1)x^{k-2}.$$

Substituindo na equação dada, depois de simplificar por x^k, obtemos a equação característica

$$k^2 - 4k + 4 = 0.$$

Resolvendo-a achamos

$$k_1 = k_2 = 2,$$

portanto, a solução geral será

$$y = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln x.$$

Resolver as equaçoes:

3068. $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + y = 0.$ **3069.** $x^2 y'' - xy' - 3y = 0.$

3070. $x^2 y'' + xy' + 4y = 0.$

3071. $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0.$

3072. $(3x + 2) y'' + 7y' = 0.$ **3073.** $y'' = \frac{2y}{x^2}.$

3074. $y'' + \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 0.$ **3075.** $x^2 y'' - 4xy' + 6y = x.$

3076. $(1 + x)^2 y'' - 3(1 + x) y' + 4y + (1 + x)^3.$

3077. Achar a solução particular da equação

$$x^2 y'' - xy' + y = 2x,$$

que satisfaça as condições iniciais: $y = 0$, $y' = 1$ quando $x = 1$.

§ 15. Sistemas de equações diferenciais

Método de eliminação. Para achar, por exemplo, a solução de um sistema normal de duas equações diferenciais de 1ª ordem, isto é, de um sistema da forma

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y, z), \quad \frac{dz}{dx}=g(x, y, z), \tag{1}$$

resolvido em relação às derivadas das funções y e z procuradas, derivamos uma delas em relação a x. Temos, por exemplo:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}f+\frac{\partial f}{\partial z}g. \tag{2}$$

Determinando z da primeira equação do sistema (1) e colocando a expressão obtida

$$z=\varphi\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right) \tag{3}$$

na equação (2), obtemos uma equação de 2ª ordem com uma função incógnita y. Resolvendo-a, achamos:

$$y=\psi(x,\ C_1,\ C_2), \tag{4}$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias. Colocando a função (4) na fórmula (3), determinamos a função z sem necessidade de novas integrações. O conjunto das fórmulas (3) e (4), onde y na fórmula (3) foi substituído por ψ, dá a solução geral do sistema (1).

Exemplo. Resolver o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}+2y+4z=1+4x, \\ \dfrac{dz}{dx}+y-z=\dfrac{3}{2}x^2. \end{cases}$$

Solução. Derivamos a primeira equação em relação a x:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+4\frac{dz}{dx}=4.$$

Da primeira equação determinamos $z=\frac{1}{4}\left(1+4x-\frac{dy}{dx}-2y\right)$ e então, da segunda equação teremos: $\frac{dz}{dx}=\frac{3}{2}x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{3}{2}y-\frac{1}{4}\frac{dy}{dx}$. Colocando os valores de z e de $\frac{dz}{dx}$ na equação obtida depois de derivar, chegamos à equação de 2ª ordem com uma incógnita y:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-6y=-6x^2-4x+3.$$

Resolvendo-a, achamos

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}+x^2+x,$$

e então

$$z=\frac{1}{4}\left(1+4x-\frac{dy}{dx}-2y\right)=-C_1e^{2x}+\frac{C_2}{4}e^{-3x}-\frac{1}{2}x^2.$$

Pode-se proceder de forma análoga no caso de sistemas de maior número de equações

Resolver os sistemas:

3078. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = z, \\ \dfrac{dz}{dx} = -y. \end{cases}$

3079. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + 5z, \\ \dfrac{dz}{dx} + y + 3z = 0. \end{cases}$

3080. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -3y - z, \\ \dfrac{dz}{dx} = y - z. \end{cases}$

3081. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x. \end{cases}$

3082. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y. \end{cases}$

3083. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + z, \\ \dfrac{dz}{dx} = x + y + z. \end{cases}$

3084. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 2y + z = \operatorname{sen} x, \\ \dfrac{dz}{dx} - 4y - 2z = \cos x. \end{cases}$

3085. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 3y + 4z = 2x, \\ \dfrac{dz}{dx} - y - z = x; \end{cases}$ $y = 0$, $z = 0$ quando $x = 0$.

3086. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - 4x - y + 36t = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} + 2x - y + 2e^t = 0; \end{cases}$ $x = 0$, $y = 1$ quando $t = 0$.

3087. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{z}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{2} y. \end{cases}$

3088*. a) $\dfrac{dx}{x^3 + 3xy^2} = \dfrac{dy}{2y^3} = \dfrac{dz}{2y^2z}$; b) $\dfrac{dx}{x - y} = \dfrac{dy}{x + y} = \dfrac{dz}{z}$;

c) $\dfrac{dx}{y - z} = \dfrac{dy}{z - x} = \dfrac{dz}{x - y}$,

destacar a curva integral que passa pelo ponto $(1;\ 1;\ -2)$.

3089. $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + z = 1, \\ \dfrac{dz}{dx} + \dfrac{2}{x^2} y = \ln x. \end{cases}$$

3090. $$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + 2y + 4z = e^x, \\ \dfrac{d^2z}{dx^2} - y - 3z = -x. \end{cases}$$

3091.** Um projétil sai do canhão com velocidade inicial v_0, formando um ângulo α com o horizonte. Achar a equação do movimento deste projétil considerando a resistência do ar proporcional à velocidade.

3092*. Um ponto material M é atraido por um centro O com uma força proporcional à distância que os separa. O movimento começa no ponto A, a uma distância a do centro, com velocidade incial v_0, perpendicular ao segmento OA. Achar a trajetória do ponto M.

§16. Integração de equações diferenciais através de séries de potências

Se não é possível integrar uma equação diferencial através de funções elementares, pode-se procurar a solução, em certos casos, na forma de séries de potencias.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x - x_0)^n. \tag{1}$$

Os coeficientes indeterminados $C_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$ são encontrados colocando-se a série (1) na equação e igualando os coeficientes que correspondem à potências iguais do binômio $x - x_0$ em ambos os membros da igualdade assim obtida.

Pode-se também procurar solução da equação

$$y' = f(x, y), \text{ onde } y(x_0) = y_0, \tag{2}$$

em forma de série de Taylor

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \tag{3}$$

onde $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ e as derivadas $y^{(n)}(x_0)$ $(n = 2, 3, \ldots)$ são achadas sucessivamente através da derivação da equação (2) e pela substituição de x pelo número x_0.

Exemplo 1. Achar a solução da equação

$$y'' - xy = 0,$$

se $y = y_0$, $y' = y'_0$ quando $x = 0$.

Solução. Fazemos

$$y = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots,$$

donde, derivando, obtemos:

$$y'' = 2 \cdot 1c_2 + 3 \cdot 2c_3 x + \ldots + n(n-1) c_n x^{n-2} + (n+1) nc_{n+1} x^{n-1} + \\ + (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n + \ldots$$

Colocando y e y'' na equação dada, chegamos à identidade

$$[2 \cdot 1c_2 + 3 \cdot 2c_3 x + \ldots + n(n-1) c_n x^{n-2} + (n+1) nc_{n+1} x^{n-1} + \\ + (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n + \ldots] - x[c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots] \equiv 0.$$

Reunindo no primeiro membro da igualdade obtida os termos que tenham x com igual potencia e igualando a zero os coeficientes que correspondem a estes potencias, teremos:

$$c_2 = 0;\ 3 \cdot 2c_3 - c_0 = 0;\ c_3 = \frac{c_0}{3 \cdot 2};\ 4 \cdot 3c_4 - c_1 = 0;\ c_4 = \frac{c_1}{4 \cdot 3};$$

$$5 \cdot 4c_5 - c_2 = 0;\ c_5 = \frac{c_2}{5 \cdot 4}, \text{ etc.}$$

Em geral

$$c_{3k} = \frac{c_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (3k-1)\,3k},\quad c_{3k+1} = \frac{c_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 3k(3k+1)},$$

$$c_{3k+2} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Portanto,

$$y = c_0\left(1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \ldots + \frac{x^{3k}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (3k-1)\,3k} + \ldots\right) +$$

$$+ c_1\left(x + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots + \frac{x^{3k+1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 3k(3k+1)} + \ldots\right), \quad (4)$$

onde $c_0 = y_0$ e $c_1 = y'_0$.

Utilizando o critério de D'Alembert é fácil certificar-se que a série (4) é convergente para $-\infty < x < +\infty$.

Exemplo 2. Achar a solução da equação

$$y' = x + y;\quad y_0 = y(0) = 1.$$

Solução. Fazemos

$$y = y_0 + y'_0 x + \frac{y''_0}{2!} x^2 + \frac{y'''_0}{3!} x^3 + \ldots$$

Temos $y_0 = 1$, $y'_0 = 0 + 1 = 1$. Derivando os dois membros da equação $y' = x + y$, achamos consecutivamente $y'' = 1 + y'$, $y''_0 = 1 + 1 = 2$, $y''' = y''$, $y'''_0 = 2$, etc. Portanto

$$y = 1 + x + \frac{2}{2!} x^2 + \frac{2}{3!} x^3 + \ldots$$

No exemplo examinado pode-se escrever a solução encontrada na forma definitiva

$$y = 1 + x + 2(e^x - 1 - x) \quad \text{ou} \quad y = 2e^x - 1 - x.$$

Deve-se proceder da mesma forma no caso de equações diferenciais de ordens superiores. A investigação da convergência das séries obtidas, em geral, é complexa e não é considerada obrigatória na resolução dos problemas deste parágrafo.

Achar, através de séries de potências, as soluções das seguintes equações com as condições iniciais indicadas.

Nos nºs. **3097, 3098, 3099** e **3101** investigar a convergência das soluções obtidas.

3093. $y' = y + x^2$; $y = -2$ quando $x = 0$.

3094. $y' = 2y + x - 1$; $y = y_0$ quando $x = 1$.

3095. $y' = y^2 + x^3$; $y = \frac{1}{2}$ quando $x = 0$.

3096. $y' = x^2 - y^2$; $y = 0$ quando $x = 0$.

3097. $(1 - x)\,y' = 1 + x - y$; $y = 0$ quando $x = 0$;

3098*. $xy'' + y = 0; \quad y = 0,\ y' = 1$ quando $x = 0$.

3099. $y'' + xy = 0; \quad y = 1,\ y' = 0$ quando $x = 0$.

3100*. $y'' + \frac{2}{x}y' + y + 0; \quad y = 1,\ y' = 0$ quando $x = 0$.

3101*. $y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0; \quad y = 1,\ y' = 0$ quando $x = 0$.

3102. $\frac{d^2x}{dt^2} + x\cos t = 0; \quad x = a,\ \frac{dx}{dt} = 0$ quando $t = 0$.

§ 17. Problemas do método de Fourier

Para achar a solução de uma equação diferencial linear homogênea em derivadas parciais pelo método de Fourier é preciso, inicialmente, procurar as soluções particulares desta equação de tipo especial, cada uma das quais representa em si o produto de funções que dependem de um só segmento. No caso mais simples tem-se um conjunto infinito destas soluções u_n $(n = 1, 2, \ldots)$, linearmente independentes para qualquer número finito entre si e que satisfaçam as condições de *limite dadas*. A solução u procurada é representada em forma da série destas soluções particulares

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n. \tag{1}$$

Ficam por determinar os coeficientes C_n, que são encontrados a partir das *condições iniciais*.

Problema. O deslocamento transversal $u = u(x, t)$ dos pontos de uma corda, cuja abscissa é x no instante t, satisfaz a equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2}$$

onde $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$ (T_0 é a tensão e ρ a densidade linear da corda). Achar a forma que terá esta corda no instante t, se seus extremos $x = 0$ e $x = 1$ estão fixos e no instante inicial $t = 0$ a corda tinha a forma da parábola $u = \frac{4h}{l^2}x(l - x)$ (fig. 107) e seus pontos tinham uma velocidade igual a zero.

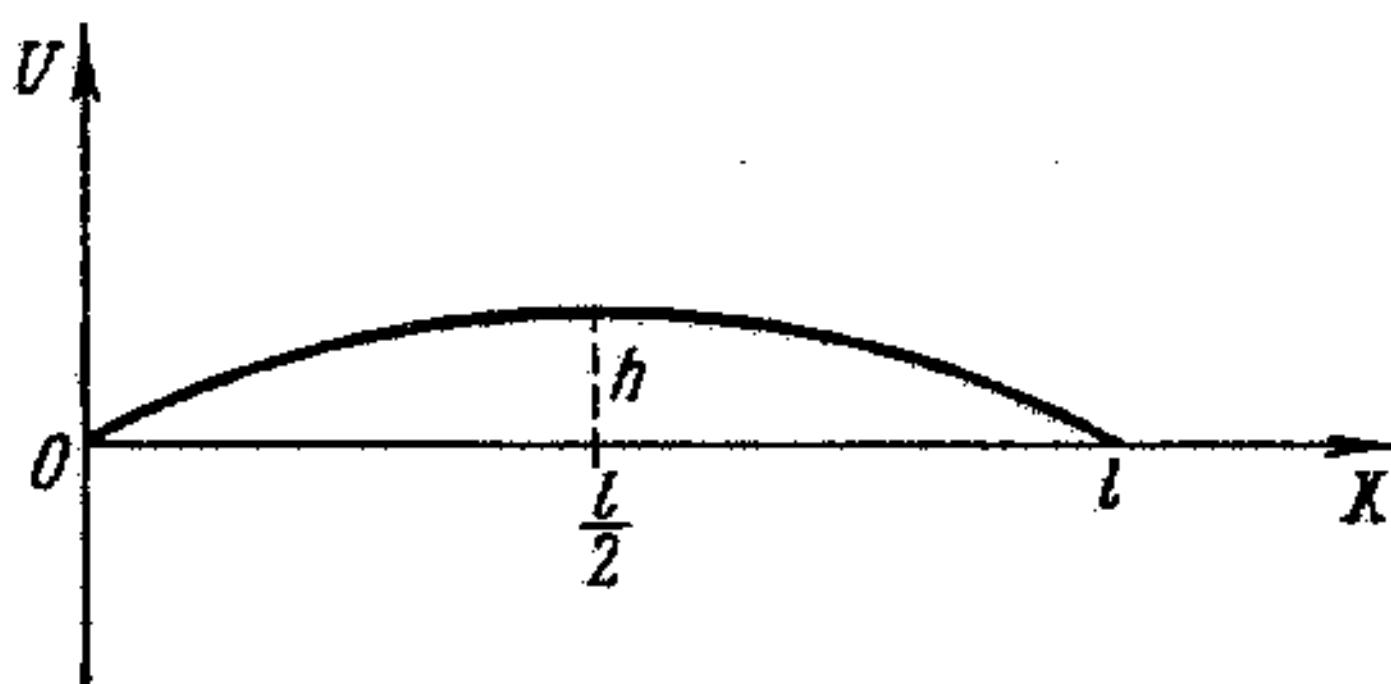



FIG. 107

Solução. De acordo com as condições do problema, deve-se achar uma solução $u = u(x, t)$ da equação (2) que satisfaça às condições do limite:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

e as condições iniciais:

$$u(x,\ 0) = \frac{4h}{l^2}\, x(1 - x),$$
$$u'_t(x,\ 0) = 0. \tag{4}$$

Procuramos as soluções, diferentes de zero, da equação (2) de tipo especial $u = X(x)\ T(t)$. Colocando esta expressão na equação (2) e separando as variáveis, obtemos:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{5}$$

Como as variáveis x e t são independentes, a identidade (5) só será possível no caso em que o valor total da relação (5) seja constante. Designando esta constante por meio de $-\lambda^2$, achamos duas equações diferenciais ordinárias:

$$T''(t) + (a\lambda)^2 \cdot T(t) = 0 \quad \text{e} \quad X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0.$$

Resolvendo estas equações obtemos.

$$T(t) = A \cos a\lambda t + B \operatorname{sen} a\lambda t,$$
$$X(x) = C \cos \lambda x + D \operatorname{sen} \lambda x,$$

onde A, B, C, D são constantes arbitrárias. Das condições (3) temos: $X(0) = 0$ e $X(l) = 0$, portanto $C = 0$ e $\operatorname{sen} \lambda l = 0$ (já que D não pode ser igual a zero ao mesmo tempo que C). Por isso, $\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$, onde k é um número inteiro. E fácil convencer-se que não se perde a generalidade se tomarmos para k unicamente os valores positivos ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Para cada valor de λ_k, corresponde uma solução particular

$$u_k = \left(A_k \cos \frac{ka\pi}{l} t + B_k \operatorname{sen} \frac{ka\pi}{l} t\right) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{l},$$

que satisfaz às condições do limite (3). Compomos a série

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{ka\pi t}{l} + B_k \operatorname{sen} \frac{ka\pi t}{l}\right) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{l}$$

cuja soma, evidentemente, satisfaz a equação (2) e as condições do limite (3).

Devemos escolher as constantes A_k e B_k de modo que a soma da série satisfaça as condições iniciais (4). Como

$$\frac{\partial u}{\partial t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ka\pi}{l} \left(- A_k \operatorname{sen} \frac{ka\pi t}{l} + B_k \cos \frac{ka\pi t}{l}\right) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{l},$$

então, fazendo $t = 0$, obtemos:

$$u(x,\ 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{l} \equiv \frac{4h}{l^2}\, x(l - x)$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ka\pi}{l} B_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{l} \equiv 0.$$

Portanto, para determinar os coeficientes A_k e B_k é preciso desenvolver por senos em série de Fourier a função $u(x, 0) = \frac{4h}{l^2}\, x(l - x)$ e a função $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} \equiv 0$.

De acordo com as fórmulas já conhecidas (cap. VIII, §4, 3°, temos:

$$A_k = \frac{2}{1} \int_0^l \frac{4h}{l^2}\, x(1 - x) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{l}\, dx = \frac{32h}{\pi^3 k^3},$$

se k é impar; e $A_k = 0$, se k é par;

$$\frac{ka\pi}{l} B_k = \frac{2}{1} \int_0^l 0 \cdot \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{l} dx = 0, \; B_k = 0.$$

A solução procurada será

$$u = \frac{32h}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2n+1) a\pi t}{l}}{(2n+1)^3} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

3103*. No instante inicial $t = 0$ uma corda presa em seus extremos $x = 0$ e $x = 1$, tinha a forma da sinusóide $u = A \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}$, sendo as velocidades de seus pontos iguais a zero. Achar a forma desta corda no instante t.

3104*. No instante inicial $t = 0$ foi imprimida aos pontos de uma corda retilínea $0 < x < l$ uma velocidade de $\frac{\partial u}{\partial t} = 1$. Achar a forma que terá esta corda no instante t, se seus extremos $x = 0$ e $x = 1$ estão fixos (ver o problema 3103).

3105*. Uma corda, cujo comprimento é $l = 100$ cm, presa por seus extremos $x = 0$ e $x = 1$, está, no instante inicial, estirada no ponto $x = 50$ cm a uma distância $h = 2$ cm e depois é solta sem golpeá-la. Determinar a forma desta corda num instante t qualquer.

3106*. Ao vibrar no sentido longitudinal uma vareta reta, delgada e homogênea, cujo eixo coincide com o eixo OX, o deslocamento $u = u(x)$, t) de sua seção transversal, de abscissa x, no instante t, satisfaz a équação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

onde $a^2 = \frac{E}{\rho}$ (E é o módulo de elasticidade e ρ, a densidade da vareta). Determinar as vibrações longitudinais da yareta elástica horizontal, cujo comprimento é $l = 100$ cm, que estando presa por um dos seus extremos, $x = 0$ e estirando-se por outro lado $x = 100$ no comprimento $\Delta l = 1$ cm, a seguir é solta, sem ser golpeada.

3107*. Para a vareta reta homogênea, cujo eixo coincide com o eixo OX a temperatura $u = u(x, t)$ de sua seção de abscissa x, no instante t, quando não existem fontes de calor, satisfaz a equação da condutibilidade térmica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

onde a é uma constante. Determinar a distribuição da temperatura numa vareta de $l = 100$ cm de comprimento, para qualquer instante t, se é conhecida a distribução inicial da temperatura

$$u(x, 0) = 0{,}01 \; x(100 - x).$$

Capítulo X

CÁLCULOS APROXIMADOS

§ 1. Operações com números aproximados

1°. **Erro absoluto.** *O erro absoluto* de um número aproximado a, que substitue um número exato A, denomina-se o valor absoluto da diferença entre eles. O número Δ, que satisfaz a desigualdade

$$|A - a| \leqslant \Delta \tag{1}$$

recebe o nome de *limite do erro absoluto*. O número exato A se encontra entre os limites $a - \Delta \leqslant A \leqslant a + \Delta$.

2°. Erro relativo. Entende-se por erro relativo de um número aproximado a, que substitue um número exato $A (A > 0)$, à razão do erro absoluto a e o número exato A. O número δ, que satisfaz a desigualdade

$$\frac{|A - a|}{A} \leqslant \delta \tag{2}$$

chama-se limite do erro relativo do número aproximado a. Como praticamente $A \approx a$ como limite do erro relativo se toma com frequência o número $\delta = \frac{\Delta}{a}$.

3°. **Número de cifras decimais exatas.** Diz-se que um número aproximado e positivo a, escrito em forma decimal, tem n cifras decimais exatas em sentido estrito, se o valor absoluto do erro deste número não excede em $\frac{1}{2}$ da undiade decimal de ordem enésima. Neste caso, quando $n > 1$, pode-se tomar como limite do erro relativo o número

$$\delta = \frac{1}{2k}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1},$$

onde k é a primeira cifra de valor do número a. Ao contrário, se sabemos que $\delta \leqslant \frac{1}{2(k+1)}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$, o número a terá n cifras decimais exatas em sentido estrito. Em particular, o número a terá com certeza n cifras exatas em sentido estrito, se $\delta \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^{n}$.

Se o erro absoluto de um número aproximado a não excede a uma unidade de última ordem decimal (como ocorre, por ex., com os números que surgem nas medições com precisão de até a unidade respectiva), diz-se que todas as cifras decimais deste número aproximado são *exatas em sentido amplo*. Quando o número aproximado tem mais cifras de valor, este, se é o resultado final de cálculos, se arredonda geral-

mente de tal forma, que todas as cifras restantes são exatas no sentido estrito ou amplo.

Futuramente iremos supor que ao, escrevermos os dados iniciais, todas as cifras serão exatas (sempre que não se diga o contrário) em sentido estrito. Quanto aos resultados dos cálculos intermediários, estes poderão ter uma ou duas cifras de reserva.

Observamos que os exemplos deste parágrafo, como regra, são os resultados finais de cálculos e, portanto, as respostas são dadas em números aproximados que só contém cifras decimais exatas. Nas introduções posteriores fazão-se somente observações breves.

4°. Soma a substração de números aproximados. O limite do erro absoluto da soma algébrica de vários números é igual à soma dos limites dos erros absolutos destes números. Por isso, para que na soma de uma quantidade reduzida de números aproximados, cujas cifras decimais sejam todas exatas, figurem apenas cifras exatas (pelo menos no sentido amplo), é preciso igualar todos os termos, tomando como modelo o que tenha menos cifras decimais e deixar em cada um deles uma cifra de reserva. A seguir, somam-se os números assim obtidos, como exatos, e se arredonda a última cifra da soma.

Se é preciso somar números aproximados não arredondados, deve-se fazer o seu arredondamento, conservando em cada um dos termos uma ou duas cifras de reserva e, a seguir, reger-se pelas regras supra citadas, mantendo na soma as cifras de reserva correspondentes, até terminar as operações.

Exemplo 1. $215{,}21 + 14{,}182 + 21{,}4 = 215{,}2(1) + 14{,}1(8) + 21{,}4 = 250{,}8$.

O erro relativo de uma soma de termos positivos não excede ao erro relativo máximo destes termos.

O erro relativo de subtração não é fácil de calcular. Principalmente quando se trata de achar a diferença entre dois números próximos.

Exemplo 2. Ao subtrair-se os números aproximados $6{,}135$ e $6{,}131$, com quatro cifras decimais exatas, obtemos uma diferença de $0{,}004$. O limite de seu erro absoluto é igual a

$$\delta = \frac{\frac{1}{2}\,0{,}001 + \frac{1}{2}\,0{,}001}{0{,}004} = \frac{4}{1} = 0{,}25;$$

portanto, nenhuma das cifras da diferença é correta. Por isso deve-se evitar sempre que possível a diferença de números aproximados, próximos entre si, transformando caso necessário, a expressão de tal forma que esta operação desapareça.

5°. Multiplicação e divisão de números aproximados. O limite do erro relativo do produto e quociente de números aproximados é igual à soma dos limites dos erros relativos destes números. Partindo disto e aplicando a regra do número de cifras exatas (3°), na resposta se conservará apenas um número determinado de cifras.

Exemplo 3. O produto dos números aproximados $25{,}3 \cdot 4{,}12 = 104{,}236$. Supondo que todas as cifras dos fatores sejam exatas, obtemos que o limite do erro relativo do produto seja

$$\delta = \frac{1}{2 \cdot 2}\,0{,}01 + 1\,\frac{1}{4 \cdot 2}\,0{,}01 = 0{,}003.$$

Donde o número de cifras exatas do produto será igual a três e o resultado, se é definitivo, deve ser escrito: $25{,}3 \cdot 4{,}12 = 104$, ou mais exatamente, $25{,}3 \cdot 4{,}12 = 104{,}2 \pm 0{,}3$.

6°. Elevação a potências e extração de raízes de números aproximados. O limite do erro relativo da m-ésima potencia de um número aproximado a, é igual ao múltiplo m-ésimo do limite do erro deste número.

O limite do erro relativo da raiz m-ésima de um número aproximado a é igual a $\frac{1}{m}$ parte do limite do erro relativo do número a.

7°. Cálculo do erro resultante de diversas operações com números aproximados. Se $\Delta a_1, \ldots, \Delta a_n$ são os limites dos erros absolutos dos números aproximados $a_1, \ldots a_n$, o limite do erro absoluto ΔS resultante

$$S = f(a_1, \ldots, a_n)$$

pode ser valorizado aproximadamente pela fórmula

$$\Delta S = \left|\frac{\partial f}{\partial a_1}\right| \Delta a_1 + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial a_n}\right| \Delta a_n.$$

Neste caso, o limite do erro relativo para S será igual a

$$\delta S = \frac{\Delta S}{|S|} = \left|\frac{\partial f}{\partial a_1}\right| \cdot \frac{\Delta a_1}{|f|} + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial a_n}\right| \frac{\Delta a_n}{|f|} = \left|\frac{\partial \ln f}{\partial a_1}\right| \Delta a_1 + \ldots + \left|\frac{\partial \ln f}{\partial a_n}\right| \Delta a_n.$$

Exemplo 4. Calcular $S = \ln(10,3 + \sqrt{4,4})$; os números aproximados 10,3 e 4,4 têm todas as cifras exatas.

Solução. Inicialmente calculamos o limite do erro absoluto ΔS em sua forma geral: $S = \ln(a + \sqrt{b})$, $\Delta S = \frac{1}{a + \sqrt{b}} \times \left(\Delta a + \frac{1}{2}\frac{\Delta b}{\sqrt{b}}\right)$. Temos $\Delta a = \Delta b \approx \frac{1}{20}$; $\sqrt{4,4} = 2,0976\ldots$; deixamos 2, 1, já que o erro relativo do número aproximado $\sqrt{4,4}$ é igual a $\approx \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{40} = \frac{1}{80}$; o erro absoluto será, então, $\approx 2 \cdot \frac{1}{80} = \frac{1}{40}$; isto é, podemos estar seguros quanto às frações decimais. Portanto,

$$\Delta S = \frac{1}{10,3 + 2,1}\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20 \cdot 2,1}\right) = \frac{1}{12,4 \cdot 2,0}\left(1 + \frac{1}{4,2}\right) = \frac{13}{2604} \approx 0,005.$$

Quer dizer que as frações centesimais são exatas.

Vamos agora calcular com uma cifra de reserva:

$$\lg(10,3 + \sqrt{4,4}) = \lg 12,4 = 1,093; \ \ln(10,3 + \sqrt{4,4}) = 1,093 \cdot 2,303 = 2,517.$$

Obtemos a respota: 2,52.

8°. Determinação dos erros toleráveis em números aproximados, quando se fixa o erro que pode tero resultado das operações que com eles se efetuam. Aplicando as fórmulas do ponto 7°, quando se dão os valores de ΔS e de δS e considerando iguais entre si todas as diferenciais parciais $\left|\frac{\partial f}{\partial a_k}\right| \Delta a_k$ ou as grandezas $\left|\frac{\partial f}{\partial a_k}\right| \frac{\Delta a_k}{|f|}$, calculamos os erros absolutos toleráveis $\Delta a_1, \ldots, \Delta a_n$ ou, correspondentemente, os erros relativos $\delta a_1, \ldots, \delta a_n$ dos números aproximados $a_1, \ldots, a_n$, que intervem nas operações (*princípio de efeitos iguais*).

Observamos que em determinadas ocasiões não é conveniente empregar o princípio de efeitos iguais no cálculo de erros toleráveis dos argumentos das funções; já que este pode apresentar exigências praticamente impossíveis de serem satisfeitas. Nestes casos, recomenda-se redistribuir os erros da forma mais racional, se for possível, de modo que o erro total não exceda à quantia dada. Isto é, o problema colocado é, falando a rigor, indeterminado.

Exemplo 5. O volume de uma "cunha cilíndrica", isto é, de um corpo cortado de um cilindro circular por um plano, que passando pelo diâmetro da base, igual a $2R$, forma com ela um ângulo α, é calculado pela fórmula $V = \frac{2}{3} R^3 \operatorname{tg} \alpha$. Com que precisão deve-se medir o raio $R \approx 60$ cm e o ângulo de inclinação α, para que o volume de cunha cilíndrica possa ser conhecido com uma exatidão de 1%?

Solução. Se ΔV, ΔR e $\Delta\alpha$ são os limites dos serros absolutos das grandezas R, V e α, o limite do erro relativo do volume V, que se calcula, será

$$\delta V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{3\Delta R}{R} + \frac{2\Delta\alpha}{\operatorname{sen} 2\alpha} \leqslant \frac{1}{100}.$$

Fazemos $\frac{3\Delta R}{R} \leqslant \frac{1}{200}$ e $\frac{2\Delta x}{\operatorname{sen} 2\alpha} \leqslant \frac{1}{200}$. Daí

$$\Delta R \leqslant \frac{R}{600} \approx \frac{60 \text{ cm}}{600} = 1 \text{ mm};$$

$$\Delta\alpha \leqslant \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{400} \leqslant \frac{1}{400} \text{ radianos} \approx 9'.$$

Desta forma, garante-se a precisão de 1% exigida, se medirmos o raio com uma precisão de até 1 mm e o ângulo de inclinação α, com precisão de até 9'.

3108. Como resultado de medições, obtiveram-se os seguintes números aproximados exatas, com todas as cifras escritas em sentido amplo:

a) 12°07'14''; b) 38,5 cm; c) 62,215 kg.

Calcular seus erros absolutos e realtivos.

3109. Calcular os erros absolutos e relativos dos números aproximados, com todas as cifras escritas exatas no sentido estrito:

a) 241,7; b) 0,035; c) 3,14.

3110. Determinar o número de cifras exatas* e escrever na forma que corresponde os seguintes números aproximados:

a) 48 361 com precisão de 1%; b) 592,8 com precisão de 2%; c) 14,9360 com precisão de 1%.

3111. Somar os seguintes números aproximados, com todas as cifras escritas exatas:

a) 25,386 + 0,49 + 3,10 + 0,5; b) 38,1 + 2,0 + 3,124; c) $1,2 \times 10^2$ + 41,72 + 0,09.

3112. Efetuar a diferença dos seguintes números aproximados, com todas as cifras escritas exatas:

a) 148,1 — 63,871; b) 29,72 — 11,25; c) 34,22 — 34,21.

3113*. Calcular a diferença entre a área de dois quadrados, cujos lados, segundo as medições, são iguais a 15,28 cm e 15,22 cm (com precisão de até 0,05 mm).

3114. Calcular o producto dos seguintes números aproximados, com todas as cifras escritas exatas:

a) 3,49 · 8,6; b) 25,1 + 1,743; c) 0 02 · 16,5.

Indicar os limites prováveis dos resultados.

3115. Os lados de um retângulo são iguais a 4,02 m e 4,96 m (com precisão de até 1 cm). Calcular a área deste retângulo.

3116. Calcular o quociente dos seguintes números aproximados, cujas cifras escritas são todas exatas:

a) 5,684: 5,032; b) 0,144: 1,2; c) 2,16: 4.

---

* As cifras exatas se entendem no sentido estrito.

3117. Os catetos de um triângulo retângulo são iguais a 12,10 cm e 25,21 cm (com precisão de até 0,01 cm). Calcular a tangente do ângulo oposto ao primeiro cateto.

3118. Calcular as potências indicadas dos seguintes números aproximados (as bases das potências são exatas em todas as cifras escritas):

a) $0{,}4158^2$; b) $65{,}2^3$; c) $1{,}5^2$.

3119. O lado de um quadrado é igual a 45,3 cm (com precisão de até 1 mm). Achar a área deste quadrado.

3120. Calcular a valor das seguintes raízes (os números subradicais são exatos em todas as cifras escritas):

$$\text{a) } \sqrt{2{,}715}; \quad \text{b) } \sqrt[3]{65{,}2}; \quad \text{c) } \sqrt{81{,}1}.$$

3121. Os raios das bases e a geratriz de um cone truncado são iguais, respectivamente, a $R = 23{,}64$ cm $\pm$ 0,01 cm; $r = 17{,}31$ cm $\pm$ 0,01 cm; $l = 10{,}21$ cm $\pm$ 0,01 cm; o número $\pi = 3{,}14$. Calcular, com estes dados, a superfície total deste cone truncado. Achar os valores dos erros, absoluto e relativo, do resultado.

3122. A hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a 15,4 cm $\pm$ $\pm$ 0,1 cm; um dos catetos é igual a 6,8 cm $\pm$ 0,1 cm. Com que precisão se podem calcular, com estes dados, o outro cateto e o ângulo agudo a ele adjacente? Achar seus valores.

3123. Calcular o peso específico do alumínio, se um cilindro feito deste metal, com 2 cm de diâmetro e 11 cm da altura, pesa 93,4 g. O erro relativo das medições lineares é igual a 0,01 e o da determinação do peso, 0,001.

3124. Calcular a corrente, se a força eletromotriz é igual a 221 volts $\pm$ 1 volt e a resistência, 809 ohm $\pm$ 1 ohm.

3125. O período de oscilação de um pêndulo de comprimento l é igual a

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

onde g é a aceleração da gravidade. Com que precisão deve-se medir o comprimento do pêndulo, cujo período de oscilações é, aproximadamente, de 2 s, para se ter o período de oscilações com um erro relativo de 0,5%? Com que precisão devem ser tomados os valores de π e de g?

3126. É preciso medir, com uma precisão de 1%, a área da superfície lateral de um cone truncado sendo que os raios das bases têm, respectivamente, 2 m e 1 m e a geratriz 5 m (aproximadamente). Com que precisão devem ser medidos os raios e a geratriz e com quantas cifras deve-se tomar o número π?

3127. Para determinar o módulo de elasticidade pela flexão de uma vareta de seção retangular, emprega-se a fórmula

$$E = \frac{1}{4} \cdot \frac{l^3 P}{d^3 b s},$$

onde é o comprimento da vareta; b e d, a base e a altura da seção transversal da mesma; s, a flecha de flexão e P, a carga. Com que precisão deve-se medir o comprimento l e a flecha s, para que o erro de E não exceda a 5,5%, com a condição de que P é conhecido com uma precisão de até 0,1% e as grandezas d e b com precisão de até 1%; $l \approx 50$ cm e $s \approx 2{,}5$ cm?

§ 2. Interpolação das funções

1°. Fórmula de interpolação de Newton. Sajam $x_0, x_1, \ldots, x_n$ os valores de tabela do argumento, cujas diferenças $h = \Delta x_i (\Delta x_i = x_{i+1} - x_i;\ i = 0, 1, \ldots, n-1)$ são constantes ***(intervalo da tabela)*** e $y_0, y_1, \ldots, y_n$ os valores correspondentes da função y. Neste caso, o valor da função y, para um valor intermediário do argumento x, é dado, aproximadamente, pela *fórmula de interpolação de Newton*

$$y = y_0 + q \cdot \Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!} \Delta^n y_0, \qquad (1)$$

onde $q = \dfrac{x - x_0}{h}$ e $\Delta y_0 = y_1 - y_0$, $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 \ldots$ são as sucessivas diferenças finitas da função y. Para $x = x_i (i = 0, 1, \ldots, n)$, o polinômio (1) toma os valores correspondentes da tabela $y_i (i = 0, 1, \ldots, n)$. Como casos particulares da fórmula de Newton, obtemos: para $n = 1$, ***a interpolação linear*** e para $n = 2$, ***a interpolação quadrática***. Para facilitar o uso da fórmula de Newton, recomenda-se compor com antecedência a tabela das diferenças finitas.

Se $y = f(x)$ é um polinômio de n-ésimo grau, então

$$\Delta^n y_i = \text{const} \text{ e } \Delta^{n+1} y_i = 0$$

e, portanto, a fórmula (1) é exata.

No caso geral, se $f(x)$ tem uma derivada contínua $f^{(n+1)}(x)$ no segmento $[a, b]$, que contém os pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e x, o erro da fórmula (1) será igual a

$$R_n(x) = y - \sum_{i=0}^{n} \frac{q(q-1)\ldots(p-i+1)}{i!} \Delta^i y_0 =$$

$$= h^{n+1} \frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \qquad (2)$$

onde ξ é um certo valor intermediário entre x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ e x. Na prática se usa uma fórmula aproximada mais cômoda

$$R_n(x) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!} q(q-1)\ldots(q-n).$$

Se é possível tomar qualquer número n, este deve ser escolhido de tal forma, que a diferença $\Delta^{n+1}y_0 \approx 0$ dentro dos limites da precisão dada. Em outras palavras, as diferenças $\Delta^n y_0$ devem ser constantes em ordens decimais dadas.

Exemplo 1. Achar o sen 26°15′, usando os dados de tabela sen 26° = 0,43837; sen 27° = 0,45399; sen 28° = 0,46947.

Solução. Compomos a tabela

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0	26°	0,43837	1562	— 14
1	27°	0,45399	1548	
2	28°	0,46947		

onde $h = 60'$, $q = \dfrac{26°15' - 26°}{60'} = \dfrac{1}{4}$.

Aplicando a fórmula (1) e utilizando a primeira linha horizontal da tabela, temos

$$\text{sen}\, 26°15' = 0{,}43837 + \frac{1}{4}\, 0{,}01562 + \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - 1\right)}{2!} \cdot (-\, 0{,}00014) = 0{,}44229.$$

Achamos o valor do erro R_2. Aplicando a fórmula (2) e considerando que $y =$ $=$ sen x, então $|y^{(n)}| \leqslant 1$, teremos:

$$|R_2| \leqslant \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - 1\right)\left(\frac{1}{4} - 2\right)}{3!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3 = \frac{7}{128} \cdot \frac{1}{57{,}33^3} \approx \frac{1}{4} \cdot 10^{-6}.$$

Isto é, todas as cifras dadas para sen 26°15′ são exatas.

Através da fórmula de Newton pode-se também achar o valor correspondente do argumento x, partindo de um valor intermediário dado da função y *(interpolação inversa)*. Para isto, inicialmente, determina-se o correspondente valor de q, pelo método das aproximações sucessivas, supondo que

$$q^{(0)} = \frac{y - y_0}{\Delta y_0}$$

e

$$q^{(i+1)} = q^{(0)} - \frac{q^{(i)}(q^{(i)} - 1)}{2} \cdot \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta y_0} - \ldots - \frac{q^{(i)}(q^{(i)} - 1) \ldots (q^{(i)} - n + 1)}{n!} \frac{\Delta^n y_0}{\Delta y_0}$$

$$(i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Por q se toma o valor comum (com precisão dada!) de duas aproximações sucessivas $q^{(m)} = q^{(m+1)}$. Daí $x = x_0 + q \cdot h$.

Exemplo 2. Usando a tabela, calcular aproximadamente a raiz de equação senh $x = 5$.

x	y=senh x	Δy	$\Delta^2 y$
2,2	4,457	1,009	0,220
2,4	5,466	1,229	
2,6	6,695		

Solução. Fazendo $y_0 = 4{,}457$, temos

$$q^{(0)} = \frac{5 - 4{,}457}{1{,}009} = \frac{0{,}543}{1{,}009} = 0{,}538;$$

$$q^{(1)} = q^{(0)} + \frac{q^{(0)}(1 - q^{(0)})}{2} \cdot \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta y_0} = 0{,}538 + \frac{0{,}538 \cdot 0{,}462}{2} \times$$

$$\times \frac{0{,}220}{1{,}009} = 0{,}538 + 0{,}027 = 0{,}565;$$

$$q^{(2)} = 0{,}538 + \frac{0{,}565 \cdot 0{,}435}{2} \cdot \frac{0{,}220}{1{,}009} = 0{,}538 + 0{,}027 = 0{,}565.$$

Desta forma, pode-se tomar

$$x = 2{,}2 + 0{,}565 \cdot 0{,}2 = 2{,}2 + 0{,}113 = 2{,}313.$$

2°. **Fórmula de interpolação de Lagrange.** No caso geral, o polinômio de n-ésimo grau, que para $x = x_i$ toma os valores dados de y_i ($i = 0, 1, \dots, n$) é dado pela *fórmula de interpolação de Lagrange*

$$y = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)} \times$$

$$\times y_1 + \dots + \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)} y_k + \dots$$

$$\dots + \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})} y_n.$$

3128. Dada a tabela de valores de x e y:

x	1	2	3	4	5	6
y	3	10	15	12	9	5

Compor a tabela das diferenças finitas da função y.

3129. Formar a tabela das diferenças da função $y = x^3 - 5x^2 + x - 1$, para os valores de $x = 1, 3, 5, 7, 9, 11$. Certificar-se de que todas as diferenças finitas de 3ª. ordem são iguais entre si.

3130*. Utilizando a constância das diferenças de 4ª ordem, formar a tabela das diferenças da função $y = x^4 - 10x^3 + 2x^2 + 3x$, para os valores inteiros de x compreendidos no intervalo $1 \leqslant x \leqslant 10$.

3131. Dada a tabela:

$$\lg 1 = 0{,}000,$$
$$\lg 2 = 0{,}301,$$
$$\lg 3 = 0{,}477,$$
$$\lg 4 = 0{,}602,$$
$$\lg 5 = 0{,}699.$$

Calcular, através da interpolação linear, os números: $\lg 1{,}7$; $\lg 2{,}5$; $\lg 3{,}1$; $\lg 4{,}6$.

3132. Dada a tabela:

$$\text{sen } 10° = 0{,}1736, \quad \text{sen } 13° = 0{,}2250,$$
$$\text{sen } 11° = 0{,}1908, \quad \text{sen } 14° = 0{,}2419,$$
$$\text{sen } 12° = 0{,}2079, \quad \text{sen } 15° = 0{,}2588.$$

Completá-la, calculando pela fórmula de Newton (para $n = 2$) os valores dos senos de meio grau.

3133. Formar o polinômio de interpolação de Newton para a função dada pela tabela

x	0	1	2	3	4
y	1	4	15	40	85

3134*. Formar o polinômio de interpolação de Newton para a função dada pela tabela

x	2	4	6	8	10
y	3	11	27	50	83

Achar y para $x = 5{,}5$. Para que x será $y = 20$?

3135. Uma função é dada pela tabela

x	-2	1	2	4
y	25	-8	-15	-23

Formar o polinômio de interpolação de Lagrange e achar o valor de y para $x = 0$.

3136. Determinam-se empiricamente as grandezas de alongamento de uma mola (x mm) em dependência da carga (P kgf) que sobre ela atua:

x	5	10	15	20	25	30	35	40
P	49	105	172	253	352	473	619	793

Achar a carga que produz um alongamento de 14 mm da mola.

3137. Dada a tabela das grandezas de x e y

x	0	1	3	4	5
y	1	-3	25	129	381

Calcular o valor de y para $x = 0{,}5$ e $x = 2$: a) usando a interpolação linear; b) pela fórmula de Lagrange.

§ 3. Cálculo das raízes reais das equações e dos sistemas das equações

1°. Determinação das aproximações iniciais das raízes. A determinação aproximada das raízes de uma equação dada

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

divide-se em duas etapas: 1) *a separação das raízes*, isto é, a determinação dos intervalos, os mais estreitos possível, entre os quais está compreendida uma, e somente uma, raíz da equação (1); 2) *o cálculo das raízes* com grau de exatidão prefixado.

Se a função $f(x)$ é determinada e contínua no segmento $[a, b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$, neste segmento $[a, b]$ haverá pelo menos uma raiz ξ da equação (1). Esta raiz será indubitavelmente única se $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$ para $a < x < b$.

Para achar aproximadamente a raiz ξ se recomenda construir o gráfico da função $y = f(x)$ em papel milimetrado. As abscissas dos pontos de interseção do gráfico com o eixo OX serão as raízes da equação $f(x) = 0$. Às vezes é mais cômodo substituir esta equação por sua equivalente $\varphi(x) = \psi(x)$. Então, as raízes da equação são achadas como abscissas dos pontos de interseção dos gráficos $y = \varphi(x)$ e $y = \psi(x)$.

2°. Regra das partes proporcionais (método das cordas). Se no segmento $[a, b]$ se encontra uma raiz ξ da equação $f(x) = 0$, onde a função $f(x)$ é contínua neste segmento $[a, b]$ e $f(a) f(b) < 0$, ao substituir a curva $y = f(x)$ pela corda que une os pon tos $(a; f(a))$ e $(b; f(b))$, obtemos a primeira aproximação da raiz

$$c_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)} (b - a). \tag{2}$$

Para obter a segunda aproximação c_2, aplicamos a fórmula (2) a um dos segmentos $[a, c_1]$ ou $[c_1, b]$ em cujos extremos a função $f(x)$ tem valores de sinais contrários. Da mesma forma se constroem as seguintes aproximações. A sucessão dos números c_n $n = 1, 2, ...$) converge à raiz ξ, isto é,

$$\lim_{n \to \infty} c_n = \xi.$$

O cálculo das aproximações $c_1, c_2, \ldots$,em geral, deve continuar até que cessem de variar as cifras decimais que se conservam na resposta (em correspondência ao grau de exatidão dado!). Para as operações intermediárias deve-se tomar uma ou duas cifras de reserva. Esta indicação tem caráter geral.

Se a função $f(x)$ tem uma derivada $f'(x)$ contínua e diferente de zero no segmento $[a, b]$, então, para achar o valor do erro absoluto da raiz aproximada c_n, pode-se empregar a fórmula

$$|\xi - c_n| \leqslant \frac{|f(c_n)|}{\mu},$$

onde $\mu = \min\limits_{a \leqslant x \leqslant a} |f'(x)|$.

3°. Método de Newton (método das tangentes). Se $f'(x) \neq 0$ e $f''(x) \neq 0$ para $a \leqslant x \leqslant b$, sendo $f(a) f(b) < 0$, $f(a) f''(a) > 0$, as aproximações sucessivas x_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) da raiz ξ de equação $f(x) = 0$, saõ calculadas pelas fórmulas.

$$x_0 = a, \quad x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Quando são válidas estas suposições, a sucessão x_n ($n = 1, 2, \ldots$). é monótona e

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \xi.$$

Para achar o valor dos erros pode-se usar a fórmula

$$|x_n - \xi| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{\mu},$$

onde $\mu = \min\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)|$.

Na prática é mais cômodo o emprêgo de fórmulas menos complexas

$$x_0 = a, \; x_n = x_{n-1} - \alpha f(x_{n-1}) \; (n = 1, 2, \ldots), \tag{3'}$$

onde $\alpha = \frac{1}{f'(a)}$, que dão, aproximadamente, a mesma exatidão que a fórmula (3).

Se $f(b)f''(b) > 0$, nas fórmulas (3) e (3') supõe-se $x_0 = b$.

4°. Método de iteração. Suponhamos que a equação dada tenha-se reduzido à forma

$$x = \varphi(x), \tag{4}$$

onde $|\varphi'(x)| \leqslant r < 1$ (r é uma constante) para $a \leqslant x \leqslant b$. Partindo do valor inicial de x_0, pertencente ao segmento $[a, b]$, formamos a sucessão dos números $x_1, x_2, \ldots$ segundo a lei:

$$x_1 = \varphi(x_0), \quad x_2 = \varphi(x_1), \ldots, x_n = \varphi(x_{n-1}), \ldots \tag{5}$$

Se $a \leqslant x_n \leqslant b$ $(n = 1, 2, \ldots)$, o limite

$$\xi = \lim_{n \to \infty} x_n$$

será a *única raiz* da equação (4) no segmento $[a, b]$, isto é, x_n são as *aproximações sucessivas* da raiz ξ.

A valorização do erro absoluto da enésima aproximação de x_n é dada pela fórmula

$$|\xi - x_n| \leqslant \frac{|x_{n+1} - x_n|}{1 - r},$$

Por isso, se x_n e x_{n+1} coincidem com uma exatidão de até ε, o limite do erro absoluto de x_n será $\frac{\varepsilon}{1 - r}$.

Para transformar a equação $f(x) = 0$ na forma (4), substitue-se esta última pela equação equivalente

$$x = x - \lambda f(x),$$

onde o número $\lambda \neq 0$ é escolhido de tal forma, que a função $\frac{d}{dx}[x - \lambda f(x)] = 1 - \lambda f'(x)$ seja pequena em valor absoluto num entorno do ponto x_0 (por ex., pode-se supor que $1 - \lambda f'(x_0) = 0$).

Exemplo 1. Reduzir a equação $2x - \ln x - 4 = 0$ à forma (4), se a aproximação inicial da raiz $x_0 = 2{,}5$.

Solução. Temos $f(x) = 2x - \ln x - 4$; $f'(x) = 2 - \frac{1}{x}$. Escrevemos a equação equivalente $x = x - \lambda(2x - \ln x - 4)$ e na qualidade de um dos valores convenientes de λ tomamos 0,5, número próximo à raiz da equação $1 - \lambda\left(2 - \frac{1}{x}\right)\Big|_{x=2{,}5} = 0$, isto é, $\frac{1}{1{,}6} \approx 0{,}6$

A equação inicial se reduz à forma

$$x = x - 0{,}5(2x - \ln x - 4)$$

$$x = 2 + \frac{1}{2}\ln x.$$

Exemplo 2. Calcular com precisão de até 0,01 a raiz de ξ da equação precedente, compreendida entre 2 e 3.

Cálculo da raiz pelo método de iteração. Aproveitamos o resultado do exemplo 1, supondo $x_0 = 2{,}5$. Fazemos os cálculos segundo as fórmulas (5) com uma cifra de reserva.

$$x_1 = 2 + \frac{1}{2}\ln 2{,}5 \approx 2{,}458,$$

$$x_2 = 2 + \frac{1}{2}\ln 2{,}458 \approx 2{,}450,$$

$$x_3 = 2 + \frac{1}{2}\ln 2{,}450 \approx 2{,}448,$$

$$x_4 = 2 + \frac{1}{2}\ln 2{,}448 \approx 2{,}448.$$

Isto é, $\xi \approx 2{,}45$ (o processo de aproximações ulteriores pode ser dado como terminado, já que a terceira cifra decimal (os milésimos) fora fixada).

Avaliamos o erro. Neste caso,

$$\varphi(x) = 2 + \frac{1}{2}\ln x \text{ e } \varphi'(x) = \frac{1}{2x}.$$

Considerando que todas as aproximações x_n se encontram no segundo segmento [2, 4; 2, 6], obtemos:

$$x = \text{máx}\,|\varphi'(x)| = \frac{1}{2\cdot 2{,}4} = 0{,}21.$$

Portanto, o limite do erro absoluto da aproximação x_3, de acordo com a observação feita anteriormente, é

$$\Delta = \frac{0{,}001}{1 - 0{,}21} = 0{,}0012 \approx 0{,}001.$$

Desta forma, a raiz exata ξ da equação encontra-se entre os limites

$$2{,}447 < \xi < 2{,}449;$$

pode-se tomar $\xi \approx 2{,}45$, e todas as cifras deste número aproximado serão exatas em sentido estrito.

Cálculo da raiz pelo método de Newton. Temos

$$f(x) = 2x - \ln x - 4, \quad f'(x) = 2 - \frac{1}{x}, \quad f''(x) = \frac{1}{x^2}.$$

No segmento $2 \leqslant x \leqslant 3$ temos: $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$; $f(2)f(3) < 0$; $f(3)\,f''(3) > 0$. Portanto, as condições do ponto 3°, para $x_0 = 3$, são válidas.

Tomamos

$$\alpha = \left(2 - \frac{1}{3}\right)^{-1} = 0{,}6.$$

Fazemos os cálculos pela fórmula (3'), com duas cifras de reserva:

$$x_1 = 3 - 0{,}6(2\cdot 3 - \ln 3 - 4) = 2{,}4592;$$
$$x_2 = 2{,}4592 - 0{,}6(2\cdot 2{,}4592 - \ln 2{,}4592 - 4) = 2{,}4481;$$
$$x_3 = 2{,}4481 - 0{,}6(2\cdot 2{,}4481 - \ln 2{,}4481 - 4) = 2{,}4477;$$
$$x_4 = 2{,}4477 - 0{,}6(2\cdot 2{,}4477 - \ln 2{,}4477 - 4) = 2{,}44675.$$

Nesta etapa suspendemos os cálculos, já que as cifras dos milésimos não mudam mais. Damos a resposta: a raiz $\xi = 2{,}45$.

Omitimos a avaliação do erro.

5°. Caso de um sistema de duas equações. Vamos supor que é preciso calcular, com um grau de exatidão dado, as raízes reais de um sistema de duas equações com duas incógnitas

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

e vamos supor também que se tem a aproximação inicial de uma das soluções (ξ, η) deste sistema, $x = x_0$, $y = y_0$, embora f e φ são diferenciáveis em um certo entorno do ponto (x, y), que contem o ponto (ε, η).

Esta aproximação inicial pode ser obtida, por ex., graficamente, construindo (num mesmo sistema de coordenadas cartesianas) as curvas $f(x, y) = 0$ e $\varphi(x, y) = 0$ e determinando as coordenadas dos pontos de interseção destas curvas.

a) *Método de Newton.* Vamos supor que o determinante funcional

$$I = \frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(x, y)}$$

não se anula nas proximidades da aproximação inicial $x = x_0$, $y = y_0$. Neste caso, pelo método de Newton, a primeira aproximação do resultado do sistema (6) tem a forma $x_1 = x_0 + \alpha_0$, $y_1 = y_0 + \beta_0$ onde α_0 e β_0 é a solução do sistema das duas equações lineares

$$\begin{cases} f(x_0, y_0) + \alpha_0 f'_x(x_0, y_0) + \beta_0 f'_y(x_0, y_0) = 0, \\ \varphi'(x_0, y_0) + \alpha_0 \varphi'_x(x_0, y_0) + \beta_0 \varphi'_y(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

Pelo mesmo método obtemos a segunda aproximação:

$$x_2 = x_1 + \alpha_1, \qquad y_2 = y_1 + \beta_1,$$

onde α_1, β_1 é a solução do sistema de equações lineares

$$\begin{cases} f(x_1, y_1) + \alpha_1 f'_x(x_1, y_1) + \beta_1 f'_y(x_1, y_1) = 0, \\ \varphi'(x_1, y_1) + \alpha_1 \varphi'_x(x_1, y_1) + \beta_1 \varphi'_y(x_1, y_1) = 0. \end{cases}$$

E assim obtém-se sucessivamente a terceira e demais aproximações.

b) *Método de iteração.* Para a resolução do sistema de equações (6), pode-se empregar o método de iteração, transformando este sistema na forma equivalente

$$\begin{cases} x = F(x, y), \\ y = \Phi(x, y) \end{cases} \tag{7}$$

e supondo que F e Φ são diferenciáveis e

$$|F'_x(x, y)| + |\Phi'_x(x, y)| \leqslant r < 1; \qquad |F'_y(x, y)| + |\Phi'_y(x, y)| \leqslant r < 1 \tag{8}$$

em um determinado entorno bidimensional U da aproximação inicial (x_0, y_0), que contém também a solução exata (ξ, η) do sistema.

A sucessão das aproximações (x_n, y_n) ($n = 1, 2, \ldots$) que converge para a solução do sistema (7), ou, o que é o mesmo, para a solução do sistema (6), forma-se segundo a lei:

$$\begin{aligned} x_1 &= F(x_0, y_0), \quad & y_1 &= \Phi(x_0, y_0), \\ x_2 &= F(x_1, y_1), \quad & y_2 &= \Phi(x_1, y_1), \\ x_3 &= F(x_2, y_2), \quad & y_3 &= \Phi(x_2, y_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Se todos (x_n, y_n) pertencem a U, então $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \eta$.

Para transformar o sistema de equações (6) na forma (7), cumprindo a condição (8), pode-se recomendar o seguinte método. Examinamos o sistema de equações

$$\begin{cases} \alpha f(x, y) + \beta\varphi(x, y) = 0, \\ \gamma f(x, y) + \delta\varphi(x, y) = 0, \end{cases}$$

equivalente ao sistema (6) com a condição de que $\begin{vmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{vmatrix} \neq 0$. Tornamos a escrevê-lo na forma:

$$x = x + \alpha f(x, y) + \beta\varphi(x, y) \equiv F(x, y),$$
$$y = y + \gamma f(x, y) + \delta\varphi(x, y) \equiv \Phi(x, y).$$

Escolhemos os parâmetros α, β, γ, δ de tal forma, que as derivadas parciais das funções $F(x, y)$ e $\Phi(x, y)$ sejam iguais ou próximas a zero na aproximação inicial, isto é, achamos α, β, γ, δ como soluções aproximadas do sistema de equações

$$\begin{cases} 1 + \alpha f'_x(x_0, y_0) + \beta\varphi'_x(x_0, y_0) = 0, \\ \alpha f'_y(x_0, y_0) + \beta\varphi'_y(x_0, y_0) = 0, \\ \gamma f'_x(x_0, y_0) + \delta\varphi'_x(x_0, y_0) = 0, \\ 1 + \gamma f'_y(x_0, y_0) + \delta\varphi'_y(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

Escolhendo desta forma os parâmetros α, β, γ, δ e partindo da suposição de que as derivadas parciais das funções $f(x, y)$ e $\varphi(x, y)$ variam não muito rapidamente num entorno da aproximação inicial (x_0, y_0), a condição (8) se cumprirá.

Exemplo 3. Reduzir o sistema de equações

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0, \\ x^3 - x = 0 \end{cases}$$

à forma (7), se a aproximação inicial da raiz é $x_0 = 0{,}8$; $y_0 = 0{,}55$.

Solução. Temos $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, $\varphi(x, y) = x^3 - y$;

$$f'_x(x_0, y_0) = 1{,}6; \quad f'_y(x_0, y_0) = 1{,}1; \quad \varphi'_x(x_0, y_0) = 1{,}92; \quad \varphi'_y(x_0, y_0) = -1.$$

Escrevemos o sistema, equivalente ao de partida,

$$\begin{cases} \alpha(x^2 + y^2 - 1) + \beta(x^3 - y) = 0, \\ \gamma(x^2 + y^2 - 1) + \delta(x^3 - y) = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{vmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{vmatrix} \neq 0\right)$$

na forma

$$x = x + \alpha(x^2 + y^2 - 1) + \beta(x^3 - y),$$
$$y = y + \gamma(x^2 + y^2 - 1) + \delta(x^3 - y).$$

Escolhemos em qualidade de valores numéricos convenientes de α, β, γ, δ a solução do sistema de equações

$$\begin{cases} 1 + 1{,}6\alpha + 1{,}92\beta = 0, \\ 1{,}1\alpha - \beta = 0, \\ 1{,}6\gamma + 1{,}92\delta = 0, \\ 1 + 1{,}1\gamma - \delta = 0, \end{cases}$$

isto é, supomos $\alpha \approx -0{,}3$, $\beta \approx -0{,}3$, $\gamma \approx -0{,}5$, $\delta \approx 0{,}4$.

Neste caso, o sistema de equações

$$\begin{cases} x = x - 0{,}3(x^2 + y^2 - 1) - 0{,}3(x^3 - y), \\ y = y - 0{,}5(x^2 + y^2 - 1) + 0{,}4(x^3 - y), \end{cases}$$

equivalente ao de partida, tem a forma (7) e num entorno suficientemente pequeno do ponto $(x_0; y_0)$ será válida a condição (8).

Separar, pelo método de provas, as raízes reais das seguintes equações e através da regra das partes proporcionais, calculá-las com aproximação de até 0,01.

3138. $x^3 - x + 1 = 0.$ **3139.** $x^4 + 0{,}5x - 1{,}55 = 0.$

3140. $x^2 - 4x - 1 = 0.$

Partindo das aproximações iniciais obtidas graficamente, calcular pelo método de Newton, com precisão de até 0,01, as raízes reais das equações:

3141. $x^3 - 2x - 5 = 0.$ **3142.** $2x - \ln x - 4 = 0.$

3143. $2^x = 4x.$ **3144.** $\lg x = \frac{1}{x}.$

Utilizando as aproximações iniciais, encontradas graficamente, calcular pelo método de iteração, com precisão de até 0,01, as raízes reais das equações:

3145. $x^3 - 5x + 0{,}1 = 0.$ **3146.** $4x = \cos x.$

3147. $x^5 - x - 2 = 0.$

Achar graficamente as aproximações iniciais e calcular, com precisão de até 0,01, as raízes reais das seguintes equações e sistemas:

3148. $x^3 - 3x + 1 = 0.$ **3149.** $x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0.$

3150. $x^4 + x^2 - 2x - 2 = 0$ **3151.** $x \cdot \ln x - 14 = 0.$

3152. $x^3 + 3x - 0{,}5 = 0.$ **3153.** $4x - 7 \operatorname{sen} x = 0.$

3154. $x^x + 2x - 6 = 0.$ **3155.** $e^x + e^{-3x} - 4 = 0.$

3156. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0, \\ x^3 - y = 0. \end{cases}$ **3157.** $\begin{cases} x^2 + y - 4 = 0, \\ y - \lg x - 1 = 0. \end{cases}$

3158. Calcular com precisão de até 0,001 a raiz positiva mínima da equação $\operatorname{tg} x = x$.

3159. Calcular com precisão de até 0,0001 a raiz da equação $x \cdot \operatorname{tgh} x = 1$.

§ 4. Integração numérica das funções

1°. Fórmula dos trapézios. Para calcular aproximadamente a integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

($f(x)$ é uma função contínua em $[a, b]$), divide-se o segmento de integração $[a, b]$ em n partes iguais e escolhe-se o *intervalo de cálculo* $h = \frac{b-a}{n}$. Vamos supor que $x_i = x_0 + ih$ ($x_0 = a$, $x_n = b$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$) são as abscissas dos pontos de divi-

são e que $y_i = f(x_i)$ são os valores correspondentes da função subintegral $y = f(x)$. Então, pela fórmula dos trapézios, temos

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right) \quad (1)$$

com um erro absoluto de

$$R_n \leqslant \frac{h^2}{12}(b - a) \cdot M_2,$$

onde $M_2 = \text{máx} \mid f''(x) \mid$ quando $a \leqslant x \leqslant b$.

Para conseguir a exatidão dada ε, ao calcular a integral, determina-se o intervalo do cálculo h, partindo-se da desigualdade

$$h^2 \leqslant \frac{12\varepsilon}{(b - a) M_2}, \quad (2)$$

isto é, h deve ser da ordem $\sqrt{\varepsilon}$. O valor de h asim obtido é arredondado para o lado menor, de forma que

$$\frac{b - a}{h} = n$$

seja um número inteiro que nos dê o número de divisões n. Depois de determinar h e n pela fórmula (1), calcula-se a integral, tomando os valores da função subintegral com uma ou duas cifras decimais de reserva.

2°. Fórmula de Simpson (fórmula parabólica). Se n é um número par, então nas anotações 1° é válida a *fórmula de Simpson*:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}[(y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2})] \quad (3)$$

com um erro absoluto de

$$R_n \leqslant \frac{h^4}{180}(b - a)M_4, \quad (4)$$

onde $M_4 = \text{máx} \mid f^{\text{IV}}(x) \mid$ quando $a \leqslant x \leqslant b$.

Para assegurar a exatidão dada ε, ao calcular a integral, o intervalo de cálculo h é determinado partindo-se da desigualdade

$$\frac{h^4}{180}(b - a)M_4 \leqslant \varepsilon, \quad (5)$$

isto é, o intervalo h terá a ordem $\sqrt[4]{\varepsilon}$. O número h é arrendondado para o l ado menor de forma que $n = \dfrac{b - a}{h}$ seja um número inteiro par.

Observação. Como não é fácil a determinação do intervalo de cálculo h e do número n a ele relacionado, por meio das desigualdades (2) e (5), na prática, em geral, h é determinado aproximadamente. Depois de obtido o resultado, duplica-se o número n, isto é, divide-se por dois o intervalo h. Se o novo resultado coincide com o anterior, dentro das cifras decimais mantidas, então o cálculo termina. Em caso contrário, repete-se o método e assim sucessivamente.

Para calcular aproximadamente o erro absoluto R da fórmula da quadratura de Simpson (3), pode-se empregar também o *princípio de Runge*, segundo o qual

$$R = \frac{|\Sigma - \bar{\Sigma}|}{15},$$

onde Σ e $\bar{\Sigma}$ são os resultados obtidos nos cálculos pela fórmula (3), para os intervalo h e $H = 2h$, respectivamente.

3160. Sob a ação de uma força variável $\bar{F}$, dirigida ao longo do eixo OX, um ponto material se desloca por este eixo desde a posição $x = 0$ até a posição $x = 4$. Calcular, aproximadamente, o trabalho A da força $\bar{F}$, se é dada a tabela dos valores de seu módulo F:

x	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
F	1,50	0,75	0,50	0,75	1,50	2,75	4,50	6,75	10,00

Efetuar os cálculos pela fórmula dos trapézios e pela de Simpson

3161. Calcular aproximadamente $\int_0^1 (3x^2 - 4x)dx$ pela fórmula dos trapézios, tomando-se $n = 10$. Calcular esta integral com exatidão e achar os erros absoluto e relativo do resultado. Determinar o limite superior de Δ do erro absoluto do cálculo efetuado para $n = 10$ aplicando a fórmula do erro que se dá no texto.

3162. Calcular $\int_0^1 \frac{x\,dx}{x+1}$, pela fórmula de Simpson, com exatidão de até 10^{-4}, tomando-se $n = 10$. Determinar o limite superior de Δ do erro absoluto, aplicando a fórmula do erro dada no texto.

Calcular com precisão de até 0,01 as seguintes integrais definidas:

3163. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$. **3164.** $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. **1365.** $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$.

3166. $\int_1^2 x \lg x\, dx$. **3167.** $\int_1^2 \frac{\lg x}{x} dx$. **3168.** $\int_0^2 \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$.

3169. $\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$. **3170.** $\int_1^2 \frac{\cos x}{x} dx$. **3171.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x} dx$.

3172. $\int_0^1 e^{-x^2 dx}$.

3173. Calcular com precisão de até 0,01 a integral imprópria $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$, usando a substituição $x = \frac{1}{t}$. Verificar o cálculo, aplicando a fórmula de Simpson para a integral $\int_1^{b} \frac{dx}{1+x^2}$, onde b é escolhido de forma que $\int_b^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$.

3174. A figura plana limitada por uma semionda da sinusóide $y = \operatorname{sen} x$ e o eixo OX gira em torno deste eixo. Calcular pela fórmula de Simpson, com precisão de até 0,01, o volume do corpo de revolução que se forma.

3175*. Calcular pela fórmula de Simpson, com precisão de até 0,01, o comprimento do arco da elipse $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{(0{,}6222)^2} = 1$, situada no primeiro quadrante coordenado.

§ 5. Integração numérica de equações diferenciais ordinárias

1°. Método das aproximações sucessivas (método de Picard). Vamos supor que é dada a equação diferencial de 1ª ordem

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

com a condição inicial $y = y_0$, quando $x = x_0$.

A solução $y(x)$ da equação (1) que satisfaz a condição inicial dada, pode ser expressa, no geral, na forma

$$y(x) = \lim_{i \to \infty} y_i(x), \tag{2}$$

onde as *aproximações sucessivas* de $y_i(x)$ são determinadas pelas fórmulas

$$y_0(x) = y_0,$$

$$y_i(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{i-1}(x))\, dx$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Se o segundo membro $f(x, y)$ é uma função determinada e contínua no entorno

$$R\{|x - x_0| \leqslant a, \quad |y - y_0| \leqslant b\}$$

e satisfaz neste entorno a *condição de Lipschitz*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant L |y_1 - y_2|$$

(L é uma constante), o processo das aproximações sucessivas (2) é certo que convergerá no intervalo $|x - x_0| \leqslant h$,

onde

$$h = \min_R \left(a, \frac{b}{M}\right)$$

$$M = \max_R |f(x, y)|.$$

Com isto, o erro

$$R_n = |y(x) - y_n(x)| \leqslant ML^n \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!},$$

somente se

$$|x - x_0| \leqslant h.$$

O método das aproximações sucessivas *(método de Picard)*, pode ser também aplicado, com pequenas modificações, aos sistemas normais de equações diferenciais. Quanto às equações diferenciais de ordens superiores, estas podem ser escritas em forma de sistemas de equações diferenciais.

2°. Método de Runge-Kutta. Vamos supor que no segmento dado $x_0 \leqslant x \leqslant X$ seja necessário achar a solução $y(x)$ do problema (1) com uma precisão dada ε.

Para tanto, inicialmente, escolhemos $h = \frac{X - x_0}{n}$ *(intervalo de cálculo)*, dividindo o segmento $[x_0, X]$ em n partes iguais, de forma que $h^4 < \varepsilon$. Os pontos de divisão x_i são determinados pela fórmula

$$x_i = x_0 + ih \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Os valores correspondentes de $y_i = y(x_i)$ da função procurada, segundo o *método de Runge-Kutta*, são calculados sucessivamente pelas fórmulas

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i,$$

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}),$$

onde

$$i = 0, 1, 2, \dots, n$$

e

$$\begin{aligned} k_1^{(i)} &= f(x_i, y_i)\, h, \\ k_2^{(i)} &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, \ y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right) h, \\ k_3^{(i)} &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, \ y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right) h, \qquad (3) \\ k_4^{(i)} &= f(x_i + h, \ y_i + k_3^{(i)})\, h. \end{aligned}$$

O método de Runge-Kutta tem uma ordem de exatidão de h^4. Podemos obter uma avaliação aproximada do erro do método de Runge-Kutta no segmento dado $[x_0, X]$, partindo do princípio de Runge:

$$R = \frac{|y_{2m} - \tilde{y}_m|}{15},$$

onde $n = 2m$, y_{2m} e $\tilde{y}_m$ são os resultados dos cálculos efetuados pelo esquema (3) com intervalos h e $2h$.

O método de Runge-Kutta pode ser também empregado para resolver sistemas de equações diferenciais

$$y' = f(x, y, z), \quad z' = \varphi(x, y, z) \tag{4}$$

com condições iniciais dadas: $y = y_0$, $z = z_0$, quando $x = x_0$.

3°. Método de Milne. Para a resolução do problema (1) pelo método de Milne, partindo dos dados iniciais $y = y_0$ para $x = x_0$, achamos por um procedimento qualquer os valores sucessivos

$$y_1 = y(x_1), \quad y_2 = y(x_2), \quad y_3 = y(x_3)$$

da função procurada $y(x)$ (por ex., pode-se empregar o desenvolvimento da solução $y(x)$ em série (cap. IX, § 16) ou achar estes valores pelo método das aproximações sucessivas, ou empregando o de Runge-Kutta, etc). As aproximações y_i e $\bar{\bar{y}}_i (i = 4, 5, \ldots, n)$ são encontradas sucessivamente pelas fórmulas:

$$\left.\begin{aligned} \bar{y}_i &= y_{i-4} + \frac{4h}{3}(2f_{i-3} - f_{i-2} + 2f_{i-1}), \\ \bar{\bar{y}}_i &= y_{i-2} + \frac{h}{3}(f_i + 4f_{i-1} + f_{i-2}), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

onde

$$f_i = f(x_i, y_i) \quad \text{e} \quad f_i = (x_i, \bar{y}_i).$$

Para controle, calculamos a grandeza

$$\varepsilon_i = \frac{1}{29}\,|\bar{y}_i - \bar{\bar{y}}_i|. \tag{6}$$

Se ε_i não é superior a uma unidade da última ordem decimal 10^{-m} que se conserva na resposta para $y(x)$, na qualidade de y_i tomamos $\bar{y}_i$ e passamos a calcular o valor seguinte y_{i+1}, repetindo, para tanto, o processo indicado. Se, ao contrário, $\varepsilon_i > 10^{-m}$, é necessário começar de novo, diminuindo o intervalo de cálculo. A grandeza do intervalo inicial é determinada aproximadamente da desigualdade $h^4 < 10^{-m}$.

Para o caso de solução do sistema (4), as fórmulas de Milne são escritas em separado para as funções $y(x)$ e $z(x)$. Mantém-se a mesma ordem de cálculo.

Exemplo 1. Dada a equação diferencial $y' = y - x$, com a condição inicial $y(0) = 1{,}5$. Calcular com precisão de até 0,01 o valor da solução desta equação para o valor do argumento $x = 1{,}5$. Fazer os cálculos combinando os métodos de Runge-Kutta e Milne.

Solução. Escolhemos o intervalo inicial do cálculo h, partindo da condição de que $h^4 < 0{,}01$. Para evitar uma anotação complexa de h, tomamos $h = 0{,}25$. Neste caso, todo o intervalo de integração, desde $x=0$ até $x = 1{,}5$, se divide em seis partes iguais de 0,25 de comprimento, por meio dos pontos x_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$); os valores correspondentes da solução de y e da derivada y' são designados por y_i e y'_i.

Os três primeiros valores de y (excluindo o inicial) são calculados pelo método de Runge-Kutta (pela fórmula (3)); os outros três valores; y_4, y_5 e y_6, pelo método de Milne (pela fórmula (5)).

O valor y_6 será, evidentemente, a resposta do problema.

Efetuamos o cálculo com duas cifras de reserva por um esquema determinado que compreende duas tabelas, 1 e 2. No final da tabela 2 obtemos a resposta.

Cálculo do valor de y_1. Temos

$$f(x, y) = -x + y, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1{,}5, \quad h = 0{,}25.$$

Assim,

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}\left(k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}(0,3750 + 2 \cdot 0,3906 + 2 \cdot 0,3926 + 0,4106) = 0,3920;$$

$$k_1^{(0)} = f(x_0, y_0)\,h = (-0 + 1,5000)\,0,25 = 0,3750;$$

$$k_2^{(0)} = f\left(x_0 + \frac{h}{2},\; y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}\right) h = (-0,125 + 1,5000 + 0,1875)\,0,25 = 0,3906;$$

$$k_3^{(0)} = f\left(x_0 + \frac{h}{2},\; y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}\right) h = (-0,125 + 1,5000 + 0,1953)\,0,25 = 0,3926;$$

$$k_4^{(0)} = f(x_0 + h,\; y_0 + k_3^{(0)})\,h = (-0,25 + 1,5000 + 0,3926)\,0,25 = 0,4106;$$

$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1,5000 + 0,3920 = 1,8920$ (as primeiras três cifras deste número aproximado são garantidas).

Da mesma forma são calculados os valores de y_2 e y_3. Os resultados são apresentados na tabela 1.

Tabela 1. **Cálculo de y_1, y_2 e y_3 pelo método de Runge-Kutta.**

$$f(x, y) = -x + y; \quad h = 0,25$$

Valor de i	x_i	y_i	$y'_i \equiv f(x_i, y_i)$	$k_1^{(i)}$	$f\left(x_i + \frac{h}{2},\; y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right)$	$k_2^{(i)}$
0	0	1,5000	1,5000	0,3750	1,5625	0,3906
1	0,25	1,8920	1,6420	0,4105	1,7223	0,4306
2	0,50	2,3243	1,8243	0,4561	1,9273	0,4818
3	0,75	2,8084	2,0584	0,5146	2,1907	0,5477

Valor de i	$f\left(x_i + \frac{h}{2},\; y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right)$	$k_3^{(i)}$	$f(x_i + h,\; y_i + k_3^{(i)})$	$k_4^{(i)}$	Δy_i	y_{i+1}
0	1,5703	0,3926	1,6426	0,4106	0,3920	1,8920
1	1,7323	0,4331	1,8251	0,4562	0,4323	2,3243
2	1,9402	0,4850	2,0593	0,5148	0,4841	2,8084
3	2,2073	0,5518	2,3602	0,5900	0,5506	3,3590

Cálculo do valor de y_4. Temos $f(x, y) = -x + y$, $h = 0,25$, $x_4 = 1$;

$$y_0 = 1,5000, \quad y_1 = 1,8920, \quad y_2 = 2,3243, \quad y_3 = 2,8084,$$

$$y'_0 = 1,5000, \quad y'_1 = 1,6420, \quad y'_2 = 1,8243, \quad y'_3 = 2,0584.$$

Aplicando a fórmula (5), achamos:

$$\bar{y}_4 = y_0 + \frac{4h}{3}(2y'_1 - y'_2 + 2y'_3) =$$

$$= 1,5000 + \frac{4 \cdot 0,25}{3}(2 \cdot 1,6420 - 1,8243 + 2 \cdot 2,0584) = 3,3588;$$

$$\bar{y}'_4 = f(x_4, \bar{y}_4) = -1 + 3,3588 = 2,3588;$$

$$\bar{\bar{y}}_4 = y_2 + \frac{h}{3}(\bar{y}'_4 + 4y'_3 + y'_2) =$$

$$= 2,3243 + \frac{0,25}{3}(2,3588 + 4 \cdot 2,0584 + 1,8243) = 3,3590;$$

$$\varepsilon_4 = \frac{|\bar{y}_4 - \bar{\bar{y}}_4|}{29} = \frac{|3,3588 - 3,3590|}{29} = \frac{0,0002}{29} \approx 7 \cdot 10^{-6} < \frac{1}{2} \cdot 0,001;$$

portanto, não é necessário revisar o intervalo de cálculo.

Obtemos $y_4 = \bar{\bar{y}}_4 = 3,3590$ (as primeiras três cifras desta aproximação são garantidas).

Analogamente, efetuamos o cálculo dos valores de y_5 e y_6. Os resultados são incluídos na tabela 2.

Assim, finalmente, temos:

$$y(1,5) = 4,74.$$

4°. Método de Adams. Para a resolução do problema (1) pelo método de Adams, partindo de dados iniciais $y(x_0) = y_0$, achamos por um procedimento qualquer os seguintes três valores da função procurada $y(x)$:

$$y_1 = y(x_1) = y(x_0 + h), \quad y_2 = y(x_2) = y(x_0 + 2h), \quad y_3 = y(x_3) = y(x_0 + 3h)$$

(estes três valores podem ser obtidos, por ex., por meio do desenvolvimento de $y(x)$ em série de potências (cap. IX, § 16), ou achando-os pelo método das aproximações sucessivas (ponto 1°) ou empregando o método de Runge-Kutta (ponto 2°), etc).

Através dos números x_0, x_1, x_2, x_3 e y_0, y_1, y_2, y_3, calculamos as grandezas q_0, q_1, q_2, q_3, onde

$$q_0 = hy'_0 = hf(x_0, y_0), \quad q_1 = hy'_1 = hf(x_1, y_1),$$
$$q_2 = hy'_2 = hf(x_2, y_2), \quad q_3 = hy'_3 = hf(x_3, y_3).$$

Compomos, a seguir, a *tabela horizontal* das diferenças finitas da grandeza q:

x	y	$\Delta y = y_{n+1} - y_n$	$y' = f(x, y)$	$q = y'h$	$\Delta q = q_{n+1} - q_n$	$\Delta^2 q = \Delta q_{n+1} - \Delta q_n$	$\Delta^3 q = \Delta^2 q_{n+1} - \Delta^2 q_n$
x_0	y_0	Δy_0	$f(x_0, y_0)$	q_0	Δq_0	$\Delta^2 q_0$	$\Delta^3 q_0$
x_1	y_1	Δy_1	$f(x_1, y_1)$	q_1	Δq_1	$\Delta^2 q_1$	$\Delta^3 q_1$
x_2	y_2	Δy_2	$f(x_2, y_2)$	q_2	Δq_2	$\Delta^2 q_2$	$\Delta^3 q_2$
x_3	y_3	Δy_3	$f(x_3, y_3)$	q_3	Δq_3	$\Delta^2 q_3$	
x_4	y_4	Δy_4	$f(x_4, y_4)$	q_4	Δq_4		
x_5	y_5	Δy_5	$f(x_5, y_5)$	q_5			
x_6	y_6						

O método de Adams consiste em continuar a tabela horizontal de diferenças, através da *fórmula de Adams*

$$\Delta y_n = q_n + \frac{1}{2}\Delta q_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{n-3}. \quad (7)$$

Tabela 2. **Cálculo de y_4, y_5, y_6 pelo método de Milne.** $f(x, y) = -x + y$; $h = 0,25$

(Os dados iniciais são em cursivo)

Valor de i	x_i	y_i	$y_i = f(x_i, y_i)$	$\overline{y}_i$	$\overline{y}'_i = f(x_i, \overline{y}_i)$	$\overline{\overline{y}}_i$	ε_i	y_i	$y'_i = f(x_i, y_i)$	Revisão do intervalo de cálculo (seguindo as indicações da fórmula (6)
0	*0*	*1,5000*	*1,5000*							
1	*0,25*	*1,8920*	*1,6420*							
2	*0,50*	*2,3243*	*1,8243*							
3	*0,75*	*2,8084*	*2,0584*							
4	1,00			3,3588	2,3588	3,3590	$\approx 7 \cdot 10^{-5}$	3,3590	2,3590	não é necessário
5	1,25			3,9947	2,7447	3,9950	$\approx 10^{-5}$	3,9950	2,7450	não é necessário
6	1,50			4,7402	3,2402	4,7406	$\approx 1,4 \cdot 10^{-5}$	4 · 7406		não é necessário
							Resposta:	$y(1,5) = 4,74$		

Assim, utilizando os números q_3, Δq_2, $\Delta^2 q_1$, $\Delta^3 q_0$, situados diagonalmente na tabela de diferenças, através da fórmula (7) e nela fazendo $n = 3$, calculamos $\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2}\Delta q_2 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_1 + \frac{3}{8}\Delta^3 q_0$. Achando o valor Δy_3, calculamos $y_4 = y_3 + \Delta y_3$. Conhecendo x_4 e y_4, calculamos $q_4 = hf(x_4, y_4)$, incluimos y_4, Δy_3 e q_4 na tabela diferenças e a completamos depois com as diferenças finitas Δq_3, $\Delta^2 q_2$, $\Delta^3 q_1$, situadas junto com q_4 em uma nova diagonal paralela à anterior.

Depois, empregando os números desta nova diagonal, através da fórmula (7) e nela fazendo $n = 4$, calculamos Δy_4, y_5 e q_5 e obtemos a diagonal seguinte: q_5, Δq_4, $\Delta^2 q_3$, $\Delta^3 q_2$. Com a ajuda desta diagonal calculamos o valor de y_6 da solucão $y(x)$ procurada e assim sucessivamente.

Para calcular Δy, a fórmula de Adams (7) parte de suposição de que as teréeiras diferenças finitas $\Delta^3 q$ são constantes. Em correspondência, a grandeza h do intervalo inicial do cálculo é determinada da desigualdade $h^4 < 10^{-m}$ (se deseja-se obter o valor de $y(x)$ com precisão de até 10).

Neste sentido, a fórmula de Adams (7) é equivalente às fórmulas de Milne (5) e de Runge-Kutta (3).

A avaliação do erro para o método de Adams é complexa e praticamente inútil já que, em geral, fornece resultados exagerados. Na prática, segue-se a marcha das terceiras diferenças finitas, escolhendo o intervalo h tão pequeno que as diferenças vizinhas $\Delta^3 q$ e $\Delta^3 q_{\ 1}$ se ressaltam entre si como máximo em uma ou duas unidades de ordem dada(sem contar as cifras de reserva).

Para elevar a precisão do resultado, a fórmula de Adams pode ser completada com termos que contenham as diferenças quartas e maiores que a grandeza q. Ao fazer isto, cresce o número dos primeiros valores da função y que se necessitam para comecar a preencher a tabela. Não iremos expor aqui as fórmulas de Adams para se obter precisões elevadas.

Exemplo 2. Calcular pelo método combinado de Runge-Kuta e Adams, para $x = 1{,}5$ e com precisão de até 0,01, o valor da solução da equação diferencial $y' = y - x$, com a condição inicial de que $y(0) = 1{,}5$ (ver 0 ex. 1).

Solucao. Empregamos os valores de y_1, y_2, y_3, obtidos ao resolver o problema 1. Seu cálculo é dado na tabela 1.

Os valores seguintes de y_4, y_5, y_6 são calculados pelo método de Adams (ver as tabelas 3 e 4).

Tabela 3. **Tabela principal para o cálculo de** y_4, y_5 e y_6 pelo método de Adams.

$$f(x, y) = -x + y; \quad h = 0{,}25$$

(Os dados iniciais são dados em cursivo)

Valores de i	x_i	y_i	Δy_i	$y'_i = f(x_i, y_i)$	$q_i = y'_i h$	Δq_i	$\Delta^2 q_i$	$\Delta^3 q_i$
0	*0*	*1,5000*		*1,5000*	0,3750	0,0355	0,0101	0,0029
1	*0,25*	*1,8920*		*1,6420*	0,4105	0,0456	0,0129	0,0037
2	*0,50*	*2,3243*		*1,8248*	0,4561	0,0585	0,0166	0,0047
3	*0,75*	*2,8084*	0,5504	2,0584	0,5146	0,0751	0,0213	
4	1,00	3,3588	0,6356	2,3588	2,3588	0,5897	0,0964	
5	1,25	3,9944	0,7450	2,7444	0,6861			
6	1,50	4,7394						

Resposta: 4,74

Tabela 4. **Tabela auxiliar para cálculo pelo método de Adams.**

$$\Delta y_i = q_i + \frac{1}{2}\Delta q_{i-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{i-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{i-3}$$

Valor de i	q_i	$\frac{1}{2}\Delta q_{i-1}$	$\frac{5}{12}\Delta^2 q_{i-2}$	$\frac{3}{8}\Delta^3 q_{i-3}$	Δy_i
3	0,5146	0,0293	0,0054	0,0011	0,5504
4	0,5897	0,0376	0,0069	0,0014	0,6356
5	0,6861	0,0482	0,0089	0,0018	0,7450

O valor $y_6 = 4{,}74$ será a resposta do problema.

Nos casos de resolução do sistema (4), a fórmula de Adams (7) e o esquema de cálculo exposto na tabela 3 são utilizados em separado para cada uma das funções $y(x)$ e $z(x)$.

Achar três aproximações sucessivas das soluções das equações diferenciais e dos sistemas seguintes:

3176. $y' = x^2 + y^2$; $y(0) = 0$.

3177. $y' + x + y + z$, $z' = y - z$; $y(0) = 1$, $z(0) = -2$.

3178. $y'' = -y$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Calcular aproximadamente pelo método de Runge-Kutta, supondo que o intervalo $h = 0{,}2$, as soluções das seguintes equações diferenciais e sistemas, para os intervalos indicados:

3179. $y' = y - x$; $y(0) = 1{,}5$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$.

3180. $y' = \frac{y}{x} - y^2$; $y(1) = 1$ $(1 \leqslant x \leqslant 2)$.

3181. $y' = z + 1$, $x' = y - x$; $y(0) = 1$, $z(0) = 1$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$.

Empregando o método combinado de Runge-Kutta e Milne ou de Runge-Kutta e Adams calcular, com precisão de até 0,01 os valores das soluções das equações diferenciais e sistemas dados a seguir, para os valores do argumento indicados:

3182. $y' = x + y$; $y = 1$ quando $x = 0$. Calcular y quando $x = 0{,}5$.

3183. $y' = x^2 + y$; $y = 1$ quando $x = 0$. Calcular y quando $x = 1$.

3184. $y' = 2y - 3$; $y = 1$ quando $x = 0$. Calcular y quando $x = 0{,}5$.

3185. $\begin{cases} y' = -x + 2y + z, \\ z' = x + 2y + 3z; \; y = 2, \; z = -2 \text{ quando } x = 0. \end{cases}$

Calcular y e z quando $x = 0{,}5$.

3186. $\begin{cases} y' = -3y - z, \\ z' = y - z; \; y = 2, \; z = -1 \text{ quando } x = 0. \end{cases}$

Calcular y e z quando $x = 0{,}5$.

3187. $y'' = 2 - y$; $y = 2$, $y' = -1$ quando $x = 0$.
Calcular y quando $x = 1$.

3188. $y^3y'' + 1 = 0$; $y = 1$, $y' = 0$ quando $x = 1$.
Calcular y quando $x = 1{,}5$.

3189. $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x}{2}\cos 2t = 0$; $x = 0$, $x' = 1$ quando $t = 0$.
Achar $(x\pi)$ e $x'(\pi)$.

§ 6. Cálculo aproximado dos coeficientes de Fourier

Esquema de 12 ordenadas. Sejam $y_n = f(x_n)(n = 0, 1, \ldots, 12)$ os valores da função $y = f(x)$ nos pontos equidistantes $x_n = \frac{\pi n}{6}$ do segmento $[0, 2\pi]$ e $y_0 = y_{12}$. Compomos as tabelas:

$$\begin{array}{l|ccccccc}
 & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\
 & & y_{11} & y_{10} & y_9 & y_8 & y_7 & \\
\hline
\text{Somas } (\Sigma) & u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\
\text{Diferenças } (\Delta) & & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|cccc}
 & u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\
 & u_6 & u_5 & u_4 & \\
\hline
\text{Somas} & s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\
\text{Diferenças} & t_0 & t_1 & t_2 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|ccc}
 & v_1 & v_2 & v_3 \\
 & v_5 & v_4 & \\
\hline
\text{Somas} & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\
\text{Diferenças} & \tau_1 & \tau_2 &
\end{array}$$

Os coeficientes de Fourier a_n, b_n $(n = 0, 1, 2, 3)$ da função $y = f(x)$ podem ser. achados aproximadamente pelas fórmulas:

$$\begin{aligned}
6a_0 &= s_0 + s_1 + s_2 + s_3, & 6b_1 &= 0{,}5\sigma_1 + 0{,}866\,\sigma_2 + \sigma_3, \\
6a_1 &= t_0 + 0{,}866\,t_1 + 0{,}5\,t_2, & 6b_2 &= 0{,}866\,(\tau_1 + \tau_2), \\
6a_2 &= s_0 - s_3 + 0{,}5(s_1 - s_2), & 6b_3 &= \sigma_1 - \sigma_3, \qquad (1) \\
6a_3 &= t_0 - t_2, & &
\end{aligned}$$

onde $0{,}866 = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{30}$.

Temos:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{3} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx).$$

Empregam-se também outros esquemas. Para facilitar o cálculo usam-se *modelos*

Exemplo. Achar o polinômio de Fourier para a função $y = f(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$, dada pela tabela

y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}
38	38	12	4	14	4	−18	−23	−27	−24	8	32

Solução. Compomos as tabelas

y	38	38	12	4	14	4	−18
		32	8	−24	−27	−23	
u	38	70	20	−20	−13	−19	−18
v		6	4	28	41	27	

u	38	70	20	−20
	−18	−19	−13	
s	20	51	7	−20
t	56	89	33	

v	6	4	28
	27	41	
σ	33	45	28
τ	−21	−37	

Pelas fórmulas (1) temos:

$a_0 = 9{,}7$; $a_1 = 24{,}9$; $a_2 = 10{,}3$ $a_3 = 3{,}8$;
$b_1 = 13{,}9$; $b_2 = -8{,}4$; $b_3 = 0{,}8$.

Portanto,

$$(x) \approx 4{,}8 + (24{,}9 \cos x + 13{,}9 \operatorname{sen} x) + (10{,}3 \cos 2x - 8{,}4 \operatorname{sen} 2x) + (3{,}8 \cos 3x + 0{,}8 \operatorname{sen} 3x).$$

Empregando o esquema de 12 ordenadas, achar os polinômios de Fourier para as seguintes funções dadas no segmento $[0, 2\pi]$ pelas tabelas de seus valores, correspondentes aos valores equidistantes do argumento ($y_0 = y_{12}$):

3190. $y_0 = -7200$ $y_3 = 4300$ $y_6 = -7400$ $y_9 = 7600$
$y_1 = -300$ $y_4 = 0$ $y_7 = -2250$ $y_{10} = 4500$
$y_2 = 7000$ $y_5 = -5200$ $y_8 = 3850$ $y_{11} = 250$

3191. $y_0 = 0$ $y_3 = 9{,}72$ $y_6 = 7{,}42$ $y_9 = 5{,}60$
$y_1 = 6{,}68$ $y_4 = 8{,}97$ $y_7 = 6{,}81$ $y_{10} = 4{,}88$
$y_2 = 9{,}68$ $y_5 = 8{,}18$ $y_8 = 6{,}22$ $y_{11} = 3{,}67$

3192. $y_0 = 2{,}714$ $y_3 = 1{,}273$ $y_6 = 0{,}370$ $y_9 = -0{,}357$
$y_1 = 3{,}042$ $y_4 = 0{,}788$ $y_7 = 0{,}540$ $y_{10} = -0{,}437$
$y_2 = 2{,}134$ $y_5 = 0{,}495$ $y_8 = 0{,}191$ $y_{11} = 0{,}767$

3193. Calcular os primeiros coeficientes de Fourier pelo esquema de 12 ordenadas para as seguintes funções:

a) $f(x) = \frac{1}{2\pi^2}(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$,

b) $f(x) = \frac{1}{\pi^2}(x - \pi)^2$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

RESPOSTAS

Capitulo I

1. Solução. Como $a = (a - b) + b$, então $|a| \leqslant |a - b| + |b|$. Donde $|a - b| \geqslant \geqslant |a| - |b|$ e $|a - b| = |b - a| \geqslant |b| - |a|$. Portanto, $|a - b| \geqslant |a| - |b|$. Além disso, $|a - b| = |a + (-b)| \leqslant |a| + |-b| = |a| + |b|$. **3.** a) $-2 < x < 4$; b) $x < -3$, $x > 1$; c) $-1 < x < 0$; d) $x > 0$. **4.** -24; -6; 0; 0; 0; 6. **5.** 1; $1\frac{1}{4}$; $\sqrt{1 + x^2}$; $|x|^{-1}\sqrt{1 + x^2}$; $1/\sqrt{1 + x^2}$. **6.** π; $\frac{\pi}{2}$; 0; **7.** $f(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$. **8.** $f(x) = \frac{7}{6}x^2 - \frac{13}{6}x + 1$. **9.** 0,4. **10.** $\frac{1}{2}(x + |x|)$. **11.** a) $-1 \leqslant x < +\infty$; b) $-\infty < x < +\infty$. **12.** $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$, $(2, +\infty)$. **13.** a) $-\infty < x \leqslant -\sqrt{2}$, $\sqrt{2} \leqslant x < +\infty$; b) $x = 0$, $|x| \geqslant \sqrt{2}$. **14.** $-1 \leqslant x \leqslant 2$. **Solução.** Deve ser $2 + x - x^2 \geqslant 0$, ou $x^2 - x - 2 \leqslant 0$, isto é, $(x + 1)(x - 2) \leqslant 0$. Donde, ou $x + 1 \geqslant 0$, $x - 2 \leqslant 0$, isto é, $-1 \leqslant x \leqslant 2$; ou $x + 1 \leqslant 0$, $x - 2 \geqslant 0$, isto é, $x \leqslant -1$, $x \geqslant 2$, o que não é possível. Assim, $-1 \leqslant x \leqslant 2$. **15.** $-2 < x \leqslant 0$. **16.** $-\infty < x \leqslant -1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. **17.** $-2 < x < 2$. **18.** $-1 < x < 1$, $2 < x < +\infty$. **19.** $-\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 1$. **20.** $1 \leqslant x \leqslant 100$. **21.** $k\pi \leqslant x \leqslant k\pi + \frac{\pi}{2}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. **22.** $\varphi(x) = 2x^4 - 5x^2 - 10$, $\psi(x) = -3^3x + 6x$. **23.** a) Par; b) ímpar; c) par; d) ímpar; e) ímpar. **24. Indicação.** Emprega-se a identidade $f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$. **26.** a) Periódica, $T = \frac{2}{3}\pi$; b) periódica, $T = \frac{2\pi}{\lambda}$; c) periódica, $T = \pi$; d) periódica, $t = \pi$; e) aperiódica. **27.** $y = \frac{b}{c}x$, se $0 \leqslant x \leqslant c$; $y = b$, se $c < x \leqslant a$; $S = \frac{b}{2c}x^2$, se $0 \leqslant x \leqslant c$; $S = bx - \frac{bc}{2}$, se $c < x \leqslant a$. **28.** $m = q_1x$ quando $0 \leqslant x \leqslant l_1$; $m = q_1l_1 + q_2(x - l_1)$ quando $l_1 < x \leqslant l_1 + l_2$; $m = q_1l_1 + q_2l_2 + q_3(x - l_1 - l_2)$ quando $l_1 + l_2 < x \leqslant l_1 + l_2 + l_3 = l$. **29.** $\varphi(\psi(x)) = 2^{2x}$; $\psi(\varphi(x)) = 2x^2$. **30.** x. **31.** $(x + 2)^2$. **37.** $-\frac{\pi}{2}$; 0; $\frac{\pi}{4}$. **38.** a) $y = 0$ quando $x = -1$, $y > 0$ quando $x > -1$, $y < 0$ quando $x < -1$; b) $y = 0$ quando $x = -1$ e $x = 2$, $y > 0$ quando $-1 < x < 2$, $y < 0$ quando $-\infty < x < -1$ e $2 < x < +\infty$; c) $y > 0$ quando $-\infty < x < +\infty$; d) $y = 0$ quando $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$ e $x = \sqrt{3}$, $y > 0$ quando $-\sqrt{3} < x < 0$ e $\sqrt{3} < x < +\infty$, $y < 0$ quando $-\infty < x < -\sqrt{3}$ e $0 < x < \sqrt{3}$; e) $y = 0$ quando $x = 1$, $y > 0$ quando $-\infty < x < -1$ e $1 < x <$

$< +\infty$, $y < 0$ quando $0 < x < 1$. **39.** a) $x = \frac{1}{2}(y-3)\ (-\infty < y < +\infty)$; b) $x = \sqrt{y+1}$ e $x = -\sqrt{y+1}\ (-1 \leqslant y < +\infty)$; c) $x = \sqrt[3]{1-y^3}\ (-\infty < y < +\infty)$; d) $x = 2\ 10^y\ (-\infty < y < +\infty)$; e) $x = \frac{1}{3}\operatorname{tg} y \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$. **40.** $x = y$ quando $-\infty < y \leqslant 0$; $x = \sqrt{y}$ quando $0 < y < +\infty$. **41.** a) $y = u^{10}$, $u = 2x - 5$; b) $y = 2^u$, $u = \cos x$, c) $y = \lg u$, $u = \operatorname{tg} v$, $v = \frac{x}{2}$; d) $y = \operatorname{arcsen} u$, $u = 3^v$. $v = -x^2$. **42.** a) $y = \operatorname{sen}^2 x$; b) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\lg x}$; c) $y = 2(x^2 - 1)$, se $|x| \leqslant 1$ e $y = 0$, se $|x| > 1$. **43.** a) $y = -\cos x^2$, $\sqrt{\pi} \leqslant |x| \leqslant \sqrt{2\pi}$; b) $y = \lg(10 - 10^x)$, $-\infty < x < 1$; c) $y = \frac{x}{3}$ quando $-\infty < x < 0$ e $y = x$ quando $0 \leqslant x < +\infty$.

47. Indicação. Ver o apêndice VI, fig. 1. **51. Indicação.** Completando quadrados no trinômio de segundo grau, teremos $y = y_0 + a(x - x_0)^2$, onde $x_0 = -b/2a$ e $y_0 = (4ac - b^2)/4a$. Donde o gráfico procurado é a parábola $y = ax^2$, deslocada ao longo do eixo OX na grandeza x_0 e ao longo do eixo OY na grandeza y_0. **53. Indicação.** Ver o apêndice VI, fig. 2. **58. Indicação.** Ver o apêndice VI, fig. 3. **61. Indicação.** Este gráfico é a hipérbole $y = \frac{m}{x}$, deslocada ao longo do eixo OX na grandeza x_0 e ao longo do eixo OY na grandeza y_0. **62. Indicação.** Separando a parte inteira, teremos $y = \frac{2}{3} - \frac{13}{9}\Big/\left(x + \frac{2}{3}\right)$ (comparar com nº 61). **65. Indicação.** Ver o apêndice VI, fig. 4. **67. Indicação.** Ver o apêndice VI, fig. 5. **71. Indicação.** Ver o apêndice VI, fig. 6. **72. Indicação.** Ver o apêndice VI, fig. 7. **73. Indicação.** Ver o apêndice VI, fig. 8. **75. Indicação.** Ver o apêndice VI, fig. 19. **78. Indicação.** Ver o apêndice VI fig. 23. **80. Indicação.** Ver o apêndice VI, fig. 9. **81. Indicação.** Ver o apêndice VI, fig. 9. **82. Indicação.** Ver o apêndice VI, fig. 10. **83.** Ver o apêndice VI, fig. 10., **84. Indicação.** Ver o apêndice VI, fig. 11. **85. Indicação.** Ver o apêndice VI, fig. 11. **87. Indicação.** O período da função $T = 2\pi/n$. **89. Indicação.** O gráfico procurado é a sinusóide $y = 5 \operatorname{sen} 2x$, com amplitude 5 e período π, deslocada para a direita ao longo do eixo OX na grandeza $1\frac{1}{2}$. **90. Indicação.** Supondo $a = A\cos\varphi$ e $b = -A\operatorname{sen}\varphi$, teremos $y = A\operatorname{sen}(x - \varphi)$, onde $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\varphi = \operatorname{Arctg}\left(-\frac{b}{a}\right)$. Em nosso caso $A = 10$, $\varphi = 0{,}927$. **92. Indicação.** $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$. **93. Indicação.** O gráfico procurado é a soma dos gráficos $y_1 = x$ e $y_2 = \operatorname{sen} x$. **94. Indicação.** O gráfico procurado é o produto dos gráficos $y_1 = x$ e $y_2 = \operatorname{sen} x$. **99. Indicação.** A função é par. Para $x > 0$, determinamos os pontos para os quais 1) $y = 0$, 2) $y = 1$ e 3) $y = -1$. Quando $x \to +\infty$ $y \to 1$. **101. Indicação.** Ver o apêndice VI, fig. 14. **102. Indicação.** Ver o apêndice VI, fig. 15. **103. Indicação.** Ver o apêndice VI, fig. 17. **104. Indicação.** Ver o apêndice VI, fig. 17. **105. Indicação.** Ver o apêndice VI, fig. 18. **107. Indicação.** Ver o apêndice VI, fig. 16. **118. Indicação.** Ver o apêndice VI, fig. 12. **119. Indicação.** Ver o apêndice VI, fig. 12. **120. Indicação.** Ver o apêndice VI, fig. 13. **121. Indicação.** Ver o apêndice VI, fig. 13. **132. Indicação.** Ver o apêndice VI, fig. 30. **133. Indicação.** Ver o apêndice VI, fig. 32. **134. Indicação.** Ver o apêndice VI, fig. 31. **138. Indicação.** Ver o apêndice VI, fig. 33. **139. Indicação.** Ver o apêndice VI, fig. 28. **140. Indicação.** Ver o apêndice VI, fig. 25. **141. Indicação.** Formamos a tabela dos valores

t	0	1	2	3	...	-1	-2	-3
x	0	1	8	27	...	-1	-8	-27
y	0	1	4	9	...	1	4	9

Construindo os pontos (x, y) obtidos, temos como resultado a curva procurada (ver o apêndice VI, fig. 8a). (O parâmetro t com isto não é marcado geometricamente). **142.** Ver o apêndice VI, fig. 19. **143.** Ver o apêndice VI, fig. 27 **144.** Ver o apêndice VI, fig. 29. **145.** Ver o apêndice VI, fig. 22. **150.** Ver o apêndice VI, fig. 28. **151. Indicação.** Resolvendo a equação em relação a y, obtemos $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. Depois disto é fácil construir a curva procurada por pontos. **153.** Ver o apêndice VI, fig. 21. **156.** Ver o apêndice VI, fig. 27. Basta construir os pontos (x, y), correspondentes às abscissas $x = 0, \pm\frac{a}{2}, \pm a$. **157. Indicação.** Resolvendo a equação em relação a x, teremos $x = 10 \lg y - y(^*)$. Daí obtemos os pontos (x, y) da curva procurada, dando à ordenada y valores arbitrários ($y > 0$) e calculando pela fórmula $(^*)$ a abscissa x. Deve-se ter em conta que $\lg y \to -\infty$ quando $y \to 0$. **159. Indicação.** Passando às coordenadas polares $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$, teremos $r = e^{\varphi}$ (ver o apêndice VI, fig. 32). **160. Indicação.** Passando às coordenadas polares $x = r\cos\varphi$ e $y = r \operatorname{sen}\varphi$, teremos $r = \frac{3 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi}{\cos^3\varphi + \operatorname{sen}^3\varphi}$ (ver o apêndice VI, fig. 22). **161.** $F = 32 + 1{,}8C$. **162.** $y = 0{,}6x(10 - x)$; $y_{\text{máx}} = 15$ quando $x = 5$. **163.** $y = \frac{ab}{2}\operatorname{sen} x$; $y_{\text{máx}} = \frac{ab}{2}$ quando $x = \frac{\pi}{2}$. **164.** a) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$; b) $x = 0{,}68$; c) $x_1 = 1{,}37$, $x_2 = 10$; d) $x = 0{,}40$; e) $x = 1{,}50$; f) $x = 0{,}86$. **165.** a) $x_1 = 2$, $y_1 = 5$; $x_2 = 5$, $y_2 = 2$; b) $x_1 = -3$, $y_1 = -2$; $x_2 = -2$, $y_2 = -3$; $x_3 = 2$, $y_3 = 3$; $x_4 = 3$, $y_4 = 2$; c) $x_1 = 2$, $y_1 = 2$; $x_2 \approx 3{,}1$, $y_2 \approx -2{,}5$; d) $x_1 \approx -3{,}6$, $y_1 \approx -3{,}1$; $x_2 \approx -2{,}7$, $y_2 \approx 2{,}9$; $x_3 \approx 2{,}9$, $y_3 \approx 1{,}8$; $x_4 \approx 3{,}4$, $y_4 \approx -1{,}6$; e) $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x_2 = \frac{5\pi}{4}$, $y_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. **166.** $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. a) $n > 4$; b) $n > 10$; c) $n > 32$. **167.** $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = N$. a) $N = 9$; b) $N = 99$; c) $N = 999$. **168.** $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ $(\varepsilon < 1)$, a) 0,02; b) 0,002; c) 0,0002. **169.** a) $\lg x < -N$ quando $0 < x < \delta(N)$; b) $2^x > N$ quando $x > X(N)$; c) $|f(x)| > N$ quando $|x| > X(N)$. **170.** a) 0; b) 1; c) 2; d) $\frac{7}{30}$. **171.** $\frac{1}{2}$. **172.** 1. **173.** $-\frac{3}{2}$. **174.** 1. **175.** 3. **176.** 1. **177.** $\frac{3}{4}$. **178.** $\frac{1}{3}$. **Indicação.** Usar a fórmula $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$. **179.** 0. **180.** 0. **181.** 1. **182.** 0. **183.** ∞. **184.** 0. **185.** 72. **186.** 2. **187.** 2. **188.** ∞. **189.** 0. **190.** 1. **191.** 0. **192.** ∞. **193.** -2. **194.** ∞. **195.** $\frac{1}{2}$. **196.** $\frac{a-1}{3a^2}$. **197.** $3x^2$. **198.** -1. **199.** $\frac{1}{2}$. **200.** 3. **201.** $\frac{4}{3}$. **202.** $\frac{1}{9}$. **203.** $-\frac{1}{56}$. **204.** 12. **205.** $\frac{3}{2}$. **206.** $-\frac{1}{3}$.

207. 1. **208.** $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ **209.** $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. **210.** $-\frac{1}{3}$. **211.** 0. **212.** $\frac{a}{2}$. **213.** $-\frac{5}{2}$. **214.** $\frac{1}{2}$. **215.** 0. **216.** a) $\frac{1}{2}$ sen 2; b) 0. **217.** 3. **218.** $\frac{5}{2}$. **219.** $\frac{1}{3}$. **220.** π. **221.** $\frac{1}{2}$. **222.** cos a. **223.** $-$ sen a. **224.** π. **225.** cos x. **226.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **227.** a) 0.; b) 1. **228.** $\frac{2}{\pi}$. **229.** $\frac{1}{2}$. **230.** 0. **231.** $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **232.** $\frac{1}{2}(n^2-m^2)$. **233.** $\frac{1}{2}$. **234.** 1. **235.** $\frac{2}{3}$. **236.** $\frac{2}{\pi}$. **237.** $-\frac{1}{4}$ **238.** π. **239.** $\frac{1}{4}$. **240.** 1. **241.** 1. **242.** $\frac{1}{4}$. **243.** 0. **244.** $\frac{3}{2}$. **245.** 0. **246.** e^{-1}. **247.** e^2. **248.** e^{-1}. **249.** e^{-4}. **250.** e^x. **251.** e.

252. a) 1. **Solução.** $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}[1-(1-\cos x)]^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left(1-2\,\text{sen}^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} =$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\left(1-2\,\text{sen}^2\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2\,\text{sen}^2\frac{x}{2}}}\right]^{-\frac{2\,\text{sen}^2\frac{x}{2}}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{2\,\text{sen}^2\frac{x}{2}}{x}\right)}.$$

Como $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{2\,\text{sen}^2\frac{x}{2}}{x}\right) = -2\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\frac{\text{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\frac{x^2}{4x}\right] = -2\cdot 1\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{4} = 0,$

então $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$. b) $\frac{1}{\sqrt{e}}$. **Solução.** Analogamente ao anterior (ver a)), $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{-2\,\text{sen}^2\frac{x}{2}}{x^2}\right)}$. Já que $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{-2\,\text{sen}^2\frac{x}{2}}{x^2}\right) = -$

$$-2\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\text{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\frac{x^2}{4x^2}\right] = -\frac{1}{2}, \text{ então } \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

253. ln 2. **254.** 10 lg e. **255.** 1. **257.** $-\frac{1}{2}$. **258.** 1. **Indicação.** Fazer $e^x - 1 = \alpha$, onde $\alpha \to 0$. **259.** ln a. **Indicação.** Usar a identidade $a = e^{\ln a}$. **260.** ln a. **Indicação.** Fazer $\frac{1}{n} = \alpha$, onde $\alpha \to 0$ (ver n° 259.) **261.** $a - b$. **262.** 1. **263.** a) 1; b) $\frac{1}{2}$. **264.** a) -1; b) 1. **265.** a) -1; b) 1. **266.** a) 1; b) 0. **267.** a) 0; b) 1. **268.** a) -1); b) 1. **269.** a) -1; b) 1. **270.** a) $-\infty$; b) $+\infty$. **271.** **Solução.** Se $x \neq k\pi(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, então $\cos^2 x < 1$ e $y = 0$; se $x = k\pi$, então $\cos^2 x = 1$ e $y = 1$. **272.** $y = x$ quando $0 \leqslant x < 1$; $y = \frac{1}{2}$ quando $x = 1$; $y = 0$ quando $x > 1$. **273.** $y = |x|$. **274.** $y = -\frac{\pi}{2}$ quando $x < 0$; $y = 0$ quando $x = 0$; $y = \frac{\pi}{2}$ quando $x > 0$. **275.** $y = 1$ quando

$0 \leq x \leq 1$; $y = x$ quando $1 < x < \infty$. **276.** $\frac{61}{450}$. **277.** $x_1 \to -\frac{c}{b}$; $x_2 \to \infty$.
278. π. **279.** $2\pi R$. **280.** $\frac{e}{e-1}$. **281.** $1\frac{1}{3}$. **282.** $\frac{\sqrt{e\pi}+1}{e^{\frac{\pi}{2}}-1}$. **284.** $\lim_{n\to\infty} AC_n = \frac{1}{3}$.
285. $\frac{ab}{2}$. **286.** $k = 1$, $b = 0$; a reta $y = x$ é a assíntota da curva $y = \frac{x^3+1}{x^2+1}$.
287. $Q_t^{(n)} = Q_0\left(1+\frac{kt}{n}\right)^n$, onde k é o coeficiente de proporcionalidade „regra de interesse composto"); $Q_t = Q_0 e^{kt}$. **288.** $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$; a) $|x| > 10$; b) $|x| > 100$; c) $|x| > 1000$. **289.** $|x-1| < \frac{\varepsilon}{2}$ quando $0 < \varepsilon < 1$; a) $|x-1| < 0{,}0{,}5$; b) $|x-1| < 0{,}005$; c) $|x-1| < 0{,}0005$. **290.** $|x-2| < \frac{1}{N} = \delta$; a) $\delta = 0{,}1$; b) $\delta = 0{,}01$; c) $\delta = 0{,}001$. **291.** a) Segundo; b) terceiro. $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$. **292.** 2) 1; b) 2; c) 3. **293.** a) 1; b) $\frac{1}{4}$; c) $\frac{2}{3}$; d) 2; e) 3. **295.** Não. **296.** 15. **297.** -1. **298.** -1.
299. 3. **300.** a) 1,03(1,0296); b) 0,985(0,9849); c) 3,167(3, 1623). **Indicação.** $\sqrt{10} = \sqrt{9+1} = 3\sqrt{1+\frac{1}{9}}$; d) 10,954 (10,954). **301.** 1) 0,98(0,9804); 2) 1,03(1,0309); 3) 0,0095(0,00952): 4) 3,875(3,8730); 5) 1,12(1,125); 6) 0,72(0,7480); 7) 0,043(0,04139).
303. a) 2; b) 4; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{2}{3}$. **307. Indicação.** Se $x > 0$, então quando $|\Delta x| < x$ teremos $|\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}| = |\Delta x|/(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}) \leq |\Delta x|/\sqrt{x}$. **309. Indicação.** Utilizar a desigualdade $|\cos(x+\Delta x) - \cos x| \leq |\Delta x|$. **310.** a) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, onde k é um número inteiro; b) $x \neq k\pi$, onde k é um número inteiro. **311. Indicação.** Utilizar a desigualdade $||x+\Delta x| - |x|| \leq |\Delta x|$. **313.** $A = 4$. **314.** $f(0) = 1$. **315.** Não.
316. a) $f(0) = n$; b) $f(0) = \frac{1}{2}$; c) $f(0) = 2$; d) $f(0) = 2$; e) $f(0) = 0$; f) $f(0) = 1$.
317. $x = 2$ é um ponto de descontinuidade de 2ª espécie. **318.** $x = -1$ é um ponto de descontinuidade evitável. **319.** $x = -2$ é um ponto de descontinuidade de 2ª espécie; $x = 2$ é $x = 2$ é um ponto de descontinuidade evitável. **320.** $x = 0$ é um ponto de descontinuidade de 1ª espécie. **321.** a) $x = 0$ é um ponto de descontinuidade de 2ª espécie; b) $x = 0$ é um ponto de descontinuidade evitável. **322.** $x = 0$ é um ponto de descontinuidade evitável, $x = k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$) são pontos de descontinuidade infinita. **323.** $x = 2\pi k \pm \frac{\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) são pontos de descontinuidade infinita, **324.** $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) são pontos de descontinuidade infinita. **325.** $x = 0$ é um ponto de descontinuidade de 1ª espécie. **326.** $x = -1$ é um ponto de descontinuidade evitável; $x = 1$ é um ponto de descontiuidade de 1ª espécie. **327.** $x = -1$ é um ponto de descontinuidade de 2ª espécie. **328.** $x = 0$ é um ponto de descontinuidade evitável. **329.** $x = 1$ é um ponto de descontinuidade de 1ª espécie. **330.** $x = 3$ é um ponto de descontinuidade de 1ª. espécie. **332.** $x = 1$ é un ponto de descontinuidade de 1ª espécie. **333.** A função é contínua. **334.** a) $x = 0$ é um ponto de descontinuidade de 1ª espécie; b) a função é contínua; c) $x = k\pi$ (k é um número inteiro) são pontos de descontinuidade de 1ª espécie. **335.** a) $x = k$

(k é um número inteiro) são pontos de descontinuidade de 1ª espécie; b) $x = k(k \neq 0$ é um número inteiro) são pontos de descontinuidade de 1ª espécie. **337.** Não, porque a função $y = E(x)$ é descontínua quando $x = 1$. **338.** 1,53. **339. Indicação.** Demonstrar que quando x_0 é suficientemente grande, temos $P(-x_0)\ P(x_0) < 0$.

Capítulo II

341. a) 3; b) 0,21; c) $2h + h^2$. **342.** a) 0,1; b) -3; c) $\sqrt[3]{a+h} - \sqrt[3]{a}$. **344.** a) 624; 1 560; b) 0,01; 100; c) -1; 0,000011. **345.** a) $a\Delta x$; a; b) $3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$; $3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2$; c) $-\dfrac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{x^2(x+\Delta x)^2}$; $-\dfrac{2x + \Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2}$; d) $\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}$; $\dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$; e) $2^x(2^{\Delta x} - 1)$; $\dfrac{2^x(2^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$; f) $\ln\dfrac{x+\Delta x}{x}$ $\dfrac{1}{\Delta x}\ln\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)$.
346. a) -1; b) 0,1; c) $-h$; 0. **347.** 21. **348.** 15 cm/s. **349.** 7,5. **350.** $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.
351. $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. **352.** a) $\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$; b) $\dfrac{d\varphi}{dt} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, onde φ é a grandeza do ângulo de rotação no instante t. **353.** a) $\dfrac{\Delta T}{\Delta t}$; b) $\dfrac{dT}{dt} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta T}{\Delta t}$, onde T é a temperatura no instante t. **354.** $\dfrac{dQ}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$, onde Q é a quantidade de substância no instante t. **355.** a) $\dfrac{\Delta m}{\Delta x}$; b) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta m}{\Delta x}$. **356.** a) $-\dfrac{1}{6} \approx -0{,}16$; b) $-\dfrac{5}{21} \approx -0{,}238$; c) $-\dfrac{50}{201} \approx -0{,}249$; $y'_{x=2} = -0{,}25$. **357.** $\sec^2 x$. **Solução.**

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(x+\Delta x) - \operatorname{tg} x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x\cos x\cos(x+\Delta x)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\times$$
$$\times\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\cos x\cos(x+\Delta x)} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

358. a) $3x^2$; b) $-\dfrac{2}{x^3}$; c) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; d) $\dfrac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}$. **359.** $\dfrac{1}{12}$. **Solução.** $f'(8) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(8+\Delta x) - f(8)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+\Delta x} - \sqrt[3]{8}}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{8+\Delta x - 8}{\Delta x[\sqrt[3]{(8+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{(8+\Delta x)\,8} + \sqrt[3]{8^2}]} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(8+\Delta x)^2} + 2\sqrt[3]{8+\Delta x} + 4} =$$

$= \dfrac{1}{12}$. **360.** $f'(0) = -8$, $f'(1) = 0$, $f'(2) = 0$. **361.** $x_1 = 0$; $x_2 = 3$. **Indicação.** A equação $f'(x) = f(x)$ para a função dada tem a forma $3x^2 = x^3$. **362.** 30 m/s. **363.** 1, 2. **364.** -1. **365.** $f'(x_0) = \dfrac{-1}{x_0^2}$. **366.** -1; 2; $\operatorname{tg}\varphi = 3$. **Indicação.** Empregar os resultados do exemplo 3 e do problema 365. **367. Solução.** a) $f'(0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}} = \infty$; b) $f'(1)\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[5]{(\Delta x)^4}} = +\infty$;

c) $f'_-\left(\dfrac{2k+1}{2}\pi\right) = \lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{\left|\cos\left(\dfrac{2k+1}{2}\pi + \Delta x\right)\right|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{|\operatorname{sen}\Delta x|}{\Delta x} = -1$;

$f'_+\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{|\operatorname{sen} \Delta x|}{\Delta x} = 1$. **368.** $5x^4 - 12x^2 + 2$. **369.** $-\frac{1}{3} + 2x - 2x^3$.

370. $2ax + b$. **371.** $-\frac{15x^2}{a}$. **372.** $mat^{m-1} + b(m+n)t^{m+n-1}$. **373.** $\frac{6ax^5}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

374. $-\frac{\pi}{x^2}$. **375.** $2x^{-\frac{1}{3}} - 5x^{\frac{3}{2}} - 3x^4$. **376.** $\frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}$. **Indicação.** $y = x^2 x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{8}{3}}$.

377. $\frac{4b}{3x^2\sqrt[3]{x}} - \frac{2a}{3x\sqrt[3]{x^2}}$. **378.** $\frac{bc-ad}{(c+dx)^2}$. **379.** $\frac{-2x^2-6x+25}{(x^2-5x+5)^2}$. **380.** $\frac{1-4x}{x^2(2x-1)^2}$.

381. $\frac{1}{\sqrt{z}(1-\sqrt{z})^2}$. **382.** $5\cos x - 3\operatorname{sen} x$. **383.** $\frac{4}{\operatorname{sen}^2 2x}$. **384.** $\frac{-2}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2}$.

385. $t^2 \operatorname{sen} t$. **386.** $y' = 0$. **387.** $\operatorname{ctg} x - \frac{x}{\operatorname{sen}^2 x}$. **388.** $\operatorname{arc\,sen} x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

389. $x \operatorname{arctg} x$. **390.** $x^6e^x(x+7)$. **391.** xe^x. **392.** $e^x\frac{x-2}{x^3}$. **393.** $\frac{5x^4-x^5}{e^x}$.

394. $e^x(\cos x - \operatorname{sen} x)$. **395.** x^2e^x. **396.** $e^x\left(\operatorname{arcsen} x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$. **397.** $\frac{x(2\ln x - 1)}{\ln^2 x}$.

398. $3x^2 \ln x$. **399.** $\frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x^2} - \frac{2}{x^2}$. **400.** $\frac{2\ln x}{x\ln 10} - \frac{1}{x}$. **401.** $\operatorname{sen\,h} x + x\cos \operatorname{h} x$.

402. $\frac{2x\cos \operatorname{h} x - x^2 \operatorname{sen\,h} x}{\cos \operatorname{h}^2 x}$. **403.** $-\operatorname{tgh}^2 x$. **404.** $\frac{-3(x\ln x + \operatorname{sen\,h} x\cos \operatorname{h} x)}{x\ln^2 x \cdot \operatorname{sen\,h}^2 x}$.

405. $\frac{-2x^2}{1-x^4}$. **406.** $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{Arc\,sen\,h} x + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{arc\,sen} x$. **407.** $\frac{x-\sqrt{x^2-1}\operatorname{Arccos\,h} x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

408. $\frac{1+2x\operatorname{Arc\,tgh} x}{(1-x^2)^2}$. **410.** $\frac{3a}{c}\left(\frac{ax+b}{c}\right)^2$. **411.** $12ab + 18b^2y$. **412.** $16x(3+2x^2)^3$.

413. $\frac{x^2-1}{(2x-1)^8}$. **414.** $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$. **415.** $\frac{bx^2}{\sqrt[3]{(a+bx^3)^2}}$. **416.** $-\sqrt{\sqrt[3]{\frac{a^2}{x^2}-1}}$.

418. $\frac{1-\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x}{\cos^2 x}$. **419.** $\frac{-1}{2\operatorname{sen}^2 x\sqrt{\operatorname{ctg} x}}$. **420.** $2 - 15\cos^2 x \operatorname{sen} x$.

421. $\frac{-16\cos 2t}{\operatorname{sen}^3 2t}$. **Indicação.** $x = \operatorname{sen}^{-2} t + \cos^{-2} t$. **422.** $\frac{\operatorname{sen} x}{(1-3\cos x)^3}$. **423.** $\frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^4 x}$.

424. $\frac{3\cos x + 2\operatorname{sen} x}{2\sqrt{15\operatorname{sen} x - 10\cos x}}$. **425.** $\frac{2\cos x}{3\sqrt[3]{\operatorname{sen} x}} + \frac{3\operatorname{sen} x}{\cos^4 x}$. **426.** $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\operatorname{arcsen} x}}$.

427. $\frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} x}} - \frac{3(\operatorname{arcsen} x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$. **428.** $\frac{-1}{(1+x^2)(\operatorname{arctg} x)^2}$. **429.** $\frac{e^x + xe^x + 1}{2\sqrt{xe^x + x}}$.

430. $\frac{2e^x - 2^x\ln 2}{3\sqrt[3]{(2e^x - 2^x + 1)^2}} + \frac{5\ln^4 4}{x}$. **432.** $(2x-5)\cdot\cos(x^2-5x+1) - \frac{a}{x^2\cos^2\frac{a}{x}}$.

433. $-\alpha\operatorname{sen}(\alpha x + \beta)$. **434.** $\operatorname{sen}(2t + \varphi)$. **435.** $-2\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}$. **436.** $\frac{-1}{\operatorname{sen}^2\frac{x}{a}}$.

437. $x\cos 2x^2 \operatorname{sen} 3x^2$. **439.** $\frac{-2}{x\sqrt{x^4-1}}$. **440.** $-\frac{-1}{2\sqrt{x-x^2}}$. **441.** $\frac{-1}{1+x^2}$.

442. $\frac{-1}{1+x^2}$. **443.** $-10xe^{-x^2}$. **444.** $-2x5^{-x^2}\ln 5$. **445.** $2x\,10^{2x}(1+x\ln 10)$.

446. $\operatorname{sen} 2^t + 2^t\, t\cos 2^t \ln 2$. **447.** $\frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$. **448.** $\frac{2}{2x+7}$. **449.** $\operatorname{ctg} x \lg e$.

450. $\frac{-2x}{1-x^2}$. **451.** $\frac{2\ln x}{x} - \frac{1}{x\ln x}$. **452.** $\frac{(e^x + 5\cos x)\sqrt{1-x^2} - 4}{(e^x + 5\operatorname{sen} x - 4\arcsen x)\sqrt{1-x^2}}$.

453. $\frac{1}{(1+\ln^2 x)\,x} + \frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$. **454.** $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x + 1}} + \frac{1}{2(\sqrt{x}+x)}$.

455. **Solução.** $y' = (\operatorname{sen}^3 5x)'\cos^2\frac{x}{3} + \operatorname{sen}^3 5x\left(\operatorname{sen}^2\frac{x}{3}\right)' = 3\operatorname{sen}^2 5x\cos 5x \times$
$\times\, 5\cos^2\frac{x}{3} + \operatorname{sen}^3 5x\cdot 2\cos\frac{x}{3}\left(-\operatorname{sen}\frac{x}{3}\right)\frac{1}{3} = 15\operatorname{sen}^2 5x\cos 5x\cos^2\frac{x}{3} -$
$-\frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 5x\cos\frac{x}{3}\operatorname{sen}\frac{x}{3}$. **456.** $\frac{4x+3}{(x-2)^3}$. **457.** $\frac{x^2+4x-6}{(x-3)^5}$. **458.** $\frac{x^7}{(1-x^2)^5}$.

459. $\frac{x-1}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}$. **460.** $\frac{1}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$. **461.** $\frac{x^2}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$. **462.** $\frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}}$.

463. $x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}$. **464.** $\frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$. **465.** $4x^3(a-2x^3)(a-5x^3)$.

466. $\frac{2abmnx^{n-1}(a+bx^n)^{m-1}}{(a-bx^n)^{m+1}}$. **467.** $\frac{x^3-1}{(x+2)^6}$. **468.** $\frac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}$.

469. $\frac{3x^2+2(a+b+c)x+ab+bc+ac}{2\sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}}$. **470.** $\frac{1+2\sqrt{y}}{6\sqrt{y}\sqrt[3]{(y+\sqrt{y})^2}}$.

471. $2(7t+4)\sqrt[3]{3t+2}$. **472.** $\frac{y-a}{\sqrt{(2ay-y^2)^3}}$. **473.** $\frac{1}{\sqrt{e^x+1}}$. **474.** $\operatorname{sen}^3 x\cos^2 x$.

475. $\frac{1}{\operatorname{sen}^4 x\cos^4 x}$. **476.** $10\operatorname{tg} 5x\sec^2 5x$. **477.** $x\cos x^2$. **478.** $3t^2\operatorname{sen} 2t^3$.

479. $3\cos x\cos 2x$. **480.** $\operatorname{tg}^4 x$. **481.** $\frac{\cos 2x}{\operatorname{sen}^4 x}$. **482.** $\frac{(\alpha-\beta)\operatorname{sen} 2x}{2\sqrt{\alpha\operatorname{sen}^2 x+\beta\cos^2 x}}$. **483.** 0.

484. $\frac{1}{2}\,\frac{\arcsen x\,(2\arccos x - \arcsen x)}{\sqrt{1-x^2}}$. **485.** $\frac{2}{x\sqrt{2x^2-1}}$. **486.** $\frac{1}{1+x^2}$.

487. $\frac{x\arccos x - \sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^{3/2}}$. **488.** $\frac{1}{\sqrt{a-bx^2}}$. **489.** $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\ (a>0)$.

490. $2\sqrt{a^2-x^2}\ (a>0)$. **491** $\frac{-x}{\sqrt{2x-x^2}}$. **492.** $\arcsen\sqrt{x}$. **493.** $\frac{5}{\sqrt{1-25x^2}\arcsen 5x}$.

494. $\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$. **495.** $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$. **496.** $\frac{1}{5+4\operatorname{sen} x}$. **497.** $4x\sqrt{\frac{x}{b-x}}$.

498. $\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos^2 x}$. **499.** $\frac{a}{2}e^{\frac{ax}{2}}$. **500.** $\operatorname{sen} 2x\, e^{\operatorname{sen}^2 x}$. **501.** $2m^2p(2ma^{mx}+b)^{p-1}a^{mx}\ln a$.

502. $e^{\alpha t}(\alpha\cos\beta t - \beta\operatorname{sen}\beta t)$. **503.** $e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$. **504.** $e^{-x}\cos 3x$. **505.** $x^{n-1}a^{-x^2}(n-2x^2\ln a)$

506. $-\frac{1}{2}y\operatorname{tg} x(1+\sqrt{\cos x}\ln a)$. **507.** $\frac{3^{\operatorname{ctg}\frac{1}{x}}\ln 3}{\left(x\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)^2}$. **508.** $\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$.

509. $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$. **510.** $\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$. **511.** $\frac{1}{\sqrt{2ax+x^2}}$. **512.** $\frac{-2}{x\ln^3 x}$. **513.** $-\frac{1}{x^2}\operatorname{tg}\frac{x-1}{x}$.
514. $\frac{2x+11}{x^2-x-2}$. **Indicação.** $y=5\ln(x-2)-3\ln(x+1)$. **515.** $\frac{3x^2-16x+19}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.
516. $\frac{1}{\operatorname{sen}^3 x\cos x}$. **517.** $\sqrt{x^2-a^2}$. **518.** $\frac{-6x^2}{(3-2x^3)\ln(3-2x^3)}$. **519.** $\frac{15a\ln^2(ax+b)}{ax+b}$.
520. $\frac{2}{\sqrt{x^2+a^2}}$. **521.** $\frac{mx+n}{x^2-a^2}$. **522.** $\sqrt{2}$ sen ln x. **523.** $\frac{1}{\operatorname{sen}^3 x}$. **524.** $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.
525. $\frac{x+1}{x^3-1}$. **526.** $\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}[2^{\operatorname{arcsen}3x}\ln 2+2(1-\arccos 3x)]$. **527.** $\left(3^{\frac{\operatorname{sen}ax}{\cos bx}}\ln 3+\right.$
$\left.+\frac{\operatorname{sen}^2 ax}{\cos^2 bx}\right)\frac{a\cos ax\cos bx+b\operatorname{sen}ax\operatorname{sen}bx}{\cos^2 bx}$. **528.** $\frac{1}{1+2\operatorname{sen}x}$. **529.** $\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$.
530. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen}x}+\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$. **531.** $-\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$.
532. $\frac{x^2}{x^4+x^2-2}$. **533.** $\frac{2}{\cos x\sqrt{\operatorname{sen}x}}$. **534.** $\frac{x^2-3x}{x^4-1}$. **535.** $\frac{1}{1+x^3}$.
536. $\frac{\operatorname{arcsen}x}{(1-x^2)^{3/2}}$. **537.** $6\operatorname{sen}h^2 2x\cdot\cos h\, 2x$. **538.** $e^{\alpha x}(\alpha\cos h\,\beta x+\beta\operatorname{sen}h\,\beta x)$.
539. $6\operatorname{tg}h^2 2x(1-\operatorname{tg}h^2 2x)$. **540.** $2\operatorname{ctg}h\,2x$. **541.** $\frac{2x}{\sqrt{a^4+x^4}}$. **542.** $\frac{1}{x\sqrt{\ln^2 x-1}}$.
543. $\frac{1}{\cos 2x}$. **544.** $\frac{-1}{\operatorname{sen}x}$. **545.** $\frac{2}{1-x^2}$. **546.** x Artg h x. **547.** x Arcsen h x
548. a) $y'=1$ quando $x>0$; $y'=-1$ quando $x<0$; $y'(0)$ não existe; b) $y'=|2x|$.
549. $y'=\frac{1}{x}$. **550.** $f'(x)=\begin{cases}-1 \text{ quando } x\leqslant 0,\\ -e^{-x} \text{ quando } x>0.\end{cases}$ **552.** $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}$. **553.** 6π.
554. a) $f'_-(0)=-1$, $f'_+(0)=1$; b) $f'_-(0)=\frac{2}{a}$, $f'_+(0)=\frac{-2}{a}$; c) $f'_-(0)=1$, $f'_+(0)=0$;
d) $f'_-(0)=f'_+(0)=0$; e) $f'_-(0)$ e $f'_+(0)$ não existem. **555.** $1-x$. **556.** $2+\frac{x-3}{4}$.
557. -1. **558.** 0. **561. Solução.** Temos $y'=e^{-x}(1-x)$. Já que $e^{-x}=\frac{y}{x}$, então
$y'=\frac{y}{x}(1-x)$ ou $xy'=y(1-x)$. **566.** $(1+2x)(1+3x)+2(1+x)(1+3x)+$
$+3(x+1)(1+2x)$. **567.** $-\frac{(x+2)(5x^2+19x+20)}{(x+1)^4(x+3)^5}$. **568.** $\frac{x^2-4x+2}{2\sqrt{x(x-1)(x-2)^3}}$.
569. $\frac{3x^2+5}{3(x^2+1)}\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}$. **570.** $\frac{(x-2)^8(x^2-7x+1)}{(x-1)(x-3)\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$.
571. $-\frac{5x^2+x-24}{3(x-1)^{1/2}(x+2)^{5/3}(x+3)^{5/2}}$. **572.** $x^x(1+\ln x)$. **573.** $x^{x^2+1}(1+2\ln x)$.
574. $\sqrt[x]{x}\,\frac{1-\ln x}{x^2}$. **575.** $x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\ln x\right)$. **576.** $x^{x^x}x^x\left(\frac{1}{x}+\ln x+\ln^2 x\right)$.
577. $x^{\operatorname{sen}x}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}+\cos x\ln x\right)$. **578.** $(\cos x)^{\operatorname{sen}x}(\cos x\ln\cos x-\operatorname{sen}x\operatorname{tg}x)$.

579. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]$. **580.** $(\operatorname{arctg} x)^x\left[\ln \operatorname{arctg} x+\frac{x}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}\right]$.
581. a) $x'_y=\frac{1}{3(1+x^2)}$; b) $x'_y=\frac{2}{2-\cos x}$; c) $x'_y=\frac{10}{1+5e^{\frac{x}{2}}}$. **582.** $\frac{3}{2}t^2$.
583. $\frac{-2t}{t+1}$. **584.** $\frac{-2t}{1-t^2}$. **585.** $\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$. **586.** $\frac{2}{3\sqrt[6]{t}}$. **587.** $\frac{t+1}{t(t^2+1)}$. **588.** $\operatorname{tg} t$.
589. $-\frac{b}{a}\operatorname{tg} t$. **590.** $-\frac{b}{a}\operatorname{tg} t$. **591.** $-\operatorname{tg} 3t$. **592.** $y'_x=\begin{cases}-1 \text{ quando } t<0.\\ 1 \text{ quando } t>0.\end{cases}$
593. $-2e^{3t}$. **594.** $\operatorname{tg} t$. **596.** 1. **597.** ∞. **599.** Não. **600.** Sim, já que esta igualdade é uma identidade. **601.** $\frac{2}{5}$. **602.** $-\frac{b^2x}{a^2y}$. **603.** $-\frac{x^2}{y^2}$. **604.** $-\frac{x(3x+2y)}{x^2+2y}$. **605.** $-\sqrt{\frac{y}{x}}$.
606. $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. **607.** $\frac{2y^2}{3(x^2-y^2)+2xy}=\frac{1-y^3}{1+3xy^2+4y^3}$. **608.** $\frac{10}{10-3\cos y}$.
609. -1. **610.** $\frac{y\cos^2 y}{1-x\cos^2 y}$. **611.** $\frac{y}{x}\,\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$. **612.** $(x+y)^2$. **613.** $y'=$ $=\frac{1}{e^y-1}=\frac{1}{x+y-1}$. **614.** $\frac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}$. **615.** $\frac{y}{x-y}$. **616.** $\frac{x+y}{x-y}$.
617. $\frac{cy+x\sqrt{x^2+y^2}}{cx-y\sqrt{x^2+y^2}}$. **618.** $\frac{x\ln y-y}{y\ln x-x}\cdot\frac{y}{x}$. **620.** a) 0; b) $\frac{1}{2}$; c) 0. **622.** 45°; $\operatorname{arctg} 2\approx 63°26'$. **623.** 45°. **624.** $\operatorname{arctg}\frac{2}{e}\approx 36°21$. **625.** (0; 20); (1; 15); (−2; −12). **626.** (1; −3). **627.** $y=x^2-x+1$. **628.** $k=\frac{-1}{11}$. **629.** $\left(\frac{1}{8};\ -\frac{1}{16}\right)$.
631. $y-5=0$; $x+2=0$. **632.** $x-1=0$; $y=0$. **633.** a) $y=2x$; $y=-\frac{1}{2}x$; b) $x-2y-1=0$; $2y+y-2=0$; c) $6x+2y-\pi=0$; $2x-6y+3\pi=0$; d) $y=x-1$; $y=1-x$; e) $2x+y-3=0$; $x-2y+1=0$ para o ponto (1; 1); $2x-y+3=0$; $x+2y-1=0$ para o ponto (−1; 1). **634.** $7x-10y+6=0$, $10x+7y-34=0$. **635.** $y=0$; $(\pi+4)x+(\pi-4)y-\frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}=0$. **636.** $5x+$ $+6y-13=0$, $6x-5y+21=0$. **637.** $x+y-2=0$. **638.** No ponto (1; 0); $y=2x-2$; $y=\frac{1-x}{2}$; no ponto (2; 0); $y=-x+2$; $y=x-2$; no ponto (3; 0): $y=2x-6$; $y=\frac{3-x}{2}$. **639.** $14x-13y+12=0$, $13x+14y-41=0$.

640. Indicação. A equação da tangente é $\frac{x}{2x_0}+\frac{y}{2y_0}=1$. Portanto, esta tangente corta o eixo OX no ponto $A(2x_0;\ 0)$ e o eixo OY no ponto $B(0;\ 2y_0)$. Procurando o ponto médio do segmento AB, achamos o ponto $(x_0;\ y_0)$. **643.** 40°36′. **644.** No ponto (0; 0) as parábolas são tangentes entre si; no ponto (1; 1) se cortam sob o ângulo de $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}\approx 8°8'$. **647.** $S_t=S_n=2$; $t=n=2\sqrt{2}$. **648.** $\frac{1}{\ln 2}$. **652.** $T=$ $=2a\operatorname{sen}\frac{t}{2}\operatorname{tg}\frac{t}{2}$; $N=2a\operatorname{sen}\frac{t}{2}$; $S_t=2a\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}$; $S_n=a\operatorname{sen} t$. **653.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{k}$.

654. $\frac{\pi}{2} + 2\varphi$. **655.** $S_t = 4\pi^2 a$; $S_n = a$; $t = 2\pi a\sqrt{1+4\pi^2}$; $n = a\sqrt{1+4^2\pi}$; $\operatorname{tg}\mu = 2\pi$. **656.** $S_t = a$; $S_n = \frac{a}{\varphi_0^2}$; $t = \sqrt{a^2 + r_0^2}$; $n = \frac{\rho_0}{a}\sqrt{a^2+\rho_0^2}$; $\operatorname{tg}\mu = -\varphi_0$. **657.** 3cm/s; 0; −ſ m/s. **658.** 15 cm/s. **659.** $-\frac{3}{2}$ m/s. **660.** A equação da trajetória é $y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2$. O alcance de vôo é $\frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$. A velocidade $\sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt \operatorname{sen}\alpha + g^2t^2}$; o coeficiente angular do vetor da velocidade $\frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha - gt}{v_0\cos\alpha}$. **Indicação.** Para determinar a trajetória é preciso eliminar o parâmetro t do sistema dado. O alcance de vôo é a abscissa do ponto A (fig. 17). As projeções da velocidade sobre os eixos: $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$. A grandeza da velocidade $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$; o vetor da velocidade é dirigido pela tangente à trajetória. **661.** Decresce com uma velocidade de 0,4. **662.** (9/8, 9/2). **663.** A diagonal cresce com uma velocidade de ~ 3,8 cm/s, a área, com uma velocidade de 40 cm²/s. **664.** A área da superfície cresce com uma velocidade de $0{,}2\pi$ m²/s, o volume, com uma velocidade de $0{,}05\pi$ m³/s. **665.** $\frac{\pi}{3}$ cm/s. **666.** A massa total da barra é de 360 g, a densidade no ponto M é igual a $5x$ g/cm, a densidade no ponto A igual a zero, a densidade no ponto $B = 60$ g/cm. **667.** $56x^3 + 210x^4$. **668.** $e^{x^2}(4x^3 + 2)$. **669.** $2\cos 2x$. **670.** $2(1-x^2)/3(1+x^2)^2$. **671.** $-x/\sqrt{(a^2+x^2)^3}$. **672.** $2\operatorname{arctg} x + \frac{2x}{1+x^2}$. **673.** $\frac{2}{1-x^2} + \frac{2x\arcsen x}{(1-x^2)^{3/2}}$. **674.** $\frac{1}{a}\cos\mathrm{h}\,\frac{x}{a}$. **679.** $y''' = 6$. **680.** $f'''(3) = 4320$. **681.** $y^{\mathrm{V}} = \frac{24}{(x+1)^5}$. **682.** $y^{\mathrm{VI}} = -64\operatorname{sen} 2x$. **684.** 0; 1; 2; 2. **685.** A velocidade $v = 5$; 4,997; 4,7. A aceleração $a = 0$; −0,006; −0,06. **686.** A lei do movimento do ponto M_1 é $x = a\cos\omega t$; a velocidade no momento t é igual $a - a\omega \operatorname{sen}\omega t$; a aceleração no momento t: $-a\omega^2\cos\omega t$. A velocidade inicial é igual a zero; a aceleração inicial: $-a\omega^2$; a velocidade quando $x = 0$: $\mp a\omega$; a aceleração quando $x = 0$: 0. O valor máximo da grandeza absoluta da velocidade $a\omega$. O valor máximo da grandeza absoluta da aceleração $a\omega^2$. **687.** $y^{(n)} = n!\,a^n$. **688.** a) $n!(1-x)^{-(n+1)}$; b) $(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-3)}{2^n\cdot x^{n-\frac{1}{2}}}$. **689.** a) $\operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$; b) $2^n\cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$; c) $(-3)^n e^{-3x}$; d) $(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$; e) $\frac{(-1)^{n+1}n!}{(1+x)^{n+1}}$; f) $\frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$; g) $2^{n-1}\operatorname{sen}\left[2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right]$; h) $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\,a^n}{(ax+b)^n}$. **690**. a) $x\cdot e^x + ne^x$; b) $2^{n-1}e^{-2x}\times\left[2(-1)^n x^2 + 2n(-1)^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2}\right]$; c) $(1-x^2)\times\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - 2nx\cos\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) - n(n-1)\cos\left(x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right)$; d) $\frac{(-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 3\ldots(2n-3)}{2^n x^{\frac{2n+1}{2}}}[x - (2n-1)]$; e) $\frac{(-1)^n 6(n-4)!}{x^{n-3}}$ quando $n \geqslant 4$.

691. $y^{(n)}(0) = (n-1)!$ **692.** a) $9t^3$; b) $2t^2 + 2$; c) $-\sqrt{1-t^2}$. **693.** a) $\frac{-1}{a\operatorname{sen}^3 t}$;

b) $\dfrac{1}{3a\cos^4 t \operatorname{sen} t}$; c) $\dfrac{-1}{4a \operatorname{sen}^4 \frac{t}{2}}$; d) $\dfrac{-1}{at \operatorname{sen}^3 t}$. **694.** a) 0; b) $2e^{3at}$.

695. a) $(1+t^2)(1+3t^2)$; b) $\dfrac{t(1+t)}{(1-t)^3}$. **696.** $\dfrac{-2e^{-t}}{(\cos t + \operatorname{sen} t)^3}$. **697.** Temos $y = e^x - 1$ e $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0} = 1$. Aqui não se emprega a regra de diferenciação. **699.** $\dfrac{3\operatorname{ctg}^4 t}{\operatorname{sen} t}$.

700. $\dfrac{4e^{2t}(2\operatorname{sen} t - \cos t)}{(\operatorname{sen} t + \cos t)^5}$. **701.** $-6e^{3t}(1+3t+t^2)$. **702.** $m^n t^m$. **703.** $\dfrac{d^2x}{dy^2} = \dfrac{-f''(x)}{[f'(x)]^3}$; $\dfrac{d^3x}{dy^3} = \dfrac{3[f''(x)]^2 - f'(x)f'''(x)}{[f'(x)]^5}$. **705.** $-\dfrac{p^2}{y^3}$. **706.** $-\dfrac{b^4}{a^2y^3}$. **707.** $-\dfrac{2y^2+2}{y^5}$.

708. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{y}{(1-y)^3}$; $\dfrac{d^2x}{dy^2} = \dfrac{1}{y^2}$. **709.** 111/256. **710.** $-1/16$. **711.** a) 1/3; b) $-3a^2x/y^5$.
712. $\Delta y = 0{,}009001$; $dy = 0{,}009$. **713.** $d(1-x^3) = 1$ quando $x = 1$ e $\Delta x = -1/3$.
714. $dS = 2x\Delta x$, $\Delta S = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$. **717.** Quando $x = 0$. **718.** Não. **719.** $dy = -\dfrac{\pi}{72} \approx -0{,}0436$. **720.** $dy = \dfrac{1}{2700} \approx 0{,}00037$. **721.** $dy = \dfrac{\pi}{45} \approx 0{,}0698$. **722.** $\dfrac{-m\,dx}{x^{m+1}}$.

723. $\dfrac{dx}{(1-x)^2}$. **724.** $\dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$. **725.** $\dfrac{a\,dx}{x^2+a^2}$. **726.** $-2xe^{-x^2}dx$. **727.** $\ln x\,dx$.
728. $\dfrac{-2\,dx}{1-x^4}$. **729.** $-\dfrac{1+\cos\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi}d\varphi$. **730.** $-\dfrac{e^t\,dt}{1-e^{2t}}$. **732.** $-\dfrac{10x+8y}{7x+5y}dx$.

733. $\dfrac{-ye^{-\frac{x}{y}}dx}{y^2 - xe^{-\frac{x}{y}}} = \dfrac{y}{x-y}dx$. **734.** $\dfrac{x+y}{x-y}dx$. **735.** $\dfrac{12}{11}dx$. **737.** a) 0,485; b) 0,965; c) 1,2; d) $-0{,}045$; e) $\dfrac{\pi}{4} + 0{,}025 \approx 0{,}81$. **738.** 565 cm^3. **739.** $\sqrt{5} \approx 2{,}25$; $\sqrt{17} \approx 4{,}13$; $\sqrt{70} \approx 8{,}38$; $\sqrt{640} \approx 25{,}3$. **740.** $\sqrt[3]{10} \approx 2{,}16$; $\sqrt[3]{70} \approx 4{,}13$; $\sqrt[3]{200} \approx 5{,}85$.
741. a) 5; b) 1,1; c) 0,93; d) 0,9. **742.** 1,0019. **743.** 0,57. **744.** 2,03. **748.** $\dfrac{-(dx)^2}{(1-x^2)^{3/2}}$.
749. $\dfrac{-x(dx)^2}{(1-x^2)^{3/2}}$. **750.** $\left(-\operatorname{sen} x \ln x + \dfrac{2\cos x}{x} - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}\right)(dx)^2$. **751.** $\dfrac{2\ln x - 3}{x^3}(dx)^2$.
752. $-e^{-x}(x^2-6x+6)(dx)^3$. **753.** $\dfrac{384\,(dx)^4}{(2-x)^5}$. **754.** $3\cdot 2^n \operatorname{sen}\left(2x+5+\dfrac{n\pi}{2}\right)(dx)^n$.
755. $e^{x\cos\alpha}\operatorname{sen}(x\operatorname{sen}\alpha + n\alpha)(dx)^n$. **757.** Não, já que $f'(2)$ não existe. **758.** Não. O ponto $x = \dfrac{\pi}{2}$ é um ponto de descontinuidade da função. **762.** $\xi = 0$. **763.** (2, 4).
765. a) $\xi = \dfrac{14}{9}$; b) $\xi = \dfrac{\pi}{4}$. **768.** $\ln x = (x-1) - \dfrac{1}{2}(x-1)^2 + \dfrac{(x-1)^3}{3\xi^3}$, onde $\xi = 1 + \theta(x-1)$, $0 < \theta < 1$. **769.** $\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}\cos\xi_1$, onde $\xi_1 = \theta_1 x$, $0 < \theta_1 < 1$; $\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!}\cos\xi_2$, onde $\xi_2 = \theta_2 x$, $0 < \theta_2 < 1$.
770. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dots + \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dfrac{x^n}{n!}e^{\xi}$, onde $\xi = \theta x$, $0 < \theta < 1$.

772. O erro: a) $\frac{1}{16}\frac{x^3}{(1+\xi)^{5/2}}$; b) $\frac{5}{81}\frac{x^3}{(1+\xi)^{8/3}}$; em ambos os casos $\xi = \theta x$; $0 < \theta < 1$. **773.** O erro é menor que $\frac{3}{5!} = \frac{1}{40}$. **775. Solução.** Temos $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = \left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}$. Desenvolvendo ambos os fatores em potências de x, obtemos: $\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1+\frac{1}{2}\frac{x}{a}-\frac{1}{8}\frac{x^2}{a^2}$; $\left(1-\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1+\frac{1}{2}\frac{x}{a}+\frac{3}{8}\frac{x^2}{a^2}$. Multiplicando-os, teremos: $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \approx 1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{2a^2}$. A seguir, desenvolvendo $e^{\frac{x}{a}}$ em potências de $\frac{x}{a}$, obtemos o mesmo polinômio $e^{\frac{x}{a}} \approx 1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{2a^2}$.

777. $-\frac{1}{3}$. **778.** ∞. **779.** 1. **780.** 3. **781.** $\frac{1}{2}$. **782.** 5. **783.** ∞. **784.** 0. **785.** $\frac{\pi^2}{2}$. **786.** 1. **788.** $\frac{2}{\pi}$. **789.** 1. **790.** 0. **791.** a. **792.** ∞ para $n > 1$; a para $n = 1$; 0 para $n < 1$. **793.** 0. **795.** $\frac{1}{5}$. **796.** $\frac{1}{12}$. **797.** -1. **799.** 1. **800.** e^3. **801.** 1. **802.** 1. **803.** 1. **804.** $\frac{1}{e}$. **805.** $\frac{1}{e}$. **806.** $\frac{1}{e}$. **807.** 1. **808.** 1. **810. Indicação.** Achar o $\lim\limits_{a\to 0}\frac{S}{\frac{2}{3}bh}$, onde $S = \frac{R^2}{2}(\alpha - \text{sen}\,\alpha)$ é a expressão exata da área do segmento (R é o raio da circunferência correspondente).

Capítulo III

811. $(-\infty, -2)$ — cresce; $(-2; \infty)$, decresce. **812.** $(-\infty, 2)$, decresce; $(2, \infty)$, cresce **813.** $(-\infty, \infty)$, cresce. **814.** $(-\infty, 0)$ e $(2, \infty)$, cresce; $(0, 2)$, decresce. **815.** $(-\infty$ $2)$ e $(2, \infty)$, decresce. **816.** $(-\infty, 1)$, cresce; $(1, \infty)$, decresce. **817.** $(-\infty, -2)$, $(-2$ $8)$ e $(8, \infty)$, decresce. **818.** $(0, 1)$, decresce; $(1, \infty)$, cresce. **819.** $(-\infty, -1)$ e $(1, \infty)$ cresce; $(-1, 1)$, decresce. **820.** $(-\infty, \infty)$, cresce. **821.** $\left(0, \frac{1}{e}\right)$, decresce; $\left(\frac{1}{e}; \infty\right)$, cresce. **822.** $(-2, 0)$ cresce. **823.** $(-\infty, 2)$ decresce; $(2, \infty)$, cresce. **824.** $(-\infty, a)$ e (a, ∞), decresce. **825.** $(-\infty, 0)$ e $(0, 1)$, decresce; $(1, \infty)$, cresce. **827.** $y_{\text{máx}} = \frac{9}{4}$ quando $x = \frac{1}{2}$. **828.** Não há extremo. **830.** $y_{\text{mín}} = 0$ quando $x = 0$; $y_{\text{mín}} = 0$ quando $x = 12$; $y_{\text{máx}} = 1296$ quando $x = 6$. **831.** $y_{\text{mín}} \approx -0{,}76$ quando $x \approx 0{,}23$; $y_{\text{máx}} \approx 0$ quando $x = 1$; $y_{\text{mín}} \approx -0{,}05$ quando $x \approx 1{,}43$. Quando $x = 2$ não há extremo. **832.** Não há extremo. **833.** $y_{\text{máx}} = -2$ quando $x = 0$; $y_{\text{mín}} = 2$ quando $x = 2$. **834.** $y_{\text{máx}} = \frac{9}{16}$ quando $x = 3{,}2$. **835.** $y_{\text{máx}} = -3\sqrt{3}$ quando $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$; $y_{\text{mín}} = 3\sqrt{3}$ quando $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$. **836.** $y_{\text{máx}} = \sqrt{2}$ quando $x = 0$. **837.** $y_{\text{máx}} = -\sqrt{3}$

quando $x = -2\sqrt{3}$; $y_{mín} = \sqrt{3}$ quando $x = 2\sqrt{3}$. **838.** $y_{mín} = 0$ quando $x = \pm 1$; $y_{máx} = 1$ quando $x = 0$. **839.** $y_{mín} = -\frac{3}{2}\sqrt{3}$ quando $x = \left(k - \frac{1}{6}\right)\pi$; $y_{máx} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ quando $x = \left(k + \frac{1}{6}\right)\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). **840.** $y_{máx} = 5$ quando $x = 12k\pi$; $y_{máx} = 5\cos\frac{2\pi}{5}$ quando $x = 12\left(k \pm \frac{2}{5}\right)\pi$; $y_{mín} = -5\cos\frac{\pi}{5}$ quando $x = 12\left(k \pm \frac{1}{5}\right)\pi$; $y_{mín} = 1$ quando $x = 6(2k+1)\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). **841.** $y_{mín} = 0$ quando $x = 0$. **842.** $y_{mín} = -\frac{1}{e}$ quando $x = \frac{1}{e}$. **843.** $y_{máx} = \frac{4}{e^2}$ quando $x = \frac{1}{e^2}$; $y_{mín} = 0$ quando $x = 1$. **844.** $y_{mín} = 1$ quando $x = 0$. **845.** $y_{mín} = -\frac{1}{e}$ quando $x = -1$. **846.** $y_{mín} = 0$ quando $x = 0$; $y_{máx} = \frac{4}{e^2}$ quando $x = 2$ **847.** $y_{mín} = e$ quando $x = 1$. **848.** Não há extremo. **849.** O valor mínimo é $m = -\frac{1}{2}$ quando $x = -1$; o valor máximo é $M = \frac{1}{2}$ quando $x = 1$. **850.** $m = 0$ quando $x = 0$ e $x = 10$; $M = 5$ quando $x = 5$. **851.** $m = \frac{1}{2}$ quando $x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$; $M = 1$ quando $x = \frac{k\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). **852.** $m = 0$ quando $x = 1$; $M = \pi$ quando $x = -1$. **853.** $m = -1$ quando $x = -1$; $M = 27$ quando $x = 3$. **854.** a) $m = -6$ quando $x = 1$; $M = 266$ quando $x = 5$; b) $m = -1579$ quando $x = -10$; $M = 3745$ quando $x = 12$. **856.** $p = -2$, $q = 4$. **861.** Cada um dos termos deve ser igual a $\frac{a}{2}$. **862.** O retângulo deve ser um quadrado com lados iguais a $\frac{1}{4}$. **863.** Isósceles. **864.** O lado da superfície que está junto da parede deve ser duas vezes maior que o outro lado. **865.** O lado do quadrado que se recorta deve ser igual a $\frac{a}{6}$. **866.** A altura deve ser duas vezes menor que o lado da base. **867.** Aquele cuja altura é igual ao diâmetro da base. **868.** A altura do cilindro $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, o raio da base $R\sqrt{\frac{2}{3}}$, onde R é o raio da esfera dada. **869.** A altura do cilindro é $R\sqrt{2}$, onde R é o raio da esfera dada. **870.** A altura do cone é $\frac{4}{3}R$, onde R é o raio da esfera dada. **871.** A altura do cone é $\frac{4}{3}R$, onde R é o raio da esfera dada. **872.** O raio da base do cone é $\frac{3}{2}r$, onde r é o raio da base do cilindro dado. **873.** Aquele cuja altura é duas vezes maior que o diâmetro da esfera. **874.** $\varphi = \pi$, isto é, a seção da canaleta tem a forma de semicírculo. **875.** O ângulo central do setor é $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$. **876.** A altura da parte cilíndrica deve ser igual a zero, isto é, o recipiente deve ter

a forma de semi-esfera. 877 $h = \left(l^{\frac{2}{3}} - d^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$. 878. $\frac{x}{2x_0} + \frac{y}{2y_0} = 1$. 879. Os lados do retângulo são $a\sqrt{2}$ e $b\sqrt{2}$, onde a e b são os semi-eixos correspondentes da elipse. 880. As coordenadas dos vértices do retângulo; situados na parábola, são $\left(\frac{2}{3}a, \pm 2\sqrt{\frac{pa}{3}}\right)$. 881. $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right)$. 882. O ângulo é igual a maior das grandezas arccos $\frac{1}{k}$ e arctg $\frac{h}{d}$. 883. $AM = a\frac{\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}}$. 884. $\frac{r}{\sqrt{2}}$. 885. a) $x = y = \frac{d}{\sqrt{2}}$; b) $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$; $y = d\sqrt{\frac{2}{3}}$. 886. $x = \sqrt{\frac{2aQ}{q}}$; $P_{\min} = \sqrt{2aqQ}$. 887. $\sqrt{Mm}$. Indicação. Quando o choque das duas esferas é completamente elástico, a velocidade que adquire a bola imóvel, de massa m_1, depois do choque com a massa m_2, que se movia com a velocidade v, será igual a $\frac{2m_2v}{m_1 + m_2}$. 888. $n = \sqrt{\frac{NR}{r}}$ (se este número não é inteiro ou não é divisor do número N, toma-se o número inteiro mais próximo do valor obtido, que seja divisor de N). Como a resistência interna da bateria é igual a $\frac{n^2r}{N}$, o sentido físico da solução encontrada é: a resistência interna da bateria deverá ser a mais próxima possível da resistência externa. 889. $y = \frac{2}{3}h$. 891. $(-\infty, 2)$, côncava para baixo; $(2, \infty)$, côncava para cima; $M(2; 12)$ ponto de inflexão. 892. $(-\infty, \infty)$, côncava para cima. 893. $(-\infty, -3)$, côncava para baixo; $(-3, \infty)$, côncava para cima; não há ponto de inflexão. 894. $(-\infty, -6)$ e $(0,6)$, côncava para cima; $(-6, 0)$ e $(6, \infty)$, côncava para baixo; pontos de inflexão $M_1\left(-6; -\frac{9}{2}\right)$, $O(0; 0)$, $M_2\left(6; \frac{9}{2}\right)$. 895. $(-\infty, -\sqrt{3})$ e $(0, \sqrt{3})$, côncava para cima; $(-\sqrt{3}, 0)$ e $(\sqrt{3}, \infty)$, côncava para baixo; pontos de inflexão $M_{1,2}(\pm\sqrt{3}; 0)$ e $O(0; 0)$. 896. $\left((4k+1)\frac{\pi}{2}, (4k+3)\frac{\pi}{2}\right)$, côncava para cima, $\left((4k+3)\frac{\pi}{2}, (4k+5)\frac{\pi}{2}\right)$, côncava para baixo ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); pontos de inflexão, $\left((2k+1)\frac{\pi}{2}; 0\right)$. 897. $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, côncava para cima, $((2k-1)\pi, 2k\pi)$, côncava para baixo ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); as abscissas dos pontos de inflexão são $x = k\pi$. 898. $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e^3}}\right)$ côncava para baixo, $\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}, \infty\right)$, côncava para cima; $M\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}; -\frac{3}{2e^3}\right)$ é o ponto de inflexão. 899. $(-\infty, 0)$, côncava para cima, $(0, \infty)$, côncava para baixo; $O(0; 0)$ é o ponto de inflexão. 900. $(-\infty, -3)$ e $(-1, \infty)$, côncava para cima; $(-3, -1)$, côncava para baixo; pontos de inflexão, $M_1\left(-3; \frac{10}{e^3}\right)$ e $M_2\left(-1; \frac{2}{e}\right)$. 901. $x = 2$; $y = 0$. 902. $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$. 903. $x = \pm 2$, $y = 1$. 904. $y = x$. 905. $y = -x$ (esquerda), $y = x$ (direita). 906. $y = -1$ (esquerda), $y = 1$ (direita). 907. $x = \pm 1$, $y = -x$ (esquerda), $y = x$ (direita). 908. $y = -2$ (esquerda), $y = 2x - 2$ (direita). 909. $y = 2$. 910. $x = 0$, $y = 1$ (esquerda), $y = 0$ (direita). 911. $x = 0$, $y = 1$. 912. $y = 0$. 913. $x = -1$.

914. $y = x - \pi$ (esquerda); $y = x + \pi$ (direita). **915.** $y = a$. **916.** $y_{máx} = 0$ quando $x = 0$; $y_{mín} = -4$ quando $x = 2$; ponto de inflexão $M_1(1, -2)$. **917.** $y_{máx} = 1$ quando $x = \pm\sqrt{3}$; $y_{mín} = 0$ quando $x = 0$; ponto de inflexão $M_{1,2}\left(\pm 1;\ \frac{5}{9}\right)$. **918.** $y_{máx} = 4$ quando $x = -1$; $y_{mín} = 0$ quando $x = 1$; ponto de inflexão $M_1(0; 2)$. **919.** $y_{máx} = 8$ quando $x = -2$; $y_{mín} = 0$ quando $x = 2$; ponto de inflexão $M(0; 4)$. **920.** $y_{mín} = -1$ quando $x = 0$; ponto de inflexão $M_{1,2}(\pm\sqrt{5};\ 0)$ e $M_{3,4}\left(\pm 1;\ -\frac{64}{125}\right)$. **921.** $y_{máx} = -2$ quando $x = 0$; $y_{mín} = 2$ quando $x = 2$; as assíntotas são $x = 1$, $y = x - 1$. **922.** Os pontos de inflexão são $M_{1,2}(\pm 1, \mp 2)$; a assíntota é $x = 0$. **923.** $y_{máx} = -4$ quando $x = -1$; $y_{mín} = 4$ quando $x = 1$; a assíntota $x = 0$. **924.** $y_{mín} = 3$ quando $x = 1$; o ponto de inflexão é $-M(-\sqrt[3]{2};\ 0)$; a assíntota $x = 0$. **925.** $y_{máx} = \frac{1}{3}$ quando $x = 0$; o ponto de inflexão é $M_{1,2}\left(\pm 1;\ \frac{1}{4}\right)$; a assíntota é $y = 0$. **926.** $y_{máx} = -2$ quando $x = 0$; as assíntotas são $x = \pm 2$ e $y = 0$. **927.** $y_{mín} = -1$ quando $x = -2$; $y_{máx} = 1$ quando $x = 2$; os pontos de inflexão são $-O(0;\ 0)$ e $M_{1,2}\left(\pm 2\sqrt{3};\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; a assíntota é $y = 0$. **928.** $y_{máx} = 1$ quando $x = 4$; o ponto de inflexão é $-M\left(5;\ \frac{8}{9}\right)$; as assíntotas são $x = 2$ e $y = 0$. **929.** O ponto de inflexão é $O(0;\ 0)$; as assíntotas são $x = \pm 2$ e $y = 0$. **930.** $y_{máx} = -\frac{27}{16}$ quando $x = \frac{8}{3}$; as assíntotas são $x = 0$, $x = 4$ e $y = 0$. **931.** $y_{máx} = -4$ quando $x = -1$; $y_{mín} = 4$ quando $x = 1$; as assíntotas são $x = 0$ e $y = 3x$. **932.** $A(0;\ 2)$ e $B(4;\ 2)$ são os pontos extremos; $y_{máx} = 2\sqrt{2}$ quando $x = 2$. **933.** $A(-8;\ -4)$ e $B(8;\ 4)$ são os pontos extremos. O ponto de inflexão é $O(0;\ 0)$. **934.** O ponto extremo é $A(-3;\ 0)$; $y_{mín} = -2$ quando $x = -2$. **935.** Os pontos extremos são $A(-\sqrt{3};\ 0)$, $O(0;\ 0)$ e $B(\sqrt{3};\ 0)$; $y_{máx} = \sqrt{2}$ quando $x = -1$; o ponto de inflexão é $M\left(\sqrt{3 + 2\sqrt{3}},\ \sqrt{6\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}}}\right)$. **936.** $y_{máx} = 1$ quando $x = 0$; os pontos de inflexão são $M_{1,2}(\pm 1;\ 0)$. **937.** Os pontos de inflexão $M_1(0;\ 1)$ e $M_2(1;\ 0)$; a assíntota é $y = -x$. **938.** $y_{máx} = 0$ quando $x = -1$; $y_{mín} = -1$ (quando $x = 0$). **939.** $y_{máx} = 2$ quando $x = 0$; os pontos de inflexão são $M_{1,2}(\pm 1;\ \sqrt[3]{2})$; a assíntota é $y = 0$. **940.** $y_{mín} = -4$ quando $x = -4$; $y_{máx} = 4$ quando $x = 4$; o ponto de inflexão é $O(0;\ 0)$; a assíntota é $y = 0$. **941.** $y_{mín} = \sqrt[3]{4}$ quando $x = 2$, $y_{mín} = \sqrt[3]{4}$ quando $x = 4$; $y_{máx} = 2$ quando $x = 3$. **942.** $y_{mín} = 2$ quando $x = 0$; as assíntotas são $x = \pm 2$. **943.** As assíntotas são $x = \pm 2$ e $y = 0$. **944.** $y_{mín} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$ quando $x = \sqrt{3}$; $y_{máx} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$ quando $x = -\sqrt{3}$; os pontos de inflexão são $M_1\left(-3;\ -\frac{3}{2}\right)$, $O(0;\ 0)$ e $M_2\left(3;\ \frac{3}{2}\right)$; as assíntotas são $x = \pm 1$. **945.** $y_{mín} = \frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ quando $x = 6$; o ponto de inflexão é $M\left(12;\ \frac{12}{\sqrt[3]{100}}\right)$; a assíntota é $x = 2$. **946.** $y_{máx} = \frac{1}{e}$ quando $x = 1$; o ponto de inflexão é $M\left(2;\ \frac{2}{e^2}\right)$; a assíntota é $y = 0$. **947.** Os pontos de inflexão são

$M_1\left(-3a;\ \frac{10a}{e^3}\right)$ e $M_2\left(-a;\ \frac{2a}{e}\right)$; a assíntota é $y = 0$. **948.** $y_{máx} = e^2$ quando $x = 4$; os pontos de inflexão são $M_{1,2}\left(\frac{8 \pm 2\sqrt{2}}{2};\ e^{\frac{3}{2}}\right)$; a assíntota é $y = 0{,}949$. $y_{máx} = 2$ quando $x = 0$; os pontos de inflexão são $M_{1,2}\left(\pm 1;\ \frac{3}{e}\right)$; a assíntota é $y = 0$. **950.** $y_{máx} = 1$ quando $x = \pm 1$; $y_{mín} = 0$ quando $x = 0$. **951.** $y_{máx} = 0{,}74$ quando $x = e^2 \approx 7{,}39$; o ponto de inflexão é $M(e^{8/3} \approx 14{,}39;\ 0{,}70)$; as assíntotas são $x = 0$ e $y = 0$. **952.** $y_{mín} = -\frac{a^2}{4e}$ quando $x = \frac{a}{\sqrt{e}}$; o ponto de inflexão é $M\left(\frac{a}{\sqrt{e^3}};\ -\frac{3a^2}{4e^3}\right)$. **953.** $y_{mín} = e$ quando $x = e$; o ponto de inflexão é $M\left(e^2;\ \frac{e^2}{2}\right)$; a assíntota é $x = 1$; $y \to 0$ quando $x \to 0$. **954.** $y_{máx} = \frac{4}{e^2} \approx 0{,}54$ quando $x = \frac{1}{e^2} - 1 \approx -0{,}86$; $y_{mín} = 0$ quando $x = 0$; o ponto de inflexão é $M\left(\frac{1}{e} - 1 \approx -0{,}63;\ \frac{1}{e} \approx 0{,}37\right)$; $y \to 0$ quando $x \to -1 + 0$ (ponto extremo limite). **955.** $y_{mín} = 1$ quando $x = \pm\sqrt{2}$; os pontos de inflexão são $M_{1,2}(\pm 1{,}89;\ 1{,}33)$; as assíntotas são $x = \pm 1$. **956.** As assíntotas são $x = y = 0$. **957.** As assíntotas são $y = 0$ (quando $x \to +\infty$) e $y = -x$ (quando $x \to -\infty$). **958.** As assíntotas são $x = -\frac{1}{e}$; $x = 0$; $y = 1$; a função não está determinada no segmento $\left[-\frac{1}{e},\ 0\right]$. **959.** É uma função periódica de período 2π. $y_{mín} = -\sqrt{2}$ quando $x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$; $y_{máx} = \sqrt{2}$ quando $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); os pontos de inflexão são $M_k\left(\frac{3}{4}\pi + k\pi;\ 0\right)$. **960.** É uma função periódica com período 2π. $y_{mín} = -\frac{3}{4}\sqrt{3}$ quando $x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$; $y_{máx} = \frac{3}{4}\sqrt{3}$ quando $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); os pontos de inflexão são $M_k(k\pi;\ 0)$ e $N_k\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2k\pi;\ \frac{3}{16}\sqrt{15}\right)$. **961.** É uma função periódica com período 2π. No segmento $[-\pi, \pi]$ $y_{máx} = \frac{1}{4}$ quando $x = \pm\frac{\pi}{3}$; $y_{mín} = -2$ quando $x = \pm\pi$; $y_{mín} = 0$ quando $x = 0$; os pontos de inflexão são $M_{1,2}(\pm 0{,}57;\ 0{,}13)$ e $M_{3,4}(\pm 2{,}20;\ -0{,}95)$. **962.** É uma função periódica ímpar com período 2π. No segmento $[0, 2\pi]$: $y_{máx} = 1$ quando $x = 0$; $y_{mín} = 0{,}71$ quando $x = \frac{\pi}{4}$; $y_{máx} = 1$ quando $x = \frac{\pi}{2}$; $y_{mín} = -1$ quando $x = \pi$; $y_{máx} = -0{,}71$ quando $x = \frac{5}{4}\pi$; $y_{mín} = -1$ quando $x = \frac{3}{2}\pi$; $y_{máx} = 1$ quando $x = 2\pi$; os pontos de inflexão são $M_1(0{,}36;\ 0{,}86)$; $M_2(1{,}21;\ 0{,}86)$; $M_3(2{,}36;\ 0)$; $M_4(3{,}51;\ -0{,}86)$; $M_5(4{,}35;\ -0{,}86)$; $M_6(5{,}50;\ 0)$. **963.** É uma função periódica com período 2π. $y_{mín} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ quando $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$; $y_{máx} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ quando $x = -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi$($k = 0$,

$\pm 1, \pm 2, \ldots)$; as assíntotas são $x = \frac{3}{4}\pi + k\pi$. **964.** É uma função periódica com período π; os pontos de inflexão são $M_k\left(\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; as assíntotas são $x = \frac{3}{4}\pi + k\pi$. **965.** É uma função periódica par com período 2π. No segmento $[0; \pi]$: $y_{máx} = \frac{4}{3\sqrt{3}}$ quando $x = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$; $y_{máx} = 0$ quando $x = \pi$; $y_{mín} = -\frac{4}{3\sqrt{3}}$ quando $x = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $y_{mín} = 0$ quando $x = 0$; os pontos de inflexão são $M_1\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$; $M_2\left(\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{4\sqrt{7}}{27}\right)$; $M_3\left(\pi - \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{3}; -\frac{4\sqrt{7}}{27}\right)$. **966.** É uma função periódica par com período 2π. No segmento $[0, \pi]$: $y_{máx} = 1$ quando $x = 0$; $y_{máx} = \frac{2}{3\sqrt{6}}$ quando $x = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$; $y_{mín} = -\frac{2}{3\sqrt{6}}$ quando $x = \arccos\frac{1}{\sqrt{6}}$; $y_{mín} = -1$ quando $x = \pi$; os pontos de inflexão são $M_1\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$; $M_2\left(\arccos\sqrt{\frac{13}{18}}; \frac{4}{9}\sqrt{\frac{13}{18}}\right)$; $M_3\left(\arccos\left(-\sqrt{\frac{13}{18}}\right); -\frac{4}{9}\sqrt{\frac{13}{18}}\right)$.
967. É uma função ímpar. Os pontos de inflexão são $M_k(k\pi; k\pi)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.
968. É uma função par. Os pontos do extremo são $A_{1,2}(\pm 2{,}83; -1{,}57)$; $y_{máx} \approx 1{,}57$ quando $x = 0$ (ponto de reversão); os pontos de inflexão são $M_{1,2}(\pm 1{,}54; -0{,}34)$.
969. A função é ímpar. Seu campo de existência é $-1 < x < 1$. O ponto de inflexão é $O(0; 0)$; as assíntotas são $x = \pm 1$. **970.** A função é ímpar. $y_{máx} = \frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi$ quando $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$; $y_{mín} = \frac{3}{2}\pi + 1 + 2k\pi$ quando $x = \frac{3}{4}\pi + k\pi$; o ponto de inflexão é $M_k(k\pi, 2k\pi)$; as assíntotas são $x = \frac{2k+1}{2}\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. **971.** A função é par; $y_{mín} = 0$ quando $x = 0$; as assíntotas são $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ (quando $x \to -\infty$) e $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ (quando $x \to +\infty$). **972.** $y_{mín} = 0$ quando $x = 0$ (ponto angular); a assíntota é $y = 1$. **973.** $y_{mín} = 1 + \frac{\pi}{2}$ quando $x = 1$; $y_{máx} = \frac{3\pi}{2} - 1$ quando $x = -1$; o ponto de inflexão é (centro de simetria) $(0, \pi)$; as assíntotas são $y = x + 2\pi$ (esquerda) e $y = x$ (direita). **974.** $y_{mín} \approx 1{,}285$ quando $x = 1$; $y_{máx} \approx 1{,}856$ quando $x = -1$; o ponto de inflexão é $M\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; as assíntotas são $y = \frac{x}{2} + \pi$ (quando $x \to -\infty$) e $y = \frac{x}{2}$ (quando $x \to +\infty$).
975. As assíntotas são $x = 0$ e $y = x - \ln 2$. **976.** $y_{mín} \approx 1{,}32$ quando $x = 1$; a assíntota é $x = 0$. **977.** A função é periódica com período 2π. $y_{mín} = \frac{1}{e}$ quando $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$; $y_{máx} = e$ quando $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; os pontos

de inflexão são $M_k\left(\arcsen\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2k\pi;\ e^{\frac{\sqrt{5-1}}{2}}\right)$ e $N_k\left(-\arcsen\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\right.$ $\left.+(2k+1)\pi;\ e^{\frac{\sqrt{5-1}}{2}}\right)$. **978.** Os pontos do extremo são $A(0;\ 1)$ e $B(1;\ 4{,}81)$. O ponto de inflexão é $M(0{,}28;\ 1{,}74)$. **979.** O ponto de inflexão é $M(0{,}5;\ 1{,}59)$; as assíntotas são $y\approx 0{,}21$ (quando $x\to-\infty$) e $y\approx 4{,}81$ (quando $x\to+\infty$). **980.** O campo de determinação da função é o conjunto dos intervalos $(2k\pi,\ 2k\pi+\pi)$, onde $k=0,$ $\pm 1,\ \pm 2,\ldots$ A função é periódica com período 2π; $y_{máx}=0$ quando $x=\frac{\pi}{2}+$ $+2k\pi$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$; as assíntotas são $x=k\pi$. **981.** O campo de determinação é o conjunto de intervalos $\left(\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi,\ \left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)$, onde k é um número inteiro. A função é periódica de período 2π. Os pontos de inflexão são $M_k(2k\pi;\ 0)$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$; as assíntotas são $x=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$. **982.** O campo de determinação é $x>0$; a função é monótona crescente; a assíntota é $x=0$. **983.** O campo de determinação é $|x-2k\pi|<\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$. A função é periódica com período 2π; $y_{mín}=1$ quando $x=2k\pi$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$; as assíntotas são $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$. **984.** A assíntota é $y\approx 1{,}57$; $y\to-\frac{\pi}{2}$ quando $x\to 0$ (ponto limite do extremo). **985.** Os pontos do extremo são $A_{1,2}(\pm 1{,}31;\ 1{,}57)$; $y_{mín}=0$ quando $x=0$. **986.** $Y_{mín}=\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}\approx 0{,}69$ quando $x=\frac{1}{e}\approx 0{,}37$; $y\to 1$ quando $x\to+0$. **987.** O ponto limite do extremo é $A(+0;\ 0)$; $y_{máx}=e^{\frac{1}{e}}\approx 1{,}44$ quando $x=e\approx 2{,}72$; a assíntota é $y=1$; o ponto de inflexão é $M_1(0{,}58;\ 0{,}12)$ e $M_2(4{,}35;$ $1{,}40)$. **988.** $x_{mín}=-1$ quando $t=1$ $(y=3)$; $y_{mín}=-1$ quando $t=-1$ $(x=3)$. **989.** Para obter o gráfico é suficiente variar t dentro os limites de 0 a 2π; $x_{mín}=-a$ quando $t=\pi$ $(y=0)$; $x_{máx}=a$ quando $t=0$ $(y=0)$; $y_{mín}=-a$ (ponto de reversão) quando $t=+\frac{3\pi}{2}$ $(x=0)$; $y_{máx}=+a$ (ponto de reversão) quando $t=\frac{\pi}{2}$ $(x=0)$; os pontos de inflexão quando $t=\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}$ são $\left(x=\pm\frac{a}{2\sqrt{2}},\ y=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$. **990.** $x_{mín}=-\frac{1}{e}$ quando $t=-1$ $(y=-e)$, $y_{máx}=\frac{1}{e}$ quando $t=1$ $(x=e)$; o ponto de inflexão é $\left(-\frac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}},\ -\sqrt{2}\,e^{\sqrt{2}}\right)$ quando $t=-\sqrt{2}$ e $\left(\sqrt{2}\,e^{\sqrt{2}},\ \frac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}\right)$ quando $t=\sqrt{2}$; as assíntotas são $x=0$ e $y=0$. **991.** $x_{mín}=1$ e $y_{mín}=1$ quando $t=0$ (ponto de reversão); a assíntota é $y=2x$ quando $t\to+\infty$. **992.** $y_{mín}=0$ quando $t=0$. **993.** $ds=\frac{a}{y}\,dx$; $\cos\alpha=\frac{y}{a}$; $\operatorname{sen}\alpha=-\frac{x}{a}$. **994.** $ds=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4-c^2x^2}{a^2-x^2}}\,dx$; $\cos\alpha=\frac{a\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^4-c^2x^2}}$.

$\operatorname{sen}\alpha = -\dfrac{bx}{\sqrt{a^4 - c^2x^2}}$, onde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. **995.** $ds = \dfrac{1}{y}\sqrt{p^2 + y^2}\,dx$; $\cos\alpha = \dfrac{y}{\sqrt{p^2 + y^2}}$; $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{p}{\sqrt{p^2 + y^2}}$. **996.** $ds = \sqrt[3]{\dfrac{a}{x}}\,dx$; $\cos\alpha = \sqrt[3]{\dfrac{x}{a}}$; $\operatorname{sen}\alpha = -\sqrt[3]{\dfrac{y}{a}}$. **997.** $ds = \cosh\dfrac{x}{a}\,dx$; $\cos\alpha = \dfrac{1}{\cosh\dfrac{x}{a}}$; $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{tgh}\dfrac{x}{a}$.

998. $ds = 2a\operatorname{sen}\dfrac{t}{2}\,dt$; $\cos\alpha = \operatorname{sen}\dfrac{t}{2}$; $\operatorname{sen}\alpha = \cos\dfrac{t}{2}$. **999.** $ds = 3a\operatorname{sen}t\cos t\,dt$; $\cos\alpha = -\cos t$; $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}t$. **1000.** $ds = a\sqrt{1 + \varphi^2}\,d\varphi$; $\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \varphi^2}}$. **1001.** $\dfrac{a}{\varphi^2}\sqrt{1 + \varphi^2}\,d\varphi$; $\cos\beta = -\dfrac{1}{\sqrt{1 + \varphi^2}}$. **1002.** $ds = \dfrac{a}{\cos^3\dfrac{\varphi}{2}}\,d\varphi$; $\operatorname{sen}\beta = \cos\dfrac{\varphi}{2}$. **1003.** $ds = a\cos\dfrac{\varphi}{2}\,d\varphi$; $\operatorname{sen}\beta = \cos\dfrac{\varphi}{2}$. **1004.** $ds = r\sqrt{1 + (\ln a)^2}\,d\varphi$; $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (\ln a)^2}}$. **1005.** $ds = \dfrac{a^2}{r}\,d\varphi$; $\operatorname{sen}\beta = \cos 2\varphi$. **1006.** $K = 36$. **1007.** $K = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}$. **1008.** $K_A = \dfrac{a}{b^2}$; $K_B = \dfrac{b}{a^2}$. **1009.** $K = \dfrac{6}{13\sqrt{13}}$. **1010.** $K = \dfrac{3}{a\sqrt{2}}$ em ambos os vértices. **1011.** $\left(\dfrac{9}{8};\ 3\right)$ e $\left(\dfrac{9}{8};\ -3\right)$. **1012.** $\left(-\dfrac{\ln 2}{2};\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **1013.** $R = \left|\dfrac{(1 + 9x^4)^{3/2}}{6x}\right|$. **1014.** $R = \dfrac{(b^4x^2 + a^4y^2)^{3/2}}{a^4b^4}$. **1015.** $R = \dfrac{(y^2 + 1)^2}{4y}$. **1016.** $R = \left|\dfrac{3}{2}a\operatorname{sen}2t\right|$. **1017.** $R = |at|$. **1018.** $R = |r\sqrt{1 + k^2}|$. **1019.** $R = \left|\dfrac{4}{3}a\cos\dfrac{\varphi}{2}\right|$ **1020.** $R_{\min} = |p|$. **1022.** $(2;\ 2)$. **1023.** $\left(-\dfrac{11}{2}a;\ \dfrac{16}{3}a\right)$. **1024.** $(x - 3)^2 + \left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$. **1025.** $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 8$. **1026.** $pY^2 = \dfrac{8}{27}(X - p)^3$ (parábola semicúbica). **1027.** $(aX)^{\frac{2}{3}} + (bY)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}$, onde $c^2 = a^2 - b^2$.

Capítulo IV

Nas respostas deste capítulo, para simplificar omite-se a constante arbitrária adicional C.

1031. $\dfrac{5}{7}a^2x^7$. **1032.** $2x^3 + 4x^2 + 3x$. **1033.** $\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{(a + b)\,x^3}{3} + \dfrac{abx^2}{2}$. **1034.** $a^2x + \dfrac{abx^4}{2} + \dfrac{b^2x^7}{7}$. **1035.** $\dfrac{2x}{3}\sqrt{2px}$. **1036.** $\dfrac{nx^{\frac{n-1}{n}}}{n - 1}$. **1037.** $\sqrt[n]{nx}$. **1038.** $a^2x - \dfrac{9}{5}a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}} + \dfrac{9}{7}a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{3}} - \dfrac{x^3}{3}$. **1039.** $\dfrac{2x^2\sqrt{x}}{5} + x$. **1040.** $\dfrac{3x^4\sqrt[3]{x}}{13} - \dfrac{3x^2\sqrt[3]{x}}{7} -$

$-6\sqrt[3]{x}$. **1041.** $\frac{2x^{2m}\sqrt{x}}{4m+1}-\frac{4x^{m+n}\sqrt{x}}{2m+2n+1}+\frac{2x^{2n}\sqrt{x}}{4n+1}$. **1042.** $2a\sqrt{ax}-4ax+4x\sqrt{ax}-2x^2+\frac{2x^3}{5\sqrt{ax}}$. **1043.** $\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{7}}$. **1044.** $\frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{10}}{x+\sqrt{10}}\right|$. **1045.** $\ln(x+\sqrt{4+x^2})$. **1046.** $\operatorname{arcsen}\frac{x}{2\sqrt{2}}$. **1047.** $\operatorname{arcsen}\frac{x}{\sqrt{2}}-\ln(x+\sqrt{x^2+2})$. **1048*.** a) $\operatorname{tg}x-x$. **Indicação.** Fazer $\operatorname{tg}^2x=\sec^2x-1$; b) $x-\operatorname{tgh}x$. **Indicação.** Fazer $\operatorname{tgh}^2x=1-\frac{1}{\cos h^2 x}$. **1049.** a) $-\operatorname{ctg}x-x$; b) $x-\operatorname{ctgh}x$. **1050.** $\frac{(3e)^x}{\ln 3+1}$. **1051.** $a\ln\left|\frac{C}{a-x}\right|$. **Solução.** $\int\frac{a}{a-x}dx=-a\int\frac{d(a-x)}{a-x}=-a\ln|a-x|+a\ln C=a\ln\left|\frac{C}{a-x}\right|$. **1052.** $x+\ln|2x+1|$. **Solução.** Dividindo o numerador pelo denominador, obtemos $\frac{2x+3}{2x+1}=1+\frac{2}{2x+1}$. Donde $\int\frac{2x+3}{2x+1}dx=\int dx+\int\frac{dx}{2x+1}=x+\int\frac{d(2x+1)}{2x+1}=x+\ln|2x+1|$. **1053.** $-\frac{3}{2}x+\frac{11}{4}\ln|3+2x|$. **1054.** $\frac{x}{b}-\frac{a}{b^2}\ln|a+bx|$. **1055.** $\frac{a}{\alpha}x+\frac{b\alpha-a\beta}{\alpha^2}\ln|\alpha x+\beta|$. **1056.** $\frac{x^2}{2}+x+2\ln|x-1|$. **1057.** $\frac{x^2}{2}+2x+\ln|x+3|$. **1058.** $\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2+2x+3\ln|x-1|$. **1059.** $a^2x+2ab\ln|x-a|-\frac{b^2}{x-a}$. **1060.** $\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}$. **Indicação.** $\int\frac{x\,dx}{(x+1)^2}=\int\frac{(x+1)-1}{(x+1)^2}dx=\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{(x+1)^2}$. **1061.** $-2b\sqrt{1-y}$. **1062.** $-\frac{2}{3b}\sqrt{(a-bx)^3}$. **1063.** $\sqrt{x^2+1}$. **Solução.** $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}$. **1064.** $2\sqrt{x}+\frac{\ln^2 x}{2}$. **1065.** $\frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$. **1066.** $\frac{1}{4\sqrt{14}}\ln\left|\frac{x\sqrt{7}-2\sqrt{2}}{x\sqrt{7}+2\sqrt{2}}\right|$. **1067.** $\frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+b}+x\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-x\sqrt{a-b}}\right|$. **1068.** $x-\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}$. **1069.** $-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{a^2}{2}\ln|a^2-x^2|\right)$. **1070.** $x-\frac{5}{2}\ln(x^2+4)+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$. **1071.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(2\sqrt{2}\,x+\sqrt{7+8x^2})$. **1072.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arcsen}\left(x\sqrt{\frac{5}{7}}\right)$. **1073.** $\frac{1}{3}\ln|3x^2-2|-\frac{5}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right|$. **1074.** $\frac{3}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{5}{7}}x\right)-\frac{1}{5}\ln(5x^2+7)$. **1075.** $\frac{3}{5}\sqrt{5x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{5}}\ln(x\sqrt{5}+\sqrt{5x^2+1})$. **1076.** $\sqrt{x^2-4}+3\ln|x+\sqrt{x^2-4}|$. **1077.** $\frac{1}{2}\ln|x^2-5|$. **1078.** $\frac{1}{4}\ln(2x^2+3)$. **1079.** $\frac{1}{2a}\ln(a^2x^2+b^2)+\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{ax}{b}$. **1080.** $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x^2}{a^2}$. **1081.** $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x^3$. **1082.** $\frac{1}{3}\ln|x^3+$

$+\sqrt{x^6-1}\,|$. **1083.** $\frac{2}{3}\sqrt{(\arcsen x)^3}$. **1084.** $\frac{\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)^2}{4}$. **1085.** $\frac{1}{8}\ln(1+4x^2)-$ $-\frac{\sqrt{(\operatorname{arctg} 2x)^3}}{3}$. **1086.** $2\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$. **1087.** $-\frac{a}{m}e^{-mx}$. **1088.** $-\frac{1}{3\ln 4}4^{2-3x}$.

1089. e^t+e^{-t}. **1090.** $\frac{a}{2}e^{\frac{2x}{a}}+2x-\frac{a}{2}e^{-\frac{2x}{a}}$. **1091.** $\frac{1}{\ln a-\ln b}\left(\frac{a^x}{b^x}-\frac{b^x}{a^x}\right)-2x$.

1092. $\frac{2}{\ln a}\left(\frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}x}+a^{-\frac{1}{2}x}\right)$. **1093.** $-\frac{1}{2e^{x^2}+1}$. **1094.** $\frac{1}{2\ln 7}7^{x^2}$. **1095.** $-e^{\frac{1}{x}}$.

1096. $\frac{2}{\ln 5}5^{\sqrt{x}}$. **1097.** $\ln|e^x-1|$. **1098.** $-\frac{2}{3b}\sqrt{(a-be^x)^3}$. **1099.** $\frac{3a}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}+1\right)^{\frac{4}{3}}$.

1100. $\frac{x}{3}-\frac{1}{3\ln 2}\ln(2^x+3)$. **Indicação.** $\frac{1}{2^x+3}\equiv\frac{1}{3}\left(1-\frac{2^x}{2^x+3}\right)$.

1101. $\frac{1}{\ln a}\operatorname{arctg}(a^x)$. **1102.** $-\frac{1}{2b}\ln\left|\frac{1+e^{-bx}}{1-e^{-bx}}\right|$. **1103.** $\arcsen e^t$. **1104.** $-\frac{1}{b}\times$ $\times\cos(a+bx)$. **1105.** $\sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{x}{\sqrt{2}}$. **1106.** $x-\frac{1}{2a}\cos 2ax$. **1107.** $2\operatorname{sen}\sqrt{x}$.

1108. $-\ln 10\cdot\cos(\lg x)$. **1109.** $\frac{x}{2}-\frac{\operatorname{sen} 2x}{4}$. **Indicação.** Fazer $\operatorname{sen}^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$.

1110. $\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{sen} 2x}{4}$. **Indicação.** Ver indicação para o problema 1109.

1111. $\frac{1}{a}\operatorname{tg}(ax+b)$. **1112.** $-\frac{\operatorname{ctg} ax}{a}-x$. **1113.** $a\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2a}\right|$. **1114.** $\frac{1}{15}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{5x}{2}+\right.\right.$ $\left.\left.+\frac{\pi}{8}\right)\right|$. **1115.** $\frac{1}{a}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{ax+b}{2}\right|$. **1116.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}(x^2)$. **1117.** $\frac{1}{2}\cos(1-x^2)$.

1118. $x-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{ctg} x\sqrt{2}-\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x\sqrt{2}}{2}\right|$. **1119.** $-\ln|\cos x|$. **1120.** $\ln|\operatorname{sen} x|$.

1121. $(a-b)\ln\left|\operatorname{sen}\frac{x}{a-b}\right|$. **1122.** $5\ln\left|\operatorname{sen}\frac{x}{5}\right|$. **1123.** $-2\ln|\cos\sqrt{x}|$.

1124. $\frac{1}{2}\ln|\operatorname{sen}(x^2+1)|$. **1125.** $\ln|\operatorname{tg} x|$. **1126.** $\frac{a}{2}\operatorname{sen}^2\frac{x}{a}$. **1127.** $\frac{\operatorname{sen}^4 6x}{24}$.

1128. $-\frac{1}{4a\operatorname{sen}^4 ax}$. **1129.** $-\frac{1}{3}\ln(3+\cos 3x)$. **1130.** $-\frac{1}{2}\sqrt{\cos 2x}$.

1131. $-\frac{2}{9}\sqrt{(1+3\cos^2 x)^3}$. **1132.** $\frac{3}{4}\operatorname{tg}^4\frac{x}{3}$. **1133.** $\frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}$. **1134.** $-\frac{3\operatorname{ctg}^{\frac{5}{3}} x}{5}$.

1135. $\frac{1}{3}\left(\operatorname{tg} 3x+\frac{1}{\cos 3x}\right)$. **1136.** $\frac{1}{a}\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right|+2\operatorname{sen} ax\right)$. **1137.** $\frac{1}{3a}\ln|b-$ $-a\operatorname{ctg} 3x|$. **1138.** $\frac{2}{5}\cos h\,5x-\frac{3}{5}\operatorname{sen} h\,5x$. **1139.** $-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sen} h\,2x$.

1140. $\ln\left|\operatorname{tgh}\frac{x}{2}\right|$. **1141.** $2\operatorname{arctg} e^x$. **1142.** $\ln|\operatorname{tgh} x|$. **1143.** $\ln\cos h\,x$.

1144. $\ln|\operatorname{sen} h\, x|$. **1145.** $-\frac{5}{12}\sqrt[5]{(5-x^2)^6}$. **1146.** $\frac{1}{4}\ln|x^4-4x+1|$.
1147. $\frac{1}{4\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x^4}{\sqrt{5}}$. **1148.** $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$. **1149.** $\sqrt{\frac{3}{2}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln(x\sqrt{3}+$ $+\sqrt{2+3x^2})$. **1150.** $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-2\ln|x+1|$. **1151.** $-\frac{2}{\sqrt{e^x}}$. **1152.** $\ln|x+\cos x|$.
1153. $\frac{1}{3}\left(\ln|\sec 3x+\operatorname{tg} 3x|+\frac{1}{\operatorname{sen} 3x}\right)$. **1154.** $-\frac{1}{\ln x}$. **1155.** $\ln|\operatorname{tg} x+\sqrt{\operatorname{tg}^2 x-2}|$.
1156. $\sqrt{2}\operatorname{arctg}(x\sqrt{2})-\frac{1}{4(2x^2+1)}$. **1157.** $\frac{a^{\operatorname{sen} x}}{\ln a}$. **1158.** $\frac{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}{2}$.
1159. $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(x^2)$. **1160.** $\frac{1}{a}\operatorname{tg} ax-x$. **1161.** $\frac{x}{2}-\frac{\operatorname{sen} x}{2}$. **1162.** $\operatorname{arcsen}\frac{\operatorname{tg} x}{2}$.
1163. $a\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2a}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. **1164.** $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+\ln x)^4}$. **1165.** $-2\ln|\cos\sqrt{x-1}|$.
1166. $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x^2}{2}\right|$. **1167.** $e^{\operatorname{arctg} x}+\frac{\ln^2(1+x^2)}{4}+\operatorname{arctg} x$. **1168.** $-\ln|\operatorname{sen} x+$ $+\cos x|$. **1169.** $\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2\sqrt{2}}\right|-2x-\sqrt{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}$. **1170.** $x+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|$.
1171. $\ln|x|+2\operatorname{arctg} x$. **1172.** $e^{\operatorname{sen}^2 x}$. **1173.** $\frac{5}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsen}\frac{x\sqrt{3}}{2}+\sqrt{4-3x^2}$.
1174. $x-\ln(1+e^x)$. **1175.** $\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\cdot\left(x\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right)$. **1176.** $\ln(e^x+$ $+\sqrt{e^{2x}-2})$. **1177.** $\frac{1}{a}\ln|\operatorname{tg} ax|$. **1178.** $-\frac{T}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi_0\right)$. **1179.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\ln x}{2-\ln x}\right|$.
1180. $-\frac{\left(\arccos\frac{x}{2}\right)^2}{2}$. **1181.** $-e^{-\operatorname{tg} x}$. **1182.** $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{2}}\right)$. **1183.** $-2\operatorname{ctg} 2x$.
1184. $\frac{(\operatorname{arcsen} x)^2}{2}-\sqrt{1-x^2}$. **1185.** $\ln(\sec x+\sqrt{\sec^2 x+1})$. **1186.** $\frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\frac{\sqrt{5}+\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{5}-\operatorname{sen} 2x}$.
1187. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)$. **Indicação.** $\int\frac{dx}{1+\cos^2 x}=\frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x+2\cos^2 x}=\int\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x+2}$.
1188. $\frac{2}{3}\sqrt{[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^3}$. **1189.** $\frac{1}{3}\operatorname{sen} h\,(x^3+3)$. **1190.** $\frac{1}{\ln 3}3^{\operatorname{tgh} x}$.
1191. a) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{\sqrt{2}}{x}$ quando $x>\sqrt{2}$; b) $-\ln(1+e^{-x})$; c) $\frac{1}{80}(5x^2-3)^8$; d) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}$; e) $\ln(\operatorname{sen} x+\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x})$. **1192.** $\frac{1}{4}\left[\frac{(2x+5)^{12}}{12}-\right.$ $\left.-\frac{5(2x+5)^{11}}{11}\right]$. **1193.** $2\left[\frac{\sqrt{x^3}}{3}-\frac{x}{2}+2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})\right]$. **1194.** $\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|$.
1195. $2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}$. **1196.** $\ln x-\ln 2\ln|\ln x+\ln 2|$. **1197.** $\frac{(\operatorname{arcsen} x)^3}{3}$.

1198. $\frac{2}{3}(e^x-2)\sqrt{e^x+1}$. **1199.** $\frac{2}{5}(\cos^2 x-5)\sqrt{\cos x}$. **1200.** $\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}\right|$. **Indicação.** Fazer $x=\frac{1}{t}$. **1201.** $-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x$. **1202.** $-\frac{x^2}{3}\sqrt{2-x^2}-$ $-\frac{4}{3}\sqrt{2-x^2}$. **1203.** $\sqrt{x^2-a^2}-|a|\arccos\frac{|a|}{x}$. **1204.** $\arccos\frac{1}{|x|}$, se $x\neq 0$ *) **Indicação.** $x=\frac{1}{t}$. **1205.** $\sqrt{x^2+1}-\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|$. **1206.** $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x}$. *Observação.* Em lugar da substituição trigonométrica pode-se utilizar a substituição $x=\frac{1}{t}$. **1207.** $\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x$. **1208.** $2\arcsin\sqrt{x}$. **1210.** $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+$ $+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|$. **1211.** $x\ln x-x$. **1212.** $x\,\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. **1213.** $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$. **1214.** $\mathrm{sen}\,x-x\cos x$. **1215.** $\frac{x\,\mathrm{sen}\,3x}{3}+\frac{\cos 3x}{9}$. **1216.** $-\frac{x+1}{e^x}$. **1217.** $-\frac{x\ln 2+1}{2^x\ln^2 2}$. **1218.** $\frac{e^{3x}}{27}(9x^2-6x+2)$. **Solução.** Em lugar de integrar várias vezes por partes, pode-se empregar o seguinte método de coeficientes indeterminados:

$$\int x^2e^{3x}\,dx=(Ax^2+Bx+C)\,e^{3x}$$

ou, depois de derivar,

$$x^2e^{3x}=(Ax^2+Bx+C)\,3e^{3x}+(2Ax+B)\,e^{3x}.$$

Simplificando por e^{3x} e igualando entre si os coeficientes que têm as mesmas potências de x, obtemos:

$$1=3A;\quad 0=3B+2A;\quad 0=3C+B,$$

donde $A=\frac{1}{3}$; $B=-\frac{2}{9}$; $C=\frac{2}{27}$. Em forma geral $\int P_n(x)\,e^{\alpha x}\,dx=Q_n(x)\,e^{\alpha x}$, onde $P_n(x)$ é o polinômio dado de grau n e $Q_n(x)$ é um polinômio de grau n com os coeficientes indeterminados. **1219.** $-e^{-x}(x^2+5)$. **Indicação.** Ver o problema 1218**. **1220.** $-3e^{-\frac{x}{3}}(x^3+9x^2+54x+162)$. **Indicação.** Ver o problema 1218**. **1221.** $-\frac{x\cos 2x}{4}+\frac{\mathrm{sen}\,2x}{8}$. **1222.** $\frac{2x^2+10x+11}{4}\,\mathrm{sen}\,2x+\frac{2x+5}{4}\cos 2x$. **Indicação.** Recomenda-se também utilizar o método dos coeficientes indeterminados na forma

$$\int P_n(x)\cos\beta x\,dx=Q_n(x)\cos\beta x+R_n(x)\,\mathrm{sen}\,\beta x,$$

---

* Daqui para frente, em casos análogos, indicar-se-á as vezes uma resposta que corresponda apenas a uma parte qualquer do campo de existência da função subintegral.

onde $P_n(x)$ é o polinômio dado de grau n e $Q_n(x)$ e $R_n(x)$ são polinômios de grau n com coeficientes indeterminados (ver o problema 1218**). **1223.** $\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}$.

1224. $x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x$. **1225.** $-\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2}$. **1226.** $2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}$.

1227. $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}$. **1228.** $\frac{x^2}{2}\operatorname{arcsen} x - \frac{1}{4}\operatorname{arcsen} x + \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}$.

1229. $x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$. **1230.** $-x\operatorname{ctg} x + \ln|\operatorname{sen} x|$. **1231.** $-\frac{x}{\operatorname{sen} x} + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. **1232.** $\frac{e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)}{2}$. **1233.** $\frac{3^x(\operatorname{sen} x + \cos x \ln 3)}{1+(\ln 3)^2}$.

1234. $\frac{e^{ax}(a\operatorname{sen} bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}$. **1235.** $\frac{x}{2}[\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)]$. **1236.** $-\frac{e^{-x^2}}{2}(x^2+1)$.

1237. $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)$. **1238.** $\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right)\ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} - 3x$.

1239. $\frac{x^2-1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| - x$. **1240.** $-\frac{\ln^2 x}{x} - \frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x}$. **1241.** $[\ln(\ln x) - 1]\times\ln x$. **1242.** $\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} 3x - \frac{x^2}{18} + \frac{1}{162}\ln(9x^2+1)$. **1243.** $\frac{1+x^2}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 - x\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. **1244.** $x(\operatorname{arcsen} x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x - 2x$.

1245. $-\frac{\operatorname{arcsen} x}{x} + \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right|$. **1246.** $-2\sqrt{1-x}\operatorname{arcsen}\sqrt{x} + 2\sqrt{x}$.

1247. $\frac{x\operatorname{tg} 2x}{2} + \frac{\ln|\cos 2x|}{4} - \frac{x^2}{2}$. **1248.** $\frac{e^{-x}}{2}\left(\frac{\cos 2x - 2\operatorname{sen} 2x}{5} - 1\right)$.

1249. $\frac{x}{2} + \frac{x\cos(2\ln x) + 2x\operatorname{sen}(2\ln x)}{10}$. **1250.** $-\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$.

Solução. Fazendo $u = x$ e $dv = \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$, obtemos $du = dx$ e $v = -\frac{1}{2(x^2+1)}$.

Donde $\int\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2} = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \int\frac{dx}{2(x^2+1)} = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$.

1251. $\frac{1}{2a^2}\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{x}{x^2+a^2}\right)$. **Indicação.** Emprega-se a identidade $1 \equiv \frac{1}{a^2}[(x^2+a^2) - x^2]$. **1252.** $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}$ $(a > 0)$. **Solução.** Fazemos $u = \sqrt{a^2-x^2}$ e $dv = dx$; donde $du = -\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ e $v = x$; temos

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int\frac{-x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = x\sqrt{a^2-x^2} - \int\frac{(a^2-x^2)-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx =$$

$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx + a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$. Portanto, $2\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx =$

$= x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsen \dfrac{x}{a}$. 1253. $\dfrac{x}{2}\sqrt{A + x^2} + \dfrac{A}{2}\ln|x + \sqrt{A + x^2}|$. **Indicação.** Ver o problema 1252*. 1254. $-\dfrac{x}{2}\sqrt{9 - x^2} + \dfrac{9}{2}\arcsen\dfrac{x}{3}$. **Indicação.** Ver o problema 1252*. 1255. $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{2}$. 1256. $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x}{x+2}\right|$. 1257. $\dfrac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\dfrac{6x-1}{\sqrt{11}}$. 1258. $\dfrac{1}{2}\ln(x^2 - 7x + 13) + \dfrac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-7}{\sqrt{3}}$. 1259. $\dfrac{3}{2}\ln(x^2 - 4x + 5) + 4\operatorname{arctg}(x-2)$. 1260. $x - \dfrac{5}{2}\ln(x^2 + 3x + 4) + \dfrac{9}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+3}{\sqrt{7}}$. 1261. $x + 3\ln(x^2 - 6x + 10) + 8\operatorname{arctg}(x-3)$. 1262. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arcsen\dfrac{4x-3}{5}$. 1263. $\arcsen(2x-1)$. 1264. $\ln\left|x + \dfrac{p}{2} + \sqrt{x^2 + px + q}\right|$. 1265. $3\sqrt{x^2 - 4x + 5}$. 1266. $-2\sqrt{1 - x - x^2} - 9\arcsen\dfrac{2x+1}{\sqrt{5}}$. 1267. $\dfrac{1}{5}\sqrt{5x^2 - 2x + 1} + \dfrac{1}{5\sqrt{5}}\ln\left(x\sqrt{5} - \dfrac{1}{\sqrt{5}} + \sqrt{5x^2 - 2x + 1}\right)$. 1268. $\ln\left|\dfrac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}\right|$. 1269. $-\arcsen\dfrac{2-x}{x\sqrt{5}}$. 1270. $\arcsen\dfrac{2-x}{(1-x)\sqrt{2}}$ $(x > \sqrt{2})$. 1271. $-\arcsen\dfrac{1}{x+1}$. 1272. $\dfrac{x+1}{2}\sqrt{x^2 + 2x + 5} + 2\ln(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 5})$. 1273. $\dfrac{2x-1}{4}\sqrt{x - x^2} + \dfrac{1}{8}\arcsen(2x-1)$. 1274. $\dfrac{2x+1}{4}\sqrt{2 - x - x^2} + \dfrac{9}{8}\arcsen\dfrac{2x+1}{3}$. 1275. $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x^2-3}{x^2-1}\right|$. 1276. $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{3 - \operatorname{sen} x}{\sqrt{3}}$. 1277. $\ln\left(e^x + \dfrac{1}{2} + \sqrt{1 + e^x + e^{2x}}\right)$. 1278. $-\ln|\cos x + 2 + \sqrt{\cos^2 x + 4\cos x + 1}|$. 1279. $-\sqrt{1 - 4\ln x - \ln^2 x} - 2\arcsen\dfrac{2 + \ln x}{\sqrt{5}}$. 1280. $\dfrac{1}{a-b}\ln\left|\dfrac{x+b}{x+a}\right|$ $(a \neq b)$. 1281. $x + 3\ln|x-3| - 3\ln|x-2|$. 1282. $\dfrac{1}{12}\ln\left|\dfrac{(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^4}\right|$. 1283. $\ln\left|\dfrac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|$. 1284. $5x + \ln\left|\dfrac{x^{\frac{1}{2}}(x-4)^{161/6}}{(x-1)^{7/3}}\right|$. 1285. $\dfrac{1}{1+x} + \ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right|$. 1286. $\dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{16}\ln\left|\dfrac{x^{16}}{(2x-1)^7(2x+1)^9}\right|$. 1287. $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{11}{(x-2)^2} - \dfrac{8}{x-2}$. 1288. $-\dfrac{9}{2(x-3)} - \dfrac{1}{2(x+1)}$. 1289. $\dfrac{8}{49(x-5)} - \dfrac{27}{49(x+2)} + \dfrac{30}{343}\ln\left|\dfrac{x-5}{x+2}\right|$. 1290. $-\dfrac{1}{2(x^2 - 3x + 2)^2}$. 1291. $x + \ln\left|\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right|$. 1292. $x + \dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| - \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x$. 1293. $\dfrac{1}{52}\ln|x-3| - \dfrac{1}{20}\ln|x-1| + \dfrac{1}{65}\ln(x^2 + 4x + 5) +$

$+\frac{7}{130}\operatorname{arctg}(x+2)$. **1294.** $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

1295. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$. **1296.** $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+$ $+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}$. **1297.** $\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{\operatorname{arctg} x}{2}$. **1298.** $\frac{2x-1}{2(x^2+2x+2)}+$ $+\operatorname{arctg}(x+1)$. **1299.** $\ln|x+1|+\frac{x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{5}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-$ $-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)$. **1300.** $\frac{3x-17}{2(x^2-4x+5)}+\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5)+\frac{15}{2}\operatorname{arctg}(x-2)$.

1301. $\frac{-x^2+x}{4(x+1)(x^2+1)}-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{4}\operatorname{arctg} x$.

1302. $\frac{3}{8}\operatorname{arctg} x-\frac{x}{4(x^4-1)}-\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$. **1303.** $\frac{15x^5+40x^3+33x}{48(1+x^2)^3}+$ $+\frac{15}{48}\operatorname{arctg} x$. **1304.** $x-\frac{x-3}{x^2-2x+2}+2\ln(x^2-2x+2)+\operatorname{arctg}(x-1)$.

1305. $\frac{1}{21}(8\ln|x^3+8|-\ln|x^3+1|)$. **1306.** $\frac{1}{2}\ln|x^4-1|-\frac{1}{4}\ln|x^8+x^4-1|-$ $-\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x^4+1-\sqrt{5}}{2x^4+1+\sqrt{5}}\right|$. **1307.** $-\frac{13}{2(x-4)^2}+\frac{3}{x-4}+2\ln\left|\frac{x-4}{x-2}\right|$.

1308. $\frac{1}{3}\left(2\ln\left|\frac{x^3+1}{x^3}\right|-\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^3+1}\right)$. **1309.** $\frac{1}{x-1}+\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|$.

1310. $\ln|x|-\frac{1}{7}\ln|x^7+1|$. **Indicação.** Fazer $1=(x^7+1)-x^7$. **1311.** $\ln|x|-$ $-\frac{1}{5}\ln|x^5+1|+\frac{1}{5(x^5+1)}$. **1312.** $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(x+1)-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}$.

1313. $-\frac{1}{9(x-1)^9}-\frac{1}{4(x-1)^8}-\frac{1}{7(x-1)^7}$. **1314.** $-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{3x^3}-$ $-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg} x$. **1315.** $2\sqrt{x-1}\left[\frac{(x-1)^3}{7}+\frac{3(x-1)^2}{5}+x\right]$. **1316.** $\frac{3}{10a^2}\,[2\sqrt[3]{(ax+b)^5}-$ $-5b\sqrt[3]{(ax+b)^2}]$. **1317.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{x+1}$. **1318.** $6\sqrt[6]{x}-3\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}-6\ln(1+\sqrt[6]{x})$.

1319. $\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}-3\ln|1+\sqrt[3]{x}|+$ $+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}$. **1320.** $\ln\left|\frac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{x+2+\sqrt{x+1}}\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}}$. **1321.** $2\sqrt{x}-$ $-2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{2}}$. **1322.** $-2\operatorname{arctg}\sqrt{1-x}$. **1323.** $\frac{\sqrt{x^2-1}}{2}(x-2)+\frac{1}{2}\ln|x+$ $+\sqrt{x^2-1}|$. **1324.** $\frac{1}{3}\ln\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}+\frac{2z}{z^3-1}$, onde $z=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$. **1325.** $-\frac{\sqrt{2x+3}}{x}$. **1326.** $-\frac{3}{4}\sqrt{x^2-x+1}-$

$-\frac{1}{8}\ln(2x-1+2\sqrt{x^2-x+1})$. 1327. $-\frac{8+4x^2+3x^4}{15}\sqrt{1-x^2}$. 1328. $\left(\frac{5}{16}x-\frac{5}{24}x^3+\frac{1}{6}x^5\right)\sqrt{1+x^2}-\frac{5}{16}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. 1329. $\left(\frac{1}{4x^4}+\frac{3}{8x^2}\right)\sqrt{x^2-1}-\frac{3}{8}\arcsen\frac{1}{x}$.
1330. $\frac{1}{2(x+1)^2}\sqrt{x^2+2x}-\frac{1}{2}\arcsen\frac{1}{x+1}$. 1331. $R+\ln|x|+\frac{3}{2}\ln\left(x-\frac{1}{2}+R\right)-\ln\left(1-\frac{x}{2}+R\right)$, onde $R=\sqrt{x^2-x+1}$. 1332. $\frac{1}{2}\frac{1+x^2}{\sqrt{1+2x^2}}$.
1333. $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{x^{-4}+1}+1}{\sqrt[4]{x^{-4}+1}-1}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x^{-4}+1}$. 1334. $\frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}$.
1335. $\frac{1}{10}\ln\frac{(z-1)^2}{z^2+z+1}+\frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}$, onde $z=\sqrt[3]{1+x^5}$. 1336. $-\frac{1}{8}\frac{4+3x^3}{x(2+x^3)^{2/3}}$.
1337. $-2\sqrt[3]{(x^{-\frac{3}{4}}+1)^2}$. 1338. $\operatorname{sen}x-\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3x$. 1339. $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3x-\frac{1}{5}\cos^5x$. 1340. $\frac{\operatorname{sen}^3x}{3}-\frac{\operatorname{sen}^5x}{5}$. 1341. $\frac{1}{4}\cos^8\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\cos^6\frac{x}{2}$.
1342. $\frac{\operatorname{sen}^2x}{2}-\frac{1}{2\operatorname{sen}^2x}-2\ln|\operatorname{sen}x|$. 1343. $\frac{3x}{8}-\frac{\operatorname{sen}2x}{4}+\frac{\operatorname{sen}4x}{32}$.
1344. $\frac{x}{8}-\frac{\operatorname{sen}4x}{32}$. 1345. $\frac{x}{16}-\frac{\operatorname{sen}4x}{64}+\frac{\operatorname{sen}^32x}{48}$. 1346. $\frac{5}{16}x+\frac{1}{12}\operatorname{sen}6x+\frac{1}{64}\operatorname{sen}12x-\frac{1}{144}\operatorname{sen}^36x$. 1347. $-\operatorname{ctg}x-\frac{\operatorname{ctg}^3x}{3}$. 1348. $\operatorname{tg}x+\frac{2}{3}\operatorname{tg}^3x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5x$. 1349. $-\frac{\operatorname{ctg}^3x}{3}-\frac{\operatorname{ctg}^5x}{5}$. 1350. $\operatorname{tg}x+\frac{\operatorname{tg}^3x}{3}-2\operatorname{ctg}2x$.
1351. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2x+3\ln|\operatorname{tg}x|-\frac{3}{2\operatorname{tg}^2x}-\frac{1}{4\operatorname{tg}^4x}$. 1352. $\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}+2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.
1353. $\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right]$. 1354. $\frac{-\cos x}{4\operatorname{sen}^4x}-\frac{3\cos x}{8\operatorname{sen}^2x}+\frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. 1355. $\frac{\operatorname{sen}4x}{16\cos^44x}+\frac{3\operatorname{sen}4x}{32\cos^24x}+\frac{3}{32}\ln\left|\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right|$.
1356. $\frac{1}{5}\operatorname{tg}5x-x$. 1357. $-\frac{\operatorname{ctg}^2x}{2}-\ln|\operatorname{sen}x|$. 1358. $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3x+\operatorname{ctg}x+x$.
1359. $\frac{3}{2}\operatorname{tg}^2\frac{x}{3}+\operatorname{tg}^3\frac{x}{3}-3\operatorname{tg}\frac{x}{3}+3\ln\left|\cos\frac{x}{3}\right|+x$. 1360. $\frac{x^2}{4}-\frac{\operatorname{sen}2x^2}{8}$.
1361. $-\frac{\operatorname{ctg}^3x}{3}$. 1362. $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\cos^4x}+\frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^{10}x}-\frac{3}{16}\sqrt[3]{\cos^{16}x}$. 1363. $2\sqrt{\operatorname{tg}x}$.
1364. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{z^2+z\sqrt{2}+1}{z^2-z\sqrt{2}+1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{z\sqrt{2}}{z^2-1}$, onde $z=\sqrt{\operatorname{tg}x}$. 1365. $-\frac{\cos8x}{16}+\frac{\cos2x}{4}$. 1366. $-\frac{\operatorname{sen}25x}{50}+\frac{\operatorname{sen}5x}{10}$. 1367. $\frac{3}{5}\operatorname{sen}\frac{5x}{6}+3\operatorname{sen}\frac{x}{6}$.
1368. $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\cos x$. 1369. $\frac{\operatorname{sen}2ax}{4a}+\frac{x\cos2b}{2}$. 1370. $\frac{t\cos\varphi}{2}-\frac{\operatorname{sen}(2\omega t+\varphi)}{4\omega}$.

1371. $\frac{\text{sen } x}{2} + \frac{\text{sen } 5x}{20} + \frac{\text{sen } 7x}{28}$. **1372.** $\frac{1}{24}\cos 6x - \frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{8}\cos 2x$.

1373. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\text{tg}\frac{x}{2}}{2-\text{tg}\frac{x}{2}}\right|$. **1374.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\text{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|$. **1375.** $x - \text{tg}\frac{x}{2}$.

1376. $-x + \text{tg } x + \sec x$. **1377.** $\ln\left|\frac{\text{tg}\frac{x}{2}-5}{\text{tg}\frac{x}{2}-3}\right|$. **1378.** $\text{arctg}\left(1+\text{tg}\frac{x}{2}\right)$.

1379. $\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}\ln|2\text{ sen } x + 3\cos x|$. **Solução.** Fazemos $3\text{ sen } x + 2\cos x \equiv \equiv \alpha(2\text{ sen } x + 3\cos x) + \beta(2\text{ sen } x + 3\cos x)'$. Donde $2\alpha - 3\beta = 3$, $3\alpha + 2\beta = 2$ e, portanto, $\alpha = \frac{12}{13}$, $\beta = -\frac{5}{13}$. Temos $\int\frac{3\text{ sen } x + 2\cos x}{2\text{ sen } x + 3\cos x}dx = \frac{12}{13}\int dx - \frac{5}{13}\int\frac{(2\text{ sen } x + 3\cos x)'}{2\text{ sen } x + 3\cos x}dx = \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}\ln|2\text{ sen } x + 3\cos x|$.

1380. $-\ln|\cos x - \text{sen } x|$. **1381.** $\frac{1}{2}\text{arctg}\left(\frac{\text{tg } x}{2}\right)$. **Indicação.** Dividir o numerador e o denominador por $\cos^2 x$. **1382.** $\frac{1}{\sqrt{15}}\text{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}\text{ tg } x}{\sqrt{5}}\right)$. **Indicação.** Ver o problema 1381. **1383.** $\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{2\text{ tg } x + 3 - \sqrt{13}}{2\text{ tg } x + 3 + \sqrt{13}}\right|$. **Indicação.** Ver o problema 1381.

1384. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\text{tg } x - 5}{\text{tg } x}\right|$. **Indicação.** Ver o problema 1381. **1385.** $-\frac{1}{2(1-\cos x)^2}$.

1386. $\ln(1+\text{sen}^2 x)$. **1387.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\text{sen } 2x}{\sqrt{2}-\text{sen } 2x}$. **1388.** $\frac{1}{4}\ln\frac{5-\text{sen } x}{1-\text{sen } x}$.

1389. $\frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2\text{ tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\frac{3\text{ tg}\frac{x}{2}-1}{2\sqrt{2}}$. **Indicação.** Utilizar a identidade $\frac{1}{(2-\text{sen } x)(3-\text{sen } x)} \equiv \frac{1}{2-\text{sen } x} - \frac{1}{3-\text{sen } x}$. **1390.** $-x + 2\ln\left|\frac{\text{tg}\frac{x}{2}}{\text{tg}\frac{x}{2}+1}\right|$. **Indicação.** Utilizar a identidade $\frac{1-\text{sen } x+\cos x}{1+\text{sen } x-\cos x} \equiv -1 + \frac{2}{1+\text{sen } x-\cos x}$. **1391.** $\frac{\cos\text{h}^3 x}{3} - \cos\text{h } x$. **1392.** $\frac{3x}{8} + \frac{\text{sen h } 2x}{4} + \frac{\text{sen h } 4x}{32}$. **1393.** $\frac{\text{sen h}^4 x}{4}$. **1394.** $-\frac{x}{8} + \frac{\text{sen h } 4x}{32}$. **1395.** $\ln\left|\text{tgh}\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{\cos\text{h } x}$. **1396.** $-2\text{ ctgh } 2x$. **1397.** $\ln(\cos\text{h } x) - \frac{\text{tgh}^2 x}{2}$. **1398.** $x - \text{ctg h } x -$

$-\frac{\operatorname{ctgh}^3 x}{3}$. **1399.** $\operatorname{arctg}(\operatorname{tgh} x)$. **1400.** $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{3\operatorname{tgh}\frac{x}{2}+2}{\sqrt{5}}\right)\left(\text{ou } \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}(e^x\sqrt{5})\right)$.

1401. $-\frac{\operatorname{sen h}^2 x}{2}-\frac{\operatorname{sen h} 2x}{4}-\frac{x}{2}$. **Indicação.** Utilizar a identidade $\frac{-1}{\operatorname{sen h} x-\cos h\, x}\equiv \operatorname{sen h} x+\cos h\, x$. **1402.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}\cos h\, x+\sqrt{\cos h\, 2x})$.

1403. $\frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+2\arcsen\frac{x+1}{2}$. **1404.** $\frac{x}{2}\sqrt{2+x^2}+\ln(x+\sqrt{2+x^2})$.

1405. $\frac{x}{2}\sqrt{9+x^2}-\frac{9}{2}\ln(x+\sqrt{9+x^2})$. **1406.** $\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+2}+\frac{1}{2}\ln(x-1+ +\sqrt{x^2-2x+2})$. **1407.** $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-4}-2\ln|x+\sqrt{x^2-4}|$. **1408.** $\frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x}- -\frac{1}{8}\ln|2x+1+2\sqrt{x^2+x}|$. **1409.** $\frac{x-3}{2}\sqrt{x^2-6x-7}-8\ln|x-3+ +\sqrt{x^2-6x-7}|$. **1410.** $\frac{1}{64}(2x+1)(8x^2+8x+17)\sqrt{x^2+x+1}+\frac{27}{128}\ln(2x+1+ +2\sqrt{x^2+x+1})$. **1411.** $2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$. **1412.** $\frac{x-1}{4\sqrt{x^2-2x+5}}$. **1413.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

1414. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right|$. **1415.** $\frac{e^{2x}}{2}\left(x^4-2x^3+5x^2-5x+\frac{7}{2}\right)$.

1416. $\frac{1}{6}\left(x^3+\frac{x^2}{2}\operatorname{sen} 6x+\frac{x}{6}\cos 6x-\frac{1}{36}\operatorname{sen} 6x\right)$. **1417.** $-\frac{x\cos 3x}{6}+\frac{\operatorname{sen} 3x}{18}+ +\frac{x\cos x}{2}-\frac{\operatorname{sen} x}{2}$. **1418.** $\frac{e^{2x}}{8}(2-\operatorname{sen} 2x-\cos 2x)$. **1419.** $\frac{e^x}{2}\left(\frac{2\operatorname{sen} 2x+\cos 2x}{5}- -\frac{4\operatorname{sen} 4x+\cos 4x}{17}\right)$. **1420.** $\frac{e^x}{2}[x(\operatorname{sen} x+\cos x)-\operatorname{sen} x]$. **1421.** $-\frac{x}{2}+ +\frac{1}{3}\ln|e^x-1|+\frac{1}{6}\ln(e^x+2)$. **1422.** $x-\ln(2+e^x+2\sqrt{e^{2x}+x+1})$.

1423. $\frac{1}{3}\left[x^3\ln\frac{1+x}{1-x}+\ln(1-x^2)+x^2\right]$. **1424.** $x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})- -2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2x$. **1425.** $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{9}{100}\right)\arccos(5x-2)- -\frac{5x+6}{100}\sqrt{20x-25x^2-3}$. **1426.** $\frac{\operatorname{sen} x\cos h\, x-\cos x\operatorname{sen h} x}{2}$. **1427.** $I_n= =\frac{1}{2(n-1)a^2}\left[\frac{x}{(x^2-a^2)^{n-1}}+(2n-3)I_{n-1}\right]$; $I_2=\frac{1}{2a^2}\left(\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)$; $I_3=\frac{1}{4a^2}\left[\frac{x(3x^2+5a^2)}{2a^2(x^2+a^2)^2}+\frac{3}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right]$. **1428.** $I_n=-\frac{\cos x\operatorname{sen}^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$; $I_4=\frac{3x}{8}-\frac{\cos x\operatorname{sen}^3 x}{4}-\frac{3\operatorname{sen} 2x}{16}$; $I_5=-\frac{\cos x\operatorname{sen}^4 x}{5}-\frac{4}{15}\cos x\operatorname{sen}^2 x- -\frac{8}{15}\cos x$. **1429.** $I_n=\frac{\operatorname{sen} x}{(n-1)\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$; $I_3=\frac{\operatorname{sen} x}{2\cos^2 x}+$

$+\frac{1}{2}\ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$; $I_4=\frac{\operatorname{sen}x}{3\cos^3 x}+\frac{2}{3}\operatorname{tg}x$. **1430.** $I_n=-x^n e^{-x}+nI_{n-1}$; $I_{10}=-e^{-x}(x^{10}+10x^9+10\cdot 9x^8+\ldots+10\cdot 9\cdot 8\ldots 2x+10\cdot 9\ldots 1)$. **1431.** $\frac{1}{\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}(x-1)}{\sqrt{7}}$. **1432.** $\ln\sqrt{x^2-2x+2}-4\operatorname{arctg}(x-1)$.

1433. $\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{1}{4}\ln\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x+1)$. **1434.** $\frac{1}{5}\ln\sqrt{\frac{x^2}{x^2+5}}$. **1435.** $2\ln\left|\frac{x+3}{x+2}\right|-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$. **1436.** $\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right|-\frac{1}{x+1}\right)$. **1437.** $\frac{1}{4}\left(\frac{x}{x^2+2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$. **1438.** $\frac{1}{4}\left(\frac{2x}{1-x^2}+\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right)$. **1439.** $\frac{1}{6}\frac{x-2}{(x^2-x+1)^2}+\frac{1}{6}\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. **1440.** $\frac{x(3+2\sqrt{x})}{1-2\sqrt{x}}$. **1441.** $-\frac{1}{x}-\frac{4}{3x\sqrt{x}}-\frac{1}{2x^2}$. **1442.** $\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)$. **1443.** $\sqrt{2x}-\frac{3}{5}\sqrt[3]{(2x)^5}$. **1444.** $\frac{3}{\sqrt[3]{x+1}}$. **1445.** $\frac{2x-1}{\sqrt{4x^2-2x+1}}$. **1446.** $-2(\sqrt[4]{5-x}-1)^2-4\ln(1+\sqrt[4]{5-x})$. **1447.** $\ln|x+\sqrt{x^2-1}|-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$. **1448.** $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$. **1449.** $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x^2+1}{\sqrt{2}}$. **1450.** $\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$. **1451.** $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{x}\right|-\frac{1}{8\sqrt{3}}\operatorname{arcsen}\frac{2(x+1)}{x+4}$. **Indicação.** $\frac{1}{x^2+4x}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4}\right)$. **1452.** $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-9}-\frac{9}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-9}|$. **1453.** $\frac{1}{16}(8x-1)\sqrt{x-4x^2}+\frac{1}{64}\operatorname{arcsen}(8x-1)$. **1454.** $\ln\left|\frac{x}{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}\right|$. **1455.** $\frac{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}{3}-\frac{(x+1)}{2}\sqrt{x^2+2x+2}-\frac{1}{2}\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})$. **1456.** $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3x^3}$. **1457.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1}\right|$. **1458.** $-\frac{1}{3}\ln|z-1|+\frac{1}{6}\ln(z^2+z+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}$, onde $z=\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$. **1459.** $\frac{5}{2}\ln(x^2+\sqrt{1+x^4})$. **1460.** $\frac{3x}{8}+\frac{\operatorname{sen}2x}{4}+\frac{\operatorname{sen}4x}{32}$. **1461.** $\ln|\operatorname{tg}x|-\operatorname{ctg}^2 x-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4 x$. **1462.** $-\operatorname{ctg}x-\frac{2\sqrt{(\operatorname{ctg}x)^3}}{3}$. **1463.** $\frac{5}{12}(\cos^2 x-6)\sqrt[5]{\cos^2 x}$. **1464.** $\frac{\cos 5x}{20\operatorname{sen}^4 5x}-\frac{3\cos 5x}{40\operatorname{sen}^2 5x}+\frac{3}{40}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{5x}{2}\right|$. **1465.** $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}$. **1466.** $\frac{1}{4}\operatorname{sen}2x$. **1467.** $\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+2\ln\left|\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. **1468.** $-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{4\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}$. **1469.** $\frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}x}{\sqrt{10}}\right)$.

1470. $\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg} x + 1)$. **1471.** $\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x + \sec x| - \frac{1}{2}\operatorname{cosec} x$. **1472.** $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}\right)$. **1473.** $\ln|\operatorname{tg} x + 2 + \sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x + 1}|$.

1474. $\frac{1}{a}\ln(\operatorname{sen} ax + \sqrt{a^2 + \operatorname{sen}^2 ax})$. **1475.** $\frac{1}{3}x\operatorname{tg} 3x + \frac{1}{9}\ln|\cos 3x|$. **1476.** $\frac{x^2}{4} - \frac{x\operatorname{sen} 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8}$. **1477.** $\frac{1}{3}e^{x^3}$. **1478.** $\frac{e^{2x}}{4}(2x-1)$. **1479.** $\frac{x^3}{3}\ln\sqrt{1-x} - \frac{1}{6}\ln|x-1| - \frac{x^3}{18} - \frac{x^2}{12} - \frac{x}{2}$. **1480.** $\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg} x - \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

1481. $\frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3x}{2} - \frac{1}{10}\operatorname{sen}\frac{5x}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}$. **1482.** $-\frac{1}{1+\operatorname{tg} x}$. **1483.** $\ln|1 + \operatorname{ctg} x| - \operatorname{ctg} x$. **1484.** $\frac{\operatorname{sen h}^2 x}{2}$. **1485.** $-2\cos h\sqrt{1-x}$. **1486.** $\frac{1}{4}\ln\cos h\, 2x$.

1487. $-x\operatorname{ctg h} x + \ln|\operatorname{sen h} x|$. **1488.** $\frac{1}{2e^x} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\ln|e^x - 2|$. **1489.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{e^x - 3}{2}$.

1490. $\frac{4}{7}\sqrt[4]{(e^x+1)^7} - \frac{4}{3}\sqrt[4]{(e^x+1)^3}$. **1491.** $\frac{1}{\ln 4}\ln\left|\frac{1+2^x}{1-2^x}\right|$. **1492.** $-\frac{10^{-2x}}{2\ln 10}\left(x^2 - 1 + \frac{x}{\ln 10} + \frac{1}{2\ln^2 10}\right)$. **1493.** $2\sqrt{e^x+1} + \ln\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}$. **1494.** $\ln\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right| - \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$. **1495.** $\frac{1}{4}\left(x^4\operatorname{arcsen}\frac{1}{x} + \frac{x^2+2}{3}\sqrt{x^2-1}\right)$. **1496.** $\frac{x}{2}(\cos\ln x + \operatorname{sen}\ln x)$. **1497.** $\frac{1}{5}\left(-x^2\cos 5x + \frac{2}{5}x\operatorname{sen} 5x + 3x\cos 5x + \frac{2}{25}\cos 5x - \frac{3}{5}\operatorname{sen} 5x\right)$. **1498.** $\frac{1}{2}\left[(x^2-2)\operatorname{arctg}(2x+3) + \frac{3}{4}\ln(2x^2+6x+5) - \frac{x}{2}\right]$.

1499. $\frac{1}{2}\sqrt{x-x^2} + \left(x - \frac{1}{2}\right)\operatorname{arcsen}\sqrt{x}$. **1500.** $\frac{x|x|}{2}$.

Capítulo V

1501. $b - a$. **1502.** $v_0 T + g\frac{T^2}{2}$. **1503.** 3. **1504.** $\frac{2^{10}-1}{\ln 2}$. **1505.** 156. **Indicação.** Dividimos o segmento do eixo OX, desde $x = 1$ até $x = 5$, em partes tais, que as abscissas dos pontos de divisão formem uma progressão geométrica: $x_0 = 1$, $x_1 = x_0 q$, $x_2 = x_0 q^2$, ..., $x_n = x_0 q^n$. **1506.** $\ln\frac{b}{a}$. **Indicação.** Ver o problema 1505.

1507. $1 - \cos x$. **Indicação.** Utilizar a fórmula $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha + \ldots + \operatorname{sen} n\alpha = \frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\left[\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha\right]$. **1508.** 1) $\frac{dI}{da} = -\frac{1}{\ln a}$; 2) $\frac{dI}{db} = \frac{1}{\ln b}$. **1509.** $\ln x$.

1510. $-\sqrt{1+x^4}$. **1511.** $2\,xe^{-x^4} - e^{-x^2}$. **1512.** $\frac{\cos x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x^2}$. **1513.** $x = n\pi (n = 1, 2, 3, \ldots)$. **1514.** $\ln 2$. **1515.** $-\frac{3}{8}$. **1516.** $e^x - e^{-x} = 2 \operatorname{sen h} x$. **1517.** $\operatorname{sen} x$. **1518.** $\frac{1}{2}$.

Solução. A soma $s_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \ldots + \frac{n-1}{n}\right)$ pode ser considerada como soma integral para a função $f(x) = x$ no segmento $[0, 1]$. Por isso $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$. **1519.** $\ln 2$. **Solução.** A soma $s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$ pode ser considerada como soma integral para a função $f(x) = \frac{1}{1+x}$ no segmento $[0, 1]$, onde os pontos da divisão têm a forma $x_k = \frac{k}{n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Por isso, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$. **1520.** $\frac{1}{p+1}$.

1521. $\frac{7}{3}$. **1522.** $\frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}$. **1523.** $\frac{7}{4}$. **1524.** $\frac{16}{3}$. **1525.** $-\frac{2}{3}$. **1526.** $\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}$. **1527.** $\ln\frac{9}{8}$.
1528. $35\frac{1}{15} - 32\ln 3$. **1529.** $\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{7}$. **1530.** $\ln\frac{4}{3}$. **1531.** $\frac{\pi}{16}$.
1532. $1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$. **1533.** $\frac{\pi}{4}$. **1534.** $\frac{\pi}{6}$. **1535.** $\frac{1}{3}\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **1536.** $\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$. **1537.** $\frac{2}{3}$.
1538. $\ln 2$. **1539.** $1 - \cos 1$. **1540.** 0. **1541.** $\frac{8}{9\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6}$. **1542.** $\operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}$.
1543. $\operatorname{sen h} 1 = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$. **1544.** $\operatorname{tgh}(\ln 3) - \operatorname{tgh}(\ln 2) = \frac{1}{5}$. **1545.** $-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen h} 2\pi$. **1546.** 2. **1547.** Diverge. **1548.** $\frac{1}{1-p}$, se $p < 1$; diverge se $p \geqslant 1$.
1549. Diverge. **1550.** $\frac{\pi}{2}$. **1551.** Diverge. **1552.** 1. **1553.** $\frac{1}{p-1}$, se $p > 1$; diverge se $p \leqslant 1$. **1554.** π. **1555.** $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$. **1556.** Diverge. **1557.** Diverge. **1558.** $\frac{1}{\ln 2}$. **1559.** Diverge.
1560. $\frac{1}{\ln a}$. **1561.** Diverge. **1562.** $\frac{1}{k}$. **1563.** $\frac{\pi^2}{8}$. **1564.** $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\ln 3$. **1565.** $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.
1566. Diverge. **1567.** Converge. **1568.** Diverge. **1569.** Converge. **1570.** Converge.
1571. Converge. **1572.** Diverge. **1573.** Converge. **1574.** **Indicação.** $B(p, q) = \int_0^{1/2} f(x)\,dx + \int_{1/2}^1 f(x)\,dx$, onde $f(x) = x^{p-1}(1-x)^{q-1}$; já que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\,x^{1-p} = 1$ e $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{1-q} f(x) = 1$, então ambas as integrais são convergentes quando

$1 - p < 1$ e $1 - q < 1$, isto é, quando $p > 0$ e $q > 0$. **1575. Indicação.** $\Gamma(p) = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^\infty f(x)\,dx$, onde $f(x) = x^{p-1}e^{-x}$. A primeira integral é convergente para $p > 0$, a segunda, para qualquer p. **1576.** Não. **1577.** $2\sqrt{2}\int_1^2 \sqrt{t}\,dt$.

1578. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 t}}$. **1579.** $\int_{\ln 2}^{\ln 3} dt$. **1580.** $\int_{\infty}^{\infty} \frac{f(\operatorname{arctg} t)}{1 + t^2}\,dt$. **1581.** $x = (b - a)\,t + a$.

1582. $4 - 2\ln 3$. **1583.** $8 - \frac{9}{2\sqrt{3}}\pi$. **1584.** $2 - \frac{\pi}{2}$. **1585.** $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$. **1586.** $\frac{\pi}{2\sqrt{1 + a^2}}$.

1587. $1 - \frac{\pi}{4}$. **1588.** $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$. **1589.** $4 - \pi$. **1590.** $\frac{1}{5}\ln 112$. **1591.** $\ln \frac{7 + 2\sqrt{7}}{9}$.

1592. $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$. **1593.** $\frac{\pi a^3}{8}$. **1594.** $\frac{\pi}{2}$. **1599.** $\frac{\pi}{2} - 1$. **1600.** 1. **1601.** $\frac{e^2 + 3}{8}$.

1602. $\frac{1}{2}(e^\pi + 1)$. **1603.** 1. **1604.** $\frac{a}{a^2 + b^2}$. **1605.** $\frac{b}{a^2 + b^2}$. **1606. Solução.** $\Gamma(p + 1) = \int_{\infty}^{\infty} x^p e^{-x}\,dx$. Utilizando a fórmula de integração por partes, fazemos $x^p = u$, $e^{-x}\,dx = dv$. Daí,

$$du = px^{p-1}\,dx, \quad v = -e^{-x},$$

e

$$\Gamma(p + 1) = \left[-x^p e^{-x}\right]_0^\infty + p\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx = p\Gamma(p) \qquad (*)$$

Se p é um número natural, utilizando a fórmula (*) p vezes e tendo-se em conta que

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1,$$

obtemos: $\Gamma(p + 1) = p!$

1607. $I_{2k} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2k}\,\frac{\pi}{2}$, se $n = 2k$, número par;

$I_{2k+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2k}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k + 1)}$, se $n = 2k + 1$, número ímpar.

$$I_9 = \frac{128}{315}; \qquad I_{10} = \frac{63\pi}{512}.$$

1608. $\frac{(p - 1)\,(q - 1)!}{(p + q - 1)!}$. **1609.** $\frac{1}{2}B\left(\frac{m + 1}{2}, \frac{n + 1}{2}\right)$. **Indicação.** Fazer $\operatorname{sen}^2 x = t$.

1610. a) Mais; b) menos; c) mais. **Indicação.** Construir o gráfico da função subintegra para os valores do argumento no segmento de integração. **1611.** a) O primeiro; b) o segundo; c) o primeiro. **1612.** $\frac{1}{3}$. **1613.** a. **1614.** $\frac{1}{2}$. **1615.** $\frac{3}{8}$. **1616.** $2 \arcsen \frac{1}{3}$. **1617.** $2 < I < \sqrt{5}$. **1618.** $\frac{2}{9} < I < \frac{2}{7}$. **1619.** $\frac{2}{13}\pi < I < \frac{2}{7}\pi$. **1620.** $0 < I < \frac{\pi^2}{32}$. **Indicação.** A função subintegral cresce monotonamente. **1621.** $\frac{1}{2} < I < \frac{\sqrt{2}}{2}$. **1623.** $s = \frac{32}{3}$. **1624.** 1. **1625.** $\frac{1}{2}$. **Indicação.** Ter em conta o sinal da função. **1626.** $4\frac{1}{4}$. **1627.** 2. **1628.** $\ln 2$. **1629.** $m^2 \ln 3$. **1630.** πa^2. **1631.** 12. **1632.** $\frac{4}{3}p^2$. **1633.** $4\frac{1}{2}$. **1634.** $10\frac{2}{3}$. **1635.** 4. **1636.** $\frac{32}{3}$. **1637.** $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$. **1638.** $e + \frac{1}{e} - 2(\cos h\, 1 - 1)$. **1639.** $ab[2\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3})]$. **1640.** $\frac{3}{8}\pi a^2$. **Indicação.** Ver o apêndice VI, fig. 27. **1641.** $2a^2e^{-1}$. **1642.** $\frac{4}{3}a^2$. **1643.** 15π. **1644.** $\frac{9}{2}\ln 3$. **1645.** 1. **1646.** $3\pi a^2$. **Indicação.** Ver o apêndice VI, fig. 23. **1647.** $a^2\left(2 + \frac{\pi}{2}\right)$. **Indicação.** Ver o apêndice VI, fig. 24. **1648.** $2\pi + \frac{4}{3}$ e $6\pi - \frac{4}{3}$. **1649.** $\frac{16}{3}\pi - \frac{4\sqrt{3}}{3}$ e $\frac{32}{3}\pi + \frac{4\sqrt{3}}{3}$. **1650.** $\frac{8}{3}\pi ab$. **1651.** $3\pi a^2$. **1652.** $\pi(b^2 + 2ab)$. **1653.** $6\pi a^2$. **1654.** $\frac{3}{2}a^2$. **Indicação.** Para o laço o parâmetro t varia entre os limites $0 \leqslant t \leqslant +\infty$. Ver o apêndice VI, fig. 22. **1655.** $\frac{3}{2}\pi a^2$. **Indicação.** Ver o apêndice VI, fig. 28. **1656.** $8\pi^3 a^2$. **Indicação.** Ver o apêndice VI, fig. 30. **1657.** $\frac{\pi a^2}{8}$. **1658.** a^2. **1659.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **Indicação.** Ver o apêndice VI, fig. 33. **1660.** $\frac{9}{2}\pi$. **1661.** $\frac{14 - 8\sqrt{2}}{3}a^2$. **1662.** $\frac{\pi p^2}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}}$. **1663.** $a^2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **1664.** $\pi\sqrt{2}$. **Indicação.** Passar às coordenadas polares. **1665.** $\frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$. **1666.** $\sqrt{h^2 - a^2}$. **Indicação.** Utilizar a fórmula $\cos h^2 \alpha - \operatorname{sen} h^2 \alpha = 1$. **1667.** $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$. **1668.** $\sqrt{1 + e^2} - \sqrt{2} + \ln \frac{(\sqrt{1 + e^2} - 1)(\sqrt{2} + 1)}{e}$. **1669.** $1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. **1670.** $\ln(e + \sqrt{e^2 - 1})$. **1671.** $\ln(2 + \sqrt{3})$. **1672.** $\frac{1}{4}(e^2 + 1)$. **1673.** $a \ln \frac{a}{b}$. **1674.** $2a\sqrt{3}$. **1675.** $\ln \frac{e^{2b} - 1}{e^{2a} - 1} + a - b = \ln \frac{\operatorname{sen} h\, b}{\operatorname{sen} h\, a}$. **1676.** $\frac{1}{2}aT^2$.

Indicação. Ver o apêndice VI, fig. 29. **1677.** $\frac{4(a^3-b^3)}{ab}$. **1678.** $16a$. **1679.** $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+$ $+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$. **1680.** $8a$. **1681.** $2a[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)]$. **1682.** $\frac{\sqrt{5}}{2}+$ $+\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. **1683.** $\frac{a\sqrt{1+m^2}}{m}$. **1684.** $\frac{1}{2}[4+\ln 3]$. **1685.** $\frac{\pi a^5}{30}$ **1686.** $\frac{4}{3}\pi ab^2$. **1687.** $\frac{a^3\pi}{4}(e^2+4-e^{-2})$. **1688.** $\frac{3}{8}\pi^2$. **1689.** $v_x=\frac{\pi}{4}$. **1690.** $v_y=\frac{4}{7}\pi$. **1691.** $v_x=$ $=\frac{\pi}{2}$; $v_y=2\pi$. **1692.** $\frac{16\pi a^3}{5}$. **1693.** $\frac{32}{15}\pi a^3$. **1694.** $\frac{4}{3}\pi p^3$. **1695.** $\frac{3}{10}\pi$. **1696.** $\frac{\pi a^3}{2}(15-$ $-16\ln 2)$. **1697.** $2\pi^2a^3$. **1698.** $\frac{\pi R^2H}{2}$. **1699.** $\frac{16}{15}\pi h^2a$. **1701.** a) $5\pi^2a^3$; b) $6\pi^3a^3$; c) $\frac{\pi a^3}{6}(9\pi^2-16)$. **1702.** $\frac{32}{105}\pi a^3$. **1703.** $\frac{8}{3}\pi a^3$. **1704.** $\frac{4}{21}\pi a^3$. **1705.** $\frac{h}{3}\Big(AB+$ $+\frac{Ab+aB}{2}+ab\Big)$. **1706.** $\frac{\pi abh}{3}$. **1707.** $\frac{128}{105}a^3$. **1708.** $\frac{8}{3}\pi a^2b$. **1709.** $\frac{1}{2}\pi a^2h$. **1710.** $\frac{16}{3}a^3$. **1711.** $\pi a^2\sqrt{pq}$. **1712.** $\pi abh\left(1+\frac{h^2}{3c^2}\right)$. **1713.** $\frac{4}{3}\pi abc$. **1714.** $\frac{8\pi}{3}(\sqrt{17^3}-$ $-1)$; $\frac{16}{3}\pi a^2(5\sqrt{5}-8)$. **1715.** $2\pi[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)]$. **1716.** $\pi(\sqrt{5}-\sqrt{2})+$ $+\pi\ln\frac{2(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{5}+1}$. **1717.** $\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$. **1718.** $\frac{\pi a^2}{4}(e^2-e^{-2}+4)=\frac{\pi a^2}{2}(2+$ $+\operatorname{sen h} 2)$. **1719.** $\frac{12}{5}\pi a^2$. **1720.** $\frac{\pi}{3}(e-1)(e^2+e+4)$. **1721.** $4\pi^2ab$. **Indicação.** Temos $y=b\pm\sqrt{a^2-x^2}$. Tomando o sinal positivo, obtemos a superfície externa do toro, enquanto que com o sinal negativo obtém-se a superfície interna do mesmo. **1722.** 1) $2\pi b^2+\frac{2\pi ab}{e}\operatorname{arcsen}\varepsilon$; 2) $2\pi a^2+\frac{\pi b^2}{\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$, onde $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ (excentricidade da elípse). **1723.** a) $\frac{64\pi a^2}{3}$; b) $16\pi^2a^2$; c) $\frac{32}{3}\pi a^2$. **1724.** $\frac{128}{5}\pi a^2$. **1725.** $2\pi a^2(2-\sqrt{2})$. **1726.** $\frac{128}{5}\pi a^2$. **1727.** $M_X=\frac{b}{2}\sqrt{a^2+b^2}$; $M_Y=\frac{a}{2}\sqrt{a^2+b^2}$. **1728.** $M_a=\frac{ab^2}{2}$; $M_b=\frac{a^2b}{2}$. **1729.** $M_X=M_Y=\frac{a^3}{6}$; $\bar{x}=\bar{y}=\frac{a}{3}$. **1730.** $M_X=$ $=M_Y=\frac{3}{5}a^2$; $\bar{x}=\bar{y}=\frac{2}{5}a$. **1731.** $2\pi a^2$. **1732.** $x=0$; $\bar{y}=\frac{a}{4}\,\frac{2+\operatorname{sen h} 2}{\operatorname{sen h} 1}$. **1733.** $\bar{x}=\frac{a\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$; $\bar{y}=0$. **1734.** $\bar{x}=\pi a$; $\bar{y}=\frac{4}{3}a$. **1735.** $\bar{x}=\frac{4a}{3\pi}$; $\bar{y}=\frac{4b}{3\pi}$. **1736.** $\bar{x}=\bar{y}=\frac{9}{20}$. **1737.** $\bar{x}=\pi a$; $\bar{y}=\frac{5}{6}a$. **1738.** $(0;\ 0;\ \frac{a}{2})$. **Solução.** Dividimos o hemisfério em zonas esféricas elementares, de área $d\sigma$, por meio de planos horizontais. Temos $d\sigma=2\pi a\,dz$, onde dz é a altura da zona. Donde:

$$z=\frac{2\pi\int_0^a az\,dz}{2\pi a^2}=\frac{a}{2}.$$

Por força da simetria $\bar{x} = \bar{y} = 0$. **1739.** A distância de 3/4 da altura, a partir do vértice do cone. **Solução.** Dividimos o cone em elementos por meio de planos paralelos à base. A massa de cada camada elementar será $dm = \gamma\pi\rho^2 dz$, onde γ é a densidade, z é a distância desde o plano secante até o vértice do cone, $\rho = \frac{r}{h} z$. Donde

$$\bar{z} = \frac{\pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} z^3\, dz}{\frac{1}{3}\pi r^2 h} = \frac{3}{4} h.$$

1740. $\left(0;\ 0;\ \frac{3}{8} a\right)$. **Solução.** Por simetria $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Para determinar $\bar{z}$ dividimos o hemisfério em camadas elementares por meio de planos paralelos ao plano horizontal. A massa de cada uma destas camadas elementares será $dm = \gamma\pi r^2\, dz$, onde γ é a densidade, z a distância entre o plano secante e a base do hemisfério e $r = \sqrt{a^2 - z^2}$, o raio da seção. Temos:

$$= \frac{\pi \int_0^a (a^2 - z^2)\, z\, dz}{\frac{2}{3}\pi a^3} = \frac{3}{8} a.$$

1741. $I = \pi a^3$. **1742.** $I_a = \frac{1}{3} ab^3$; $I_b = \frac{1}{3} a^3 b$. **1743.** $I = \frac{4}{15} hb^3$. **1744.** $I_a = \frac{1}{4}\pi ab^3$; $I_b = \frac{1}{4}\pi a^3 b$. **1745.** $I = \frac{1}{2}\pi(R_2^4 - R_1^4)$. **Solução.** Dividimos o anel em aneis elementares concêntricos. A massa de um destes elementos será $dm = \gamma \cdot 2\pi r\, dr$ e o momento de inércia $I = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{1}{2}\pi(R_2^4 - R_1^4)$; $(\gamma = 1)$. **1746.** $I = \frac{1}{10}\pi R^4 H\gamma$. **Solução.** Dividimos o cone em uma série de tubos cilíndricos elementares, paralelos ao eixo do cone. O volume de um destes tubos elementares será $dV = 2\pi rh\, dr$, onde r é o raio do tubo (isto é, a distância até o eixo do cone), $h = H\left(1 - \frac{r}{R}\right)$ é a altura do tubo; neste caso o momento de inércia é $I = \gamma \int_0^R 2\pi H\left(1 - \frac{r}{R}\right) r^3\, dr = \frac{\gamma\pi R^4 H}{10}$, onde γ é a densidade do cone. **1747.** $I = \frac{2}{5} Ma^2$. **Solução.** Dividimos a esfera em uma série de tubos cilíndricos elementares, cujos eixos sejam o diâmetro dado. O volume elementar será $dV = 2\pi rh\, dr$, onde r é o raio do tubo e $h = 2a\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}$, sua altura. Neste caso, o momento de inércia será

$$I = 4\pi a\gamma \int_0^a \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}\, r^3 dr = \frac{8}{15}\pi a^5 \gamma,$$

onde γ é a densidade da esfera e como a massa $M = \frac{4}{3}\pi a^3\gamma$, teremos que $I = \frac{2}{5} Ma^2$. **1748.** $V = 2\pi^2 a^2 b$; $S = 4\pi^2 ab$. **1749.** a) $\bar{x} = \bar{y} = \frac{2}{5} a$; b) $\bar{x} = y = \frac{}{10} p$.

1750. a) $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = \frac{4}{3}\frac{r}{\pi}$. **Indicação.** Os eixos das coordenadas são escolhidos de tal forma, que o eixo OX coincide com o diâmetro e a origem das coordenadas com o centro do círculo; b) $\bar{x} = \frac{h}{3}$. **Solução.** O volume do corpo que é um cone duplo formado pela rotação de um triângulo em torno de sua base, é igual a $V = \frac{1}{3}\pi b h^2$, onde b é a base e h, a altura do triângulo. Pelo teorema de Guldin este mesmo volume $V = 2\pi\bar{x}\frac{1}{2}bh$, onde $\bar{x}$ é a distância do centro de gravidade à base. Daí $\bar{x} = \frac{h}{3}$. 1751. $v_0 t - \frac{gt^2}{2}$. 1752. $\frac{c^2}{2g}\ln\left(1 + \frac{v_0^2}{c^2}\right)$. 1753. $x = \frac{v_0}{\omega}\operatorname{sen}\omega t$; $v_{med} = \frac{2}{\pi}v_0$. 1754. $S = 10^4\,m$. 1755. $v = \frac{A}{b}\ln\left(\frac{a}{a - bt}\right)$; $h = \frac{A}{b^2}\left[bt_1 - (a - bt_1)\ln\frac{a}{a - bt_1}\right]$. 1756. $A = \frac{\pi\gamma}{2}R^2H^2$. **Indicação.** A força elementar (a gravidade) é igual ao peso da água de uma camada de espessura dx, isto é, $dF = \gamma\pi R^2\,dx$, onde γ é o peso da unidade de volume de água. Portanto, o trabalho elementar da força é $dA = \gamma\pi R^2(H - x)\,dx$, onde x é o nível da água. 1757. $A = \frac{\pi}{12}\gamma R^2H^2$. 1758. $A = \frac{\pi\gamma}{4}R^4TM \approx 0{,}79 \cdot 10^4 = 0{,}79 \cdot 10^7$ kgf · m. 1759. $A = \gamma\pi R^3H$. 1760. $A = \frac{mgh}{1 + \frac{h}{R}}$; $A_\infty = mgR$. **Solução.** A força que atua sobre o corpo de massa m é igual a $F = k\frac{mM}{r^2}$, onde r é a distância até o centro da Terra. Como para $r = R$, temos que $F = mg$, então $kM = gR^2$. O trabalho procurado terá a forma $A = \int_R^{R+h} k\frac{mM}{r^2}\,dr = kmM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R + h}\right) = \frac{mgh}{1 + \frac{h}{R}}$. Quando $h = \infty$, temos que $A_\infty = mgR$. 1761. $1{,}8 \cdot 10^4$ erg. **Solução.** A força de interação das cargas será $F = \frac{e_0e_1}{x^2}$ din. Portanto, o trabalho necessário para transportar a carga e_1 do ponto x_1 ao ponto x_2 será: $A = e_0e_1\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x^2} = e_0e_1\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) = 1{,}8 \cdot 10^4$ erg. 1762. $A = 800\,\pi\ln 2$ kgf · m. **Solução.** Para o processo isotérmico $pv = p_0v_0$ O trabalho realizado na expansão do gás desde o volume v_0 até o volume v_1 é igual a

$$A = \int_{v_0}^{v_1} p\,dv = p_0v_0\ln\frac{v_1}{v_0}.$$

1763. $A \approx 15000$ kgf · m. **Solução.** Para o processo adiabático é válida a lei de Poisson $pv^k = p_0 v_0^k$, onde $k \approx 1{,}4$. Donde

$$A = \int_{v_0}^{v_1} \frac{p_0 v_0^k}{v^k}\, dv = \frac{p_0 v_0}{k-1}\left[1 - \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{k-1}\right].$$

1764. $A = \frac{4}{3}\pi\mu Pa$. **Solução.** Se a é o raio da base do eixo, a pressão sobre a unidade de superfície de apoio será $p = \frac{P}{\pi a^2}$. A força de atrito de um anel de largura dr que se encontre à distância r do centro, será igual a $\frac{2\mu P}{a^2} r\, dr$. O trabalho da força de atrito sobre este anel durante uma revolução completa é $dA = \frac{4\pi\mu P}{a^2} r^2\, dr$. Pelo qual o trabalho total é $A = \frac{4\pi\mu P}{a^2}\int_0^a r^2\, dr = \frac{4}{3}\pi\mu Pa$. **1765.** $\frac{1}{4} MR^2\omega^2$. **Solução.** A energia cinética de um elemento do disco $dK = \frac{v^2 dm}{2} = \frac{\rho r^2\omega^2}{2} d\sigma$, onde $d\sigma = 2\pi r\, dr$ é o elemento de superfície; r, sua distância ao eixo de rotação; ρ, a densidade superficial, $\rho = \frac{M}{\pi R^2}$. Desta forma, $dK = \frac{M\omega^2}{2\pi R^2} r^2\, d\sigma$. Donde $K = \frac{M\omega^2}{R^2}\int_0^R r^3\, dr = \frac{MR^2\omega^2}{4}$. **1766.** $K = \frac{3}{20} MR^2\omega^2$. **1767.** $K = \frac{M}{5} R^2\omega^2 = 2{,}3 \times 10^8$ kgf · m. **Indicação.** A quantidade de trabalho necessário é igual à reserva de energia cinética. **1768.** $p = \frac{bh^2}{6}$. **1769.** $P = \frac{(a+2b)\,h^2}{6} \approx 11{,}3 \cdot 10^3 T$. **1770.** $P = ab\gamma\pi h$. **1771.** $P = \frac{\pi R^2 H}{3}$ (componente vertical dirigida de baixo para cima). **1772.** $533\frac{1}{3}$ g. **1773.** 99,8 cal. **1774.** $M = \frac{hb^2p}{2}$ gf · cm. **1775.** $\frac{kMm}{a(a+l)}$ (k é a constante da gravidade). **1776.** $\frac{\pi p a^4}{8\mu l}$. **Solução.** $Q = \int_0^a v \cdot 2\pi r\, dr = \frac{2\pi p}{4\mu l}\int_0^a (a^2 - r^2)\, r\, dr = \frac{\pi p}{2\mu l}\left[\frac{a^2r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^a = \frac{\pi p a^4}{8\mu l}$. **1777.** $Q = \int_0^{2b} va\, dy = \frac{2}{3} p \frac{ab^3}{\mu l}$. **Indicação.** Dirigir o eixo das abscissas para o lado maior, inferior, do retângulo e o eixo das ordenadas perpendicularmente a este, em sua parte média. **1778.** **Solução.** $S = \int_{v_1}^{v_2} \frac{1}{a}\, dv$, de outro lado, $\frac{dv}{dt} = a$, donde, $dt = \frac{1}{a}\, dv$, portanto, o tempo necessário para embalar

é $t = \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{a} = S$. 1779. $M_X = -\int_0^x \frac{Q}{l}(x-t)\,dt + \frac{Q}{2}x = -\frac{Q}{l}\left[xt - \frac{t^2}{2}\right]_0^x + \frac{Q}{2}x = \frac{Qx}{2}\left(1 - \frac{x}{l}\right)$. 1780. $M_x = -\int_0^x (x-t)\,kt\,dt + Ax = \frac{kx}{6}(l^2 - x^2)$.
1781. $Q = 0{,}12\ TRI_0^2$ cal. **Indicação.** Utilizar a lei de Joule-Lenz.

Capítulo VI

1782. $V = \frac{2}{3}(y^2 - x^2)\,x$. 1783. $S = \frac{2}{3}(x+y)\sqrt{4z^2 + 3(x-y)^2}$. 1784. $f\left(\frac{1}{2};\ 3\right) = \frac{5}{3}$; $f(1;\ -1) = -2$. 1785. $\frac{y^2 - x^2}{2xy}$, $\frac{x^2 - y^2}{2xy}$, $\frac{y^2 - x^2}{2xy}$, $\frac{2xy}{x^2 - y^2}$.
1786. $f(x, x^2) = 1 + x - x^2$. 1787. $z = \frac{R^4}{1 - R^2}$. 1788. $f(x) = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|}$. **Indicação.** Representar a função dada na forma $f\left(\frac{y}{x}\right) = \pm\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}$ e substituir $\frac{y}{x}$ por x. 1789. $f(x, y) = \frac{x^2 - xy}{2}$. **Solução.** Designamos $x + y = u$, $x - y = v$. Então $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$; $f(u, v) = \frac{u+v}{2}\cdot\frac{u-v}{2} + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 = \frac{u^2 - uv}{2}$. Resta somente trocar a denominação dos argumentos u e v em x e y. 1790. $f(u) = u^2 + 2u$; $z = x - 1 + \sqrt{y}$. **Indicação.** Na identidade $x = 1 + f(\sqrt{x} - 1)$ fazemos $\sqrt{x} - 1 = u$; então $x = (u + 1)^2$ e portanto, $f(u) = u^2 + 2u$. 1791. $f(y) = \sqrt{1 + y^2}$; $z = \frac{x}{|x|}\sqrt{x^2 + y^2}$. **Solução.** Quando $x = 1$ temos a identidade $\sqrt{1 + y^2} = 1\cdot f\left(\frac{y}{1}\right)$, isto é, $f(y) = \sqrt{1 + y^2}$. Então $f\left(\frac{y}{x}\right) = \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$ e $z = x\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$.
1792. a) Círculo unidade, com centro na origem das coordenadas, incluída a circunferência ($x^2 + y^2 \leqslant 1$); b) a bissetriz $y = x$ dos I e III ângulos coordenados; c) semiplano situado sobre a reta $x + y = 0$ ($x + y > 0$); d) faixa compreendida entre as retas $y = \pm 1$, incluíndo estas retas ($-1 \leqslant y \leqslant 1$); e) quadrado formado pelos segmentos das retas $x = \pm 1$ e $y = \pm 1$, incluídos seus lados ($-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$); f) parte do plano adjacente ao eixo OX e compreendida entre as retas $y = \pm x$, incluíndo estas retas e escluindo a origem das coordenadas ($-x \leqslant y \leqslant x$ quando $x > 0$, $x \leqslant y \leqslant -x$ quando $x \leqslant 0$); g) duas faixas $x \geqslant 2$, $-2 \leqslant y \leqslant 2$ e $x \leqslant -2$, $-2 \leqslant y \leqslant 2$; h) anel compreendido entre as circunferências $x^2 + y^2 = a^2$ e $x^2 + y^2 = 2a^2$, incluida a fronteira; i) as faixas $2n\pi \leqslant x \leqslant (2n + 1)\pi$, $y \geqslant 0$ e $(2n + 1)\pi \leqslant x \leqslant (2n + 2)\pi$, $y \leqslant 0$, onde n é um número inteiro; j) a parte do plano situada por cima da parábola $y = -x^2$ ($x^2 + y > 0$); l) todo o plano XOY; m) todo o plano XOY, menos a origem das coordenadas; n) a parte do plano, situada por cima da parábola $y^2 = x$ e a direita do eixo OY, inclusive os pontos do eixo OY e excluindo os da parábola ($x \geqslant 0$, $y > \sqrt{x}$); o) todo o plano, menos os pontos das retas $x = 1$ e $y = 0$; p) a família de aneis concêntricos $2\pi k \leqslant x^2 + y^2 \leqslant \pi(2k + 1)$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$). 1793. a) I octante (incluíndo a fronteira); b) I, III, VI e VIII octantes (menos a fronteira); c) um cubo, limitado pelos planos $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ e $z = \pm 1$, incluídas suas faces; d) uma esfera de raio 1 com centro na origem das coordenadas, incluída sua superfície. 1794. a) Um plano; as linhas de nível são retas, para-

lelas à reta $x + y = 0$; b) um parabolóide de revolução; as linhas de nível são círculos concêntricos cujo centro está situado na origem das coordenadas; c) parabolóide hiperbólica; as linhas de nível são hipérboles equiláteras; d) um cone de 2ª ordem; as linhas de nível são hipérboles equiláteras; e) cilindro parabólico, cujas geratrizes são paralelas à reta $x + y + 1 = 0$; as linhas de nível são retas paralelas; f) superfície lateral de uma pirâmide quadrangular; as linhas de nível são contornos de quadrados; g) as linhas de nível são parábolas $y = Cx^2$; h) as linhas de nível são parábolas $y = C\sqrt{x}$; i) as linhas de nível são circunferências $C(x^2 + y^2) = 2x$. **1795.** a) Parábolas $y = C - x^2 (C > 0)$; b) hipérboles $xy = C$ $(|C| \leqslant 1)$; c) circunferências $x^2 + y^2 = C^2$; d) retas $y = ax + C$; e) retas $y = Cx$ $(x \neq 0)$. **1796.** a) Planos paralelos ao plano $x + y + z = 0$; b) esferas concêntricas, cujo centro está na origem das coordenadas; c) quando $u > 0$, hiperbolóides de revolução de uma folha em torno do eixo OZ; quando $u < 0$, hiperbolóides de revolução de duas folhas, em torno do mesmo eixo; ambas as famílias de superfícies estão divididas pelo cone $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ $(u = 0)$. **1797.** a) 0; b) 0; c) 2; d) e^k; e) não existe o limite; f) não existe o limite. **Indicação.** No ponto b) passar às coordenadas polares. Nos pontos e) e f) examinar as variações de x e y ao longo das retas $y = kx$ e demonstrar que a expressão dada pode tender a limites diferentes, que dependem do valor de k escolhido. **1798.** Contínua. **1799.** a) Ponto de descontinuidade quando $x = 0$ e $y = 0$; b) todos os pontos da reta $x = y$ (linha de descontinuidade); c) a linha de descontinuidade é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$; d) as linhas de descontinuidade são os eixos das coordenadas. **1800. Indicação.** Fazendo $y = y_1 = \text{const}$, obtemos a função $\varphi_1(x) = \frac{2xy_1}{x^2 + y_1^2}$, que é contínua em todas as partes, já que quando $y_1 \neq 0$ o denominador é $x^2 + y_1^2 \neq 0$, enquanto $y_1 = 0$, $\varphi_1(x) \equiv 0$. Analogamente, quando $x = x_1 = \text{const}$ a função $\varphi_2(y) = \frac{2x_1 y}{x_1^2 + y^2}$ é contínua em todas as partes. Pelo conjunto das variáveis x e y, a função z tem uma descontinuidade no ponto $(0, 0)$, já que não existe o $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z$. De fato, passando a coordenadas polares $(x = r\cos\varphi,\ y = r\,\text{sen}\,\varphi)$, obtemos $z = \text{sen}\,2\varphi$, donde se vê que se $x \to 0$ e $y \to 0$, de maneira que $\varphi = \text{const}$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$, então $z \to \text{sen}\,2\varphi$. Como estes valores extremos da função z dependem da direção de φ, z não tem limite quando $x \to 0$ e $y \to 0$. **1801.** $\frac{\partial z}{\partial x} = 3(x^2 - ay)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3(y^2 - ax)$. **1802.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2y}{(x+y)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x}{(x+y)^2}$. **1803.** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}$. **1804.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$. **1805.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$. **1806.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}(x + \sqrt{x^2 + y^2})}$. **1807.** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$. **1808.** $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$. **1809.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2} e^{\text{sen}\frac{y}{x}} \cos\frac{y}{x}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} e^{\text{sen}\frac{y}{x}} \cos\frac{y}{x}$. **1810.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{xy^2\sqrt{2x^2 - 2y^2}}{|y|(x^4 - y^4)}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{yx^2\sqrt{2x^2 - 2y^2}}{|y|(x^4 - y^4)}$. **1811.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \text{ctg}\,\frac{x+a}{\sqrt{y}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x+a}{2y\sqrt{y}}\,\text{ctg}\,\frac{x+a}{\sqrt{y}}$. **1812.** $\frac{\partial u}{\partial x} = yz(xy)^{z-1}$, $\frac{\partial x}{\partial y} = xz(xy)^{z-1}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = (xy)^z \ln(xy)$. **1813.** $\frac{\partial u}{\partial x} = yz^{xy}\ln z$, $\frac{\partial u}{\partial y} = xz^{xy}\ln z$, $\frac{\partial u}{\partial z} =$

$= xyz^{xy-1}$. **1814.** $f'_x(2, 1) = \frac{1}{2}, f'_u(2, 1) = 0$. **1815.** $f'_x(1; 2; 0) = 1$, $f'_y(1; 2; 0) = \frac{1}{2}$, $f'_z(1, 2, 0) = \frac{1}{2}$. **1820.** $-\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$. **1821.** r. **1826.** $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \varphi(x)$. **1827.** $z = \frac{x^2}{2} + y^2 \ln x + \operatorname{sen} y - \frac{1}{2}$. **1828.** 1) $\operatorname{tg} \alpha = 4$, $\operatorname{tg} \beta = \infty$, $\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{4}$; 2) $\operatorname{tg} \alpha = \infty$, $\operatorname{tg} \beta = 4$, $\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{4}$. **1829.** $\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{1}{2} h$, $\frac{\partial S}{\partial b} = \frac{1}{2} h$, $\frac{\partial S}{\partial h} = \frac{1}{2} (a + b)$. **1830. Indicação.** Comprovar que a função é igual a zero em todo o eixo OX e em todo o eixo OY e empregar a definição das derivadas parciais. Convencer-se de que $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$. **1831.** $\Delta f = 4\Delta x + \Delta y + 2\Delta x^2 + 2\Delta x\Delta y + \Delta x^2\Delta y$; $df = 4dx + dy$; a) $\Delta f - df = 8$; b) $\Delta f - df = 0{,}062$. **18[illegible].** $dz = 3(x^2 - y)\,dx + 3(y^2 - x)\,dy$. **1834.** $dz = 2xy^3dx + 3x^2y^2\,dy$. **1835.** $dz = \frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2} (y\,dx - x\,dy)$. **1836.** $dz = \operatorname{sen} 2x\,dx - \operatorname{sen} 2y\,dy$. **1837.** $dz = y^2x^{y-1}\,dx + x^y(1 + y \ln x)\,dy$. **1838.** $dz = \frac{2}{x^2 + y^2} (x\,dx + y\,dy)$. **1839.** $df = \frac{1}{x + y}\left(dx - \frac{x}{y}\,dy\right)$. **1840.** $dz = 0$. **1841.** $dz = \frac{2}{x \operatorname{sen} \frac{2y}{x}} \cdot \left(dy - \frac{y}{x}\,dx\right)$. **1842.** $df(1, 1) = dx - 2dy$. **1843.** $du = yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz$. **1844.** $du = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x\,dx + y\,dy + z\,dz)$. **1845.** $du = \left(xy + \frac{x}{y}\right)^{z-1} \left[\left(y + \frac{1}{y}\right) z\,dx + \left(1 - \frac{1}{y^2}\right) xz\,dy + \left(xy + \frac{x}{y}\right) \ln \left(xy + \frac{x}{y}\right) dz\right]$. **1846.** $du = \frac{z^2}{x^2y^2 + z^4} \left(y\,dx + x\,dy - \frac{2xy}{z}\,dz\right)$. **1847.** $df(3, 4, 5) = \frac{1}{25} (5\,dz - 3dx - 4\,dy)$. **1848.** $dl = 0{,}062$ cm; $\Delta l = 0{,}065$ cm. **1849.** 75 cm^3 (em relação às dimensões interiores). **1850.** $\frac{1}{8}$ cm. **Indicação.** Fazer com que a diferencial de área do setor seja igual a zero e daí achar a diferencial do raio. **1851.** a) 1,00; b) 4,998; c) 0,273. **1853.** Com precisão de até 4 m (mais exatamente 4,25 m). **1854.** $\pi \frac{\alpha g - \beta l}{g\sqrt{lg}}$. **1855.** $d\alpha = \frac{1}{\rho} (dy \operatorname{sen} \alpha - dx \operatorname{sen} \alpha)$. **1856.** $\frac{dz}{dt} = \frac{e^t(t \ln t - 1)}{t \ln^2 t}$. **1857.** $\frac{du}{dt} = \frac{t}{\sqrt{y}} \operatorname{ctg} \frac{x}{\sqrt{y}}\left(6 - \frac{x}{2y^2}\right)$. **1858.** $\frac{du}{dt} = 2t \ln t \operatorname{tg} t + \frac{(t^2 + 1) \operatorname{tg} t}{t} + \frac{(t^2 + 1) \ln t}{\cos^2 t}$. **1859.** $\frac{du}{dt} = 0$. **1860.** $\frac{dz}{dx} = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}(\cos x \operatorname{ctg} x - \operatorname{sen} x \ln \operatorname{sen} x)$. **1861.** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$; $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$. **1862.** $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\frac{dz}{dx} = x^y\left[\varphi'(x) \ln x + \frac{y}{x}\right]$. **1863.** $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf'_u(u, v) + ye^{xy}f'_v(u, v)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -2yf'_u(u, v) + xe^{xy}f'_v(u, v)$. **1864.** $\frac{\partial z}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial v} = 1$. **1865.** $\frac{\partial z}{\partial x} = y\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) f'\left(xy + \frac{y}{x}\right)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x + \frac{1}{x}\right) f'\left(xy + \frac{y}{x}\right)$; $\frac{du}{dx} = f'_x(x, y, z) + \varphi'(x) f'_y(x, y, z) + f'_z(x, y, z) [\Psi'_x(x, y) + \Psi'_y(x, y) \varphi'(x)]$. **1873.** O perímetro cresce com uma velocidade de 2m/s, a área aumenta com a velocidado

de 70 m²/s. **1874.** $\frac{1+2t^3+3t^4}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$. **1875.** $20\sqrt{5-2\sqrt{2}}$ km/h. **1876.** $-\frac{9\sqrt{3}}{2}$. **1877.** 1. **1878.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **1879.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **1880.** $\frac{68}{13}$. **1881.** $\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{3}$. **1882.** a) $(2;\ 0)$; b) $(0;\ \ )$ e $(1;\ 1)$; c) $(7;\ 2;\ 1)$. **1884.** $9\mathbf{i}-3\mathbf{j}$. **1885.** $\frac{1}{4}(5\mathbf{i}-3\mathbf{j})$. **1886.** $6\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$. **1887.** $|\text{grad } u|=6$; $\cos\alpha=\frac{2}{3}$, $\cos\beta=-\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=\frac{1}{3}$. **1888.** $\cos\varphi=\frac{3}{\sqrt{10}}$. **1889.** $\operatorname{tg}\varphi=8{,}944$; $\varphi\approx 83°37'$. **1891.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{abcy^2}{(b^2x^2+a^2y^2)^{3/2}}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{abcxy}{(b^2x^2+a^2y^2)^{3/2}}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{abcx^2}{(b^2x^2+a^2y^2)^{3/2}}$. **1892.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2(y-x^2)}{(x^2+y)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{2x}{(x^2+y)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{(x^2+y)^2}$. **1893.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{xy}{(2xy+y^2)^{3/2}}$. **1894.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$. **1895.** $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3}$. **1896.** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}=1$. **1897.** $\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=\alpha\beta\gamma x^{\alpha-1}y^{\beta-1}z^{\gamma-1}$. **1898.** $\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}=-x^2y\cos(xy)-2x\operatorname{sen}(xy)$. **1899.** $f''_{xx}(0,\ 0)=m(m-1)$; $f''_{xy}(0,\ 0)=mn$; $f''_{yy}(0,\ 0)=n(n-1)$.
1902. Indicação. Comprovar, utilizando as regras de derivação e a definição de derivada parcial, que $f'_x(x,\ y)=y\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]$ (quando $x^2+y^2\neq 0$), $f'_x(0,\ 0)=0$ e, portanto, $f'_x(0,\ y)=-y$ quando $x=0$ e para qualquer y. Donde $f''_{xy}(0,\ y)=-1$, e em particular, $f''_{xy}(0,\ 0)=-1$. Analogamente achamos que $f''_{yx}(0,\ 0)=1$. **1903.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f'_u(u,\ v)+4x^2f''_{uu}(u,\ v)+4xyf''_{uv}(u,\ v)+y^2f''_{vv}(u,\ v)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'_v(u,\ v)+4xyf''_{uu}(u,\ v)+2(x^2+y^2)f''_{uv}(u,\ v)+xyf''_{vv}(u,\ v)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2f'_u(u,\ v)+4y^2f''_{uu}(u,\ v)+4xyf''_{uv}(u,\ v)+x^2f''_{vv}(u,\ v)$. **1904.** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{xx}+2f''_{xz}\varphi'_x+f''_{zz}(\varphi'_x)^2+f'_z\varphi''_{xx}$. **1905.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{uu}(\varphi'_x)^2+2f''_{uv}\varphi'_x\psi'_x+f''_{vv}(\psi'_x)^2+f'_u\varphi''_{xx}+f'_v\psi''_{xx}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{uu}\varphi'_x\varphi'_y+f''_{uv}(\varphi'_x\psi'_y+\psi'_x\varphi'_y)+f''_{vv}\psi'_x\psi'_y+f'_u\varphi''_{xy}+f'_v\psi''_{xy}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{uu}(\varphi'_y)^2+2f''_{uv}\varphi'_y\psi'_y+f''_{vv}(\psi'_y)^2+f'_u\varphi''_{yy}+f'_v\psi''_{yy}$. **1914.** $u(x,\ y)=\varphi(x)+\psi(y)$. **1915.** $u(x,\ y)=x\varphi(y)+\psi(y)$. **1916.** $d^2z=e^{xy}[(y\,dx+x\,dy)^2+2dx\,dy]$. **1917.** $d^2u=2(x\,dy\,dz+y\,dx\,dz+z\,dx\,dy)$. **1918.** $d^2z=4\varphi''(t)\cdot(x\,dx+y\,dy)^2+2\varphi'(t)\,(dx^2+dy^2)$. **1919.** $dz=\left(\frac{x}{y}\right)^{xy}\cdot\left(y\ln\frac{ex}{y}\,dx+x\ln\frac{x}{ey}\,dy\right)$; $d^2z=\left(\frac{x}{y}\right)^{xy}\left[\left(y^2\ln^2\frac{ex}{y}+\frac{y}{x}\right)dx^2+2\left(xy\ln\frac{ex}{y}\ln\frac{x}{ey}+\ln\frac{x}{y}\right)dx\,dy+\left(x^2\ln^2\frac{x}{ey}-\frac{x}{y}\right)dy^2\right]$. **1920.** $d^2z=a^2f''_{uu}(u,\ v)\,dx^2+2abf''_{uv}(u,\ v)\,dx\,dy+b^2f''_{vv}(u,\ v)\,dy^2$. **1921.** $d^2z=(ye^xf'_v+e^{2y}f''_{uu}+2ye^{x+y}f''_{uv}+y^2e^{2x}f''_{vv})\,dx^2+2(e^yf'_u+e^xf'_v+xe^{2y}f''_{uu}+e^{x+y}(1+xy)\,f''_{uv}+ye^{2x}f''_{vv})\cdot dx\,dy+(xe^yf'_u+x^2e^{2y}f''_{uu}+2xe^{x+y}f''_{uv}+e^{2x}f''_{vv})\,dy^2$. **1922.** $d^3z=e^x(\cos y\,dx^3-3\operatorname{sen} y\,dx^2\,dy-3\cos y\,dx\,dy^2+\operatorname{sen} y\,dy^3)$. **1923.** $d^3z=-y\cos x\,dx^3-3\operatorname{sen} x\,dx^2\,dy-3\cos y\,dx\,dy^2+x\operatorname{sen} y\,dy^3$. **1924.** $df(1;\ 2)=0$; $d^2f(1;\ 2)=6\,dx^2+2\,dx\,dy+4{,}5\,dy^2$. **1925.** $d^2f(0,\ 0,\ 0)=2\,dx^2+4\,dy^2+6\,dz^2-4\,dx\,dy+8\,dx\,dz+4\,dy\,dz$.

1926. $xy + C$. **1927.** $x^3y - \frac{y^3}{3} + \text{sen}\, x + C$. **1928.** $\frac{x}{x+y} + \ln|x+y| + C$. **1929.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + 2\,\text{arctg}\,\frac{x}{y} + C$. **1930.** $\frac{x}{y} + C$. **1931.** $\sqrt{x^2+y^2} + C$. **1932.** $a = -1$, $b = -1$, $z = \frac{x-y}{x^2+y^2} + C$. **1933.** $x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz + C$. **1934.** $x^3 + 2xy^2 + 3xz + y^2 - yz - 2z + C$. **1935.** $x^2yz - 3xy^2z + 4x^2y^2 + 2x + y + 3z + C$. **1936.** $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + C$. **1937.** $\sqrt{x^2+y^2+z^2} + C$. **1938.** $\lambda = -1$. ndicação. Escrever a condição de diferencial exata para a expressão $X\,dx + Y\,dy$. **1939.** $f'_x = f'_y$. **1940.** $u = \int_a^{xy} f(z)\,dz + C$. **1941.** $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}$; $\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{3b^6x}{a^4y^5}$. **1942.** A equação que determina y é a equação de um par de retas. **1943.** $\frac{dy}{dx} = \frac{y^x \ln y}{1 - xy^{x-1}}$. **1944.** $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-1}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y}{(1-y)^3}$. **1945.** $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} = 3$ ou -1; $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=1} = 8$ ou -8. **1946.** $\frac{dy}{dx} = \frac{x+ay}{ax-y}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(a^2+1)(x^2+y^2)}{(ax-y)^3}$. **1947.** $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2y}{x^2}$. **1948.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2-y^2}{xy-z^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{6y^2-3xz-2}{3(xy-z^2)}$. **1949.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z\,\text{sen}\,x - \cos y}{\cos x - y\,\text{sen}\,z}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x\,\text{sen}\,y - \cos z}{\cos x - y\,\text{sen}\,z}$. **1950.** $\frac{\partial z}{\partial x} = -1$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}$. **1951.** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2x}{a^2z}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2y}{b^2z}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{c^4(b^2-y^2)}{a^2b^2z^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{c^4(a^2-x^2)}{a^2b^2z^3}$. **1953.** $\frac{dz}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} \varphi'_x & \varphi'_y \\ \psi'_x & \psi'_y \end{vmatrix}}{\psi'_y}$. **1954.** $dz = -\frac{x}{z}dx - \frac{y}{z}dy$; $d^2z = \frac{y^2-a^2}{z^3}dx^2 - 2\frac{xy}{z^3}dx\,dy + \frac{x^2-a^2}{z^3}dy^2$. **1955.** $dz = 0$; $d^2z = \frac{4}{15}(dx^2+dy^2)$. **1956.** $dz = \frac{z}{1-z}(dx+dy)$; $d^2z = \frac{z}{(1-z)^3}\cdot(dx^2 + 2dx\,dy + dy^2)$. **1961.** $\frac{dy}{dx} = \infty$; $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{5}$; $\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{4}{25}$. **1962.** $dy = \frac{y(z-1)}{x(y-z)}dx$; $dz = \frac{z(x-y)}{x(y-z)}dx$; $d^2y = -d^2z = -\frac{a}{x^3(y-z)^3}[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2]\,dx^2$. **1963.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 1$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$; $\frac{\partial v}{\partial x} = -1$; $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$; $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 2$; $\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = 1$; $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$. **1964.** $du = \frac{y}{1+y}dx + \frac{v}{1+y}dy$; $dv = \frac{1}{1+y}dx - \frac{v}{1+y}dy$; $d^2u = -d^2v = \frac{2}{(1+y)^2}dx\,dy - \frac{2v}{(1+y)^2}dy^2$. **1965.** $du = \frac{\psi'_v\,dx - \varphi'_v\,dy}{\begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{vmatrix}}$; $dv = \frac{-\psi'_u\,dx + \psi'_u dy}{\begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{vmatrix}}$.

1966. a) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c\,\text{sen}\,v}{u}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{c\cos v}{u}$; b) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}(v+u)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}(v -$

$-u)$; c) $dz = \frac{1}{2e^{2u}}[e^{u-v}(v+u)\,dx + e^{u+v}(v-u)\,dy]$. **1967.** $\frac{\partial z}{\partial x} = F'_r(r,\varphi)\cos\varphi - F'_\varphi(r,\varphi)\frac{\operatorname{sen}\varphi}{r}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = F'_r(r,\varphi)\operatorname{sen}\varphi + F'_\varphi(r,\varphi)\frac{\cos\varphi}{r}$. **1968.** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c}{a}\cos\varphi\operatorname{ctg}\psi$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c}{b}\operatorname{sen}\varphi\operatorname{ctg}\psi$. **1968.** $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 0$. **1970.** $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$. **1971.** a) $\frac{d^2x}{dy^2} - 2y\frac{dx}{dy} = 0$; b) $\frac{d^3x}{dy^3} = 0$. **1972.** $\operatorname{tg}\mu = \frac{r}{r'}$. **1973.** $K = \frac{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{3/2}}$.

1974. $\frac{\partial z}{\partial u} = 0$. **1975.** $u\frac{\partial z}{\partial u} - z = 0$. **1976.** $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0$. **1977.** $\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{2u}\frac{\partial z}{\partial v}$. **1978.** $\frac{\partial w}{\partial v} = 0$. **1979.** $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$. **1980.** $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{1}{2}$. **1981.** a) $2x - 4y - z - 5 = 0$; $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-5}{-1}$; b) $3x + 4y - 6z = 0$; $\frac{x-4}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{-6}$; c) $x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha - R = 0$; $\frac{x - R\cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y - R\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{z-R}{0}$.
1982. $\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$; $\pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$; $\pm\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. **1983.** $3x + 4y + 12z - 169 = 0$. **1985.** $x + 4y + 6z = \pm 21$. **1986.** $x \pm y \pm z = \pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **1987.** Nos pontos $(1;\ \pm 1;\ 0)$ os planos tangentes são paralelos ao plano XOZ; nos pontos $(0;0;0)$ e $(2;\ 0;0)$, ao plano YOZ. A superfície carece de pontos nos quais o plano tangente seja paralelo ao XOY. **1991.** $\frac{\pi}{3}$.

1994. A projeção sobre o plano XOY é: $\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 - xy - 1 = 0. \end{cases}$

A projeção sobre o plano YOZ é: $\begin{cases} x = 0 \\ \frac{3y^2}{4} + z^2 - 1 = 0. \end{cases}$

A projeção sobre o plano XOZ é: $\begin{cases} y = 0, \\ \frac{3x^2}{4} + z^2 - 1 = 0. \end{cases}$

Indicação. A linha de contato da superfície com o cilindro, que projeta esta superfície sobre um plano é o lugar geométrico dos pontos, nos quais o plano tangente à superfície dada é perpendicular ao plano de projeção. **1996.** $f(x+h, y+k) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2(ax+by)h + 2(bx+cy)k + ah^2 + 2bhk + ck^2$. **1997.** $f(x, y) = 1 - (x+2)^2 + 2(x+2)(y-1) + 3(y-1)^2$. **1998.** $\Delta f(x,y) = 2h + k + h^2 + 2hk + h^2k$. **1999.** $f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + 2(x-1)(y-1) - (y-1)(z-1)$. **2000.** $f(x+h, y+k, z+l) = f(x,y,z) + 2[h(x-y-z) + k(y-x-z) + l(z-x-y)] + f(h,k,l)$. **2001.** $y + xy + \frac{3x^2y - y^3}{3!}$. **2002.** $1 - \frac{x^2+y^2}{2!} + \frac{x^4 + 6x^2y^2 + y^4}{4!}$. **2003.** $1 + (y-1) + (x-1)(y-1)$.
2004. $1 + [(x-1) + (y+1)] + \frac{[(x-1)+(y+1)]^2}{2!} + \frac{[(x-1)+(y+1)]^3}{3!}$.
2005. a) $\operatorname{arctg}\frac{1+\alpha}{1-\beta} \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(\alpha+\beta) - \frac{1}{4}(\alpha^2 - \beta^2)$; *b*) $\sqrt{\frac{(1+\alpha)^m + (1+\beta)^n}{2}} \approx$

$\approx 1 + \frac{1}{2}(m\alpha + n\beta) + \frac{1}{32}[(3m^2 - 4m)\alpha^2 - 3mn\alpha\beta + (3n^2 - 4n)\beta^2]$. **2006.** a) 1,0081; b) 0,902. **Indicação.** Utilizar a fórmula de Taylor para as funções: a) $f(x, y) = \sqrt{x}\sqrt[3]{y}$ num entorno do ponto (1; 1); b) $f(x, y) = y^x$ num entorno do ponto (2; 1). **2007.** $z = 1 + 2(x - 1) - (y - 1) - 8(x - 1)^2 + 10(x - 1)(y - 1) - 3(y - 1)^2 + \ldots$ **2008.** $z_{mín} = 0$ quando $x = 1$; $y = 0$. **2009.** Não há extremos. **2010.** $z_{mín} = -1$ quando $x = 1$, $y = 0$. **2011.** $z_{máx} = 108$ quando $x = 3$, $y = 2$. **2012.** $z_{mín} = -8$ quando $x = \sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$ e quando $x = -\sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$. Quando $x = y = 0$ não há extremos. **2013.** $z_{máx} = \frac{ab}{3\sqrt{3}}$ nos pontos $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{b}{\sqrt{3}}$ e $x = -\frac{a}{\sqrt{3}}$, $y = -\frac{b}{\sqrt{3}}$; $z_{mín} = -\frac{ab}{3\sqrt{3}}$ nos pontos $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $y = -\frac{b}{\sqrt{3}}$ e $x = -\frac{a}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{b}{\sqrt{3}}$. **2014.** $z_{máx} = 1$ quando $x = y = 0$. **2015.** $z_{mín} = 0$ quando $x = y = 0$; um máximo amplo $z = \frac{1}{e}$ nos pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 1$. **2016.** $z_{máx} = \sqrt{3}$ quando $x = 1$, $y = -1$. **2016. 1.** $z_{mín} = 6$ quando $x = 4$, $y = 2$. **2016. 2.** $z_{máx} = 8e^{-2}$ quando $x = -4$, $y = -2$; não há extremo quando $x = 0$, $y = 0$. **2017.** $u_{mín} = -\frac{4}{3}$ quando $x = -\frac{2}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$, $z = 1$. **2018.** $u_{mín} = 4$ quando $x = \frac{1}{2}$, $y = 1$, $z = 1$. **2019.** Esta equação determina duas funções, das quais uma tem máximo ($z_{máx} = 8$) quando $x = 1$, $y = -2$, e a outra, mínimo ($z_{mín} = -2$) quando $x = 1$, $y = -2$; nos pontos da circunferência $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$ cada uma destas funções tem um extremo na fronteira, $z = 3$. **Indicação.** As funções que são mencionadas explicitamente pelas igualdades $z = 3 \pm \sqrt{25 - (x - 1)^2 - (y + 2)^2}$ e existem, portanto, somente dentro e na fronteira da circunferência $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$, em cujos pontos ambas as funções tomam o valor $z = 3$. Este valor é o menor para a primeira função e o maior para a segunda. **2020.** Uma das funções determinada pela equação tem máximo ($z_{máx} = -2$) quando $x = -1$, $y = 2$; a outra tem mínimo ($z_{mín} = 1$) quando $x = -1$, $y = 2$; ambas as funções têm extremos na fronteira, nos pontos da curva $4x^3 - 4y^2 - 12x + 16y - 33 = 0$. **2021.** $z_{máx} = \frac{1}{4}$ quando $x = y = \frac{1}{2}$. **2022.** $z_{máx} = 5$ quando $x = 1$, $y = 2$, $z_{mín} = -5$ quando $x = -1$, $y = -2$. **2023.** $z_{mín} = \frac{36}{13}$ quando $x = \frac{18}{13}$, $y = \frac{12}{13}$. **2024.** $z_{máx} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$ quando $x = \frac{7\pi}{8} + k\pi$, $y = \frac{9\pi}{8} + k\pi$; $z_{mín} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$ quando $x = \frac{3\pi}{8} + k\pi$, $y = \frac{5\pi}{8} + k\pi$. **2025.** $u_{mín} = -9$ quando $x = -1$, $y = 2$, $z = -2$; $u_{máx} = 9$ quando $x = 1$, $y = -2$, $z = 2$. **2026.** $u_{máx} = a$ quando $x = \pm a$, $y = z = 0$; $u_{mín} = c$ quando $x = y = 0$, $z = \pm c$. **2027.** $u_{máx} = 2 \cdot 4^2 \cdot 6^3$ quando $x = 2$, $y = 4$, $z = 6$. **2028.** $u_{máx} = 4\frac{4}{27}$ nos pontos $\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{7}{3}\right)$; $\left(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}; \frac{4}{3}\right)$; $\left(\frac{7}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$; $u_{mín} = 4$ nos pontos (2; 2; 1); (2; 1; 2); (1; 2; 2). **2030.** a) O valor máximo absoluto é $z = 3$ quando $x = 0$, $y = 1$; b) o valor máximo absoluto é $z = 2$ quando $x = 1$, $y = 0$. **2031.** a) o valor máximo absoluto é $z = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ quando $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, $y =$

$= \sqrt{\frac{1}{3}}$; o valor mínimo absoluto é $z = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ quando $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, $y = -$ $-\sqrt{\frac{1}{3}}$; b) o valor máximo absoluto é $z = 1$ quando $x = \pm 1$, $y = 0$; o valor mínimo absoluto é $z = -1$ quando $x = 0$, $y = \pm 1$. **2032.** O valor máximo absoluto é $z = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ quando $x = y = \frac{\pi}{3}$ (máximo interno); o valor mínimo é $z =$ $= 0$ quando $x = y = 0$ (mínimo de fronteira). **2033.** O valor máximo é $z = 13$ quando $x = 2$, $y = -1$ (máximo de fronteira); o valor mínimo absoluto é $z = -1$ quando $x = y = 1$ (mínimo de fronteira) e quando $x = 0$, $y = -1$ (mínimo de fronteira). **2034.** Cubo. **2035.** $\sqrt[3]{2V}$; $\sqrt[3]{2V}$; $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$. **2036.** Triângulo equilátero. **2037.** Cubo. **2038.** $a = \sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a}$. **2039.** $M\left(-\frac{1}{4};\ \frac{1}{4}\right)$. **2040.** Os lados do triângulo são: $\frac{3}{4}p$, $\frac{3}{4}p$ e $\frac{p}{2}$. **2041.** $x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$, $y =$ $= \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$. **2042.** $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 3$. **2043.** As dimensões do paralelepípedo são: $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, $\frac{2b}{\sqrt{3}}$, $\frac{2c}{\sqrt{3}}$, onde a, b e c são os semi-eixos do elipsóide. **2044.** $x =$ $= y = 2\delta + \sqrt[3]{2V}$, $z = \frac{x}{2}$. **2045.** $x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$, $y = \pm\frac{b}{\sqrt{2}}$. **2046.** O eixo maior é $2a = 6$, o eixo menor é $2b = 2$. **Indicação.** O quadrado da distância do ponto (x, y) da elipse a seu centro (origem das coordenadas) é igual a $x^2 + y^2$. O problema se reduz a procurar o extremo da função $x^2 + y^2$, com a condição de que $5x^2 + 8xy +$ $+ 5y^2 = 9$. **2047.** O raio da base do cilindro é $\frac{R}{2}\sqrt{2 + \frac{2}{\sqrt{5}}}$; a altura $R\sqrt{2 - \frac{2}{\sqrt{5}}}$, onde R é o raio da esfera. **2048.** O canal deve unir o ponto $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$ da parábola com o ponto $\left(\frac{11}{8};\ -\frac{5}{8}\right)$ da reta; sua extensão é de $\frac{7\sqrt{2}}{8}$. **2049.** $\frac{1}{14}\sqrt{2730}$. **2050.** $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{v_1}{v_2}$ **Indicação.** É evidente que o ponto M, no qual o raio passa de um meio a outro, deverá encontrar-se entre A_1 e B_1, sendo $AM = \frac{a}{\cos\alpha}$; $BM =$ $= \frac{b}{\cos\beta}$, $A_1M = a\operatorname{tg}\alpha$, $B_1M = b\operatorname{tg}\beta$. A duração do movimento do raio é igual a $\frac{a}{v_1\cos\alpha} + \frac{b}{v_2\cos\beta}$. O problema se reduz a procurar o mínimo da função $f(\alpha, \beta) =$ $= \frac{a}{v_1\cos\alpha} + \frac{b}{v_2\cos\beta}$, com a condição de que $a\operatorname{tg}\alpha + b\operatorname{tg}\beta = c$. **2051.** $\alpha = \beta$. **2052.** $I_1 : I_2 : I_3 = \frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} : \frac{1}{R_3}$. **Indicação.** Achar o mínimo da função $f(I_1, I_2, I_3) =$ $= I_1^2R_1 + I_2^2R_2 + I_3^2R_3$ com a condição de que $I_1 + I_2 + I_3 = I$. **2053.** Ponto isolado (0; 0). **2054.** Ponto de reversão de 2ª espécie (0; 0). **2055.** Ponto de contacto (0; 0). **2056.** Ponto isolado (0; 0). **2057.** Nó (0; 0). **2058.** Ponto de reversão de 1ª

espécie (0; 0). **2059.** Nó (0; 0). **2060.** Nó (0; 0). **2061.** A origem das coordenadas é um ponto isolado, se $a > b$; um ponto de reversão de 1ª espécie, se $a = b$ e um ponto nodal, se $a < b$. **2062.** Se entre as grandezas a, b e c não há iguaias entre si, a curva não tem pontos singulares. Se $a = b < c$, então $A(a, 0)$ é um ponto isolado; se $a < b = c$, então $B(b, 0)$ é um nó; se $a = b = c$, então $A(a, 0)$ é um ponto de reversão de 1ª espécie. **2063.** $y = \pm x$. **2064.** $y^2 = 2px$. **2065.** $y = \pm R$. **2066.** $x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}$. **2067.** $xy = \frac{1}{2} S$. **2068.** Par de hipérboles equiláteras conjugadas, cujas equações, se os eixos de simetria das elipses são tomados como eixos das coordenadas, têm a forma $xy = \pm \frac{S}{2\pi}$. **2069.** a) A curva discriminante $y = 0$ é o lugar geométrico dos pontos de inflexão e a envolvente da família dada; b) a curva discriminante $y = 0$ é o lugar geométrico dos pontos de agudez e a envolvente da família; c) a curva discriminante $y = 0$ é o lugar geométrico dos pontos de agudez, mas não é a envolvente; d) a curva discriminante se decompõe nas retas: $x = 0$ (lugar geométrico dos pontos nodais) e $x = a$ (envolvente). **2070.** $y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$.
2071. $7\frac{1}{3}$. **2072.** $\sqrt{9 + 4\pi^2}$. **2073.** $\sqrt{3}\,(e^t - 1)$. **2074.** 42. **2075.** 5. **2076.** $x_0 + z_0$.
2077. $11 + \frac{\ln 10}{9}$. **2079.** a) reta; b) parábola; c) elipse; d) hipérbole. **2080.** 1) $\frac{da}{dt}\boldsymbol{a}^0$, 2) $a\frac{d\boldsymbol{a}^0}{dt}$; 3) $\frac{da}{dt}\boldsymbol{a}^0 + a\frac{d\boldsymbol{a}^0}{dt}$. **2081.** $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{abc}) = \left(\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\boldsymbol{bc}\right) + \left(\boldsymbol{a}\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}\boldsymbol{c}\right) + \left(\boldsymbol{ab}\frac{d\boldsymbol{c}}{dt}\right)$.
2082. $4t\,(t^2 + 1)$. **2083.** $x = 3\cos t$, $y = 4\,\text{sen}\,t$ (elipse); $\boldsymbol{v} = 4\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{w} = -3\boldsymbol{i}$ quando $t = 0$; $\boldsymbol{v} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} + 2\sqrt{2}\,\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{w} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} - 2\sqrt{2}\,\boldsymbol{j}$ quando $t = \frac{\pi}{4}$; $\boldsymbol{v} = -3\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{w} = -4\boldsymbol{j}$ quando $t = \frac{\pi}{2}$. **2084.** $x = 2\cos t$, $y = 2\,\text{sen}\,t$, $z = 3t$ (linha helicoidal); $\boldsymbol{v} = -2\boldsymbol{i}\,\text{sen}\,t + 2\boldsymbol{j}\cos t + 3\boldsymbol{k}$, $v = \sqrt{13}$ para qualquer t, $\boldsymbol{w} = -2\boldsymbol{i}\cos t - 2\boldsymbol{j}\,\text{sen}\,t$, $w = 2$ para qualquer t; $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{w} = -2\boldsymbol{i}$, quando $t = 0$; $\boldsymbol{v} = -2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{w} = -2\boldsymbol{j}$ quando $t = \frac{\pi}{2}$. **2085.** $x = \cos\alpha\cos\omega t$, $y = \text{sen}\,\alpha\cos\omega t$, $z = \text{sen}\,\omega t$ (circunferência); $\boldsymbol{v} = -\omega\boldsymbol{i}\cos\alpha\,\text{sen}\,\omega t - \omega\boldsymbol{j}\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\omega t + \omega\boldsymbol{k}\cos\omega t$, $v = |\omega|$, $\boldsymbol{w} = -\omega^2\boldsymbol{i}\cos\alpha\cos\omega t - \omega^2\boldsymbol{j}\,\text{sen}\,\alpha\cos\omega t - \omega^2\boldsymbol{k}\,\text{sen}\,\omega t$, $w = \omega^2$. **2086.** $v = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + (v_{0z} - gt)^2}$; $w_x = w_y = 0$; $w_z = -g$ $w = g$. **2088.** $\omega\sqrt{a^2 + h^2}$, onde $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ é a velocidade angular de rotação da tarraxa. **2089.** $\sqrt{a^2\omega^2 + v_0^2 - 2a\omega v_0\,\text{sen}\,\omega t}$.
2090. $\boldsymbol{\tau} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k})$; $\boldsymbol{\nu} = -\boldsymbol{j}$; $\boldsymbol{\beta} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k})$. **2091.** $\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\sqrt{3}}[(\cos t - \text{sen}\,t)\boldsymbol{i} + (\text{sen}\,t + \cos t)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}]$; $\boldsymbol{\nu} = -\frac{1}{\sqrt{2}}[(\text{sen}\,t + \cos t)\,\boldsymbol{i} + (\text{sen}\,t - \cos t)\,\boldsymbol{j}]$; $\cos(\widehat{\boldsymbol{\tau}, z}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\cos(\widehat{\boldsymbol{\nu}, z}) = 0$. **2092.** $\boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}}{\sqrt{21}}$; $\boldsymbol{\nu} = \frac{-4\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 8\boldsymbol{k}}{\sqrt{105}}$; $\boldsymbol{\beta} = \frac{-2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}}{\sqrt{5}}$. **2093.** $\frac{x - a\cos t}{-a\,\text{sen}\,t} = \frac{y - a\,\text{sen}\,t}{a\cos t} = \frac{z - bt}{b}$ (tangente); $\frac{x - a\cos t}{b\,\text{sen}\,t} = \frac{y - a\,\text{sen}\,t}{-b\cos t} = \frac{z - bt}{a}$ (binormal); $\frac{x - a\cos t}{\cos t} = \frac{y - a\,\text{sen}\,t}{\text{sen}\,t} = \frac{z - bt}{0}$ (normal

principal). Os cossenos diretores da tangente são: $\cos\alpha = -\frac{a \operatorname{sen} t}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\cos\beta = \frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\cos\gamma = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Os cossenos diretores da normal principal são: $\cos\alpha_1 = \cos t$; $\cos\beta_1 = \operatorname{sen} t$; $\cos\gamma_1 = 0$. **2094.** $2x - z = 0$ (plano normal); $y - 1 = 0$ (plano osculador); $x + 2z - 5 = 0$ (plano retificador). **2095.** $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-8}{12}$ (tangente); $x + 4y + 12z - 114 = 0$ (plano normal); $12x - 6y + z - 8 = 0$ (plano osculador). **2096.** $\frac{x - \frac{t^4}{4}}{t^3} = \frac{y - \frac{t^3}{3}}{t} = \frac{z - \frac{t^2}{2}}{1}$ (tangente); $\frac{x - \frac{t^4}{4}}{t^3 + 2t} = \frac{y - \frac{t^3}{3}}{1 - t^4} = \frac{z - \frac{t^2}{2}}{-2t^3 - t}$ (normal principal); $\frac{x - \frac{t^4}{4}}{1} = \frac{y - \frac{t^3}{3}}{-2t} = \frac{z - \frac{t^2}{2}}{t^2}$ (binormal); $M_1\left(\frac{1}{4};\ -\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right)$; $M_2\left(4;\ -\frac{8}{3};\ 2\right)$. **2097.** $\frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-2}{2}$ (tangente); $x + y = 0$ (plano osculador); $\frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-2}{-1}$ (normal principal); $\frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{0}$ (binormal); $\cos\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\gamma_2 = 0$.

2098. a) $\frac{x - \frac{R}{2}}{2} = \frac{y - \frac{R}{2}}{0} = \frac{z - \frac{\sqrt{2}\,R}{2}}{-\sqrt{2}}$ (tangente); $x\sqrt{2} - z = 0$ (plano normal); b) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{4}$ (tangente); $x + y + 4z - 10 = 0$ (plano normal); c) $\frac{x-2}{2\sqrt{3}} = \frac{y - 2\sqrt{3}}{1} = \frac{z-3}{-2\sqrt{3}}$ (tangente); $2\sqrt{3}x + y - 2\sqrt{3}z = 0$ (plano normal). **2099.** $x + y = 0$. **2100.** $x - y - z\sqrt{2} = 0$. **2101.** a) $4x - y - z - 9 = 0$; b) $9x - 6y + 2x - 18 = 0$; c) $b^2x_0^3x - a^2y_0^3y + (a^2 - b^2)\, z_0^3 z = a^2b^2(a^2 - b^2)$. **2102.** $6x - 8y - z + 3 = 0$ (plano osculador); $\frac{x-1}{31} = \frac{y-1}{26} = \frac{z-1}{-22}$ (normal principal); $\frac{x-1}{-6} = \frac{y-1}{8} = \frac{z-1}{1}$ (binormal). **2103.** $bx - z = 0$ (plano osculador); $\left.\begin{matrix} x = 0 \\ z = 0 \end{matrix}\right\}$ (normal principal); $\left.\begin{matrix} x + bz = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$ (binormal); $\tau = \frac{\mathbf{i} + b\mathbf{k}}{\sqrt{1+b^2}}$; $\beta = \frac{-b\mathbf{i} + \mathbf{k}}{\sqrt{1+b^2}}$; $\nu = \mathbf{j}$. **2106.** $2x + 3y + 19z - 27 = 0$. **2107.** a) $\sqrt{2}$; b) $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **2108.** a) $K = \frac{e^{-t}\sqrt{2}}{3}$; $T = \frac{e^{-t}}{3}$; b) $K = T = \frac{1}{2a\cosh^2 t}$. **2109.** a) $R = \rho = \frac{(y+a)^2}{a}$; b) $R = \rho = \frac{(p^4 + 2x^4)^3}{8p^4x^3}$. **2111.** $\frac{av^2}{a^2+b^2}$. **2112.** $K = 2$, $w_\tau = 0$, $w_n = 2$ quando $t = 0$; $K = \frac{1}{7}\sqrt{\frac{19}{14}}$, $w_\tau = \frac{22}{\sqrt{14}}$, $w_n = 2\sqrt{\frac{19}{14}}$ quando $t = 1$.

Capítulo VII

2113. $4\frac{2}{3}$. 2114. $\ln\frac{25}{24}$. 2115. $\frac{\pi}{12}$. 2116. $\frac{9}{4}$. 2117. 50,4. 2118. $\frac{\pi a^2}{2}$. 2119. 2,4. 2120. $\frac{\pi}{6}$.

2121. $x=\frac{y^2}{4}-1$, $x=2-y$; $y=-6$, $y=2$. 2122. $y=x^2$, $y=x+9$; $x=1$, $x=3$. 2123. $y=x$, $y=10-x$; $y=0$, $y=4$, 2124. $y=\frac{x}{3}$, $y=2x$; $x=1$, $x=3$.

2125. $y=0$, $y=\sqrt{25-x^2}$; $x=0$, $x=3$. 2126. $y=x^2$, $y=x+2$; $x=-1$, $x=2$.

2127. $\int_0^1 dy\int_0^2 f(x,y)\,dx=\int_0^2 dx\int_0^1 f(x,y)\,dy$. 2128. $\int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)\,dx=\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)\,dy$.

2129. $\int_0^1 dy\int_0^{2-y} f(x,y)\,dx=\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)\,dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)\,dy$. 2130. $\int_1^2 dx\int_{2x}^{2x+3} (x,y)\,dy=$

$$=\int_2^4 dy\int_1^{\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx+\int_4^5 dy\int_1^2 f(x,y)\,dx+\int_5^7 dy\int_{\frac{y-3}{2}}^2 f(x,y)\,dx.$$

2131. $\int_0^1 dy\int_{-y}^{y} f(x,y)\,dx+$

$$+\int_1^{\sqrt{2}} dy\int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,dx=\int_{-1}^0 dx\cdot\int_{-x}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy+\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

2132. $\int_{-1}^1 dx\int_{2x^2}^2 f(x,y)\,dy=\int_0^2 dy\int_{-\sqrt{\frac{y}{2}}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} f(x,y)\,dx$. 2133. $\int_{-2}^{-1} dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy+\int_{-1}^1 dx\times$

$$\times\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy+\int_{-1}^1 dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy+\int_1^2 dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy=\int_{-2}^{-1} dy\times$$

$$\times\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx+\int_{-1}^1 dy\cdot\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx+\int_{-1}^1 dy\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx+\int_1^2 dy\times$$

$\times\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx$. 2134. $\int_{-3}^{-2} dx\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\,dy+\int_{-2}^2 dx\int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x,y)\,dy+$

$$+\int_2^3 dx\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\,dy=\int_{-\sqrt{5}}^{-1} dy\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{-\sqrt{y^2-1}} f(x,y)\,dx+\int_{-\sqrt{5}}^{-1} dy\cdot\int_{\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)\,dx+$$

$$+\int_{-1}^{1} dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y)\, dx + \int_{1}^{\sqrt{5}} dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{-\sqrt{y^2-1}} f(x, y)\, dx + \int_{1}^{\sqrt{5}} dy \int_{\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y)\, dx.$$

2135. a) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y)\, dy = \int_0^1 dy \times \int_0^{1-y} f(x, y)\, dx$; b) $\int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y)\, dy = \int_{-a}^{a} dy \times$ $\times \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\, dx$; c) $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} f(x, y) dy = \int_{-1/2}^{1/2} dy \int_{\frac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2}} f(x, y)\, dx$; d) $\int_{-1}^{1} dx \times$ $\times \int_x^1 f(x, y)\, dy = \int_{-1}^{1} dy \int_{-1}^{y} f(x, y)\, dx$; e) $\int_0^a dy \int_y^{y+2a} f(x, y)\, dx = \int_0^a dx \int_0^x f(x, y)\, dy +$ $+\int_0^{2a} dx \int_0^a f(x, y)\, dy + \int_{2a}^{3a} dx \int_{x-2a}^{a} f(x, y)\, dy$. 2136. $\int_0^{48} dy \int_{\frac{y}{12}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x, y)\, dx$. 2137. $\int_0^2 dy \times$ $\times \int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x, y)\, dx + \int_2^3 dy \int_{\frac{y}{3}}^{1} f(x, y)\, dx$. 2138. $\int_0^{\frac{a}{2}} dy \int_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\, dx + \int_{\frac{a}{2}}^{a} dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx$.

2139. $\int_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} dy \int_{\frac{a}{2}}^{a} f(x, y)\, dx + \int_{\frac{a\sqrt{3}}{2}}^{a} dy \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a} f(x, y)\, dx$. 2140. $\int_0^a dy \int_{\frac{y^2}{4a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx +$ $+\int_0^a dy \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x, y)\, dx + \int_a^{2a\sqrt{2}} dy \int_{\frac{y^2}{4a}}^{2a} f(x, y)\, dx$. 2141. $\int_{-1}^{0} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\, dy +$ $+\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y)\, dy$. 2142. $\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\sqrt{2x}} f(x, y)\, dy + \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_0^1 f(x, y)\, dy + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \times$ $\times \int_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x, y)\, dy$. 2143. $\int_0^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x, y)\, dx$. 2144. $\int_0^1 dy \int_{\operatorname{arcsen} y}^{\pi-\operatorname{arcsen} y} f(x, y)\, dx$.

2145. $\frac{1}{6}$. 2146. $\frac{1}{3}$. 2147. $\frac{\pi}{2}\, a$. 2148. $\frac{\pi}{6}$. 2149. 6. 2150. $\frac{1}{2}$. 2151. ln 2.

2152. a) $\frac{4}{3}$; b) $\frac{15\pi - 16}{150}$; c) $2\frac{2}{5}$. **2153.** $\frac{8\sqrt{2}}{21}p^5$. **2154.** $\int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-(x-2)^2}} xy\,dy = \frac{4}{3}$.

2155. $\frac{8}{3}a\sqrt{2a}$. **2156.** $\frac{5}{2}\pi R^3$. **Indicação.** $\iint\limits_{(S)} y\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi R} dx \int\limits_0^{y=f(x)} y\,dy = \int\limits_0^{2\pi} R(1-\cos t)\,dt \int\limits_0^{R(1-\cos t)} y\,dy$, onde esta última integral é obtida da anterior como resultado da troca $x = R(t - \text{sen}\, t)$. **2157.** $\frac{R^4}{80}$. **2158.** $\frac{1}{6}$. **2159.** $a^2 + \frac{R^2}{2}$.

2160. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} rf(r\cos\varphi,\ r\,\text{sen}\,\varphi)\,dr + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\text{sen}\,\varphi}} rf(r\cos\varphi,\ r\,\text{sen}\,\varphi)\,dr$. **2161.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \times \int\limits_0^{\frac{2}{\cos\varphi}} rf(r)\,dr$. **2162.** $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\text{sen}\,\pi}} rf(r\cos\varphi,\ r\,\text{sen}\,\varphi)\,dr$. **2163.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\text{tg}\,\varphi)\,d\varphi \int\limits_0^{\frac{\text{sen}\,\varphi}{\cos^2\varphi}} r\,dr + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(\text{tg}\,\varphi)\,d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\text{sen}\,\varphi}} r\,dr + \int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} f(\text{tg}\,\varphi)\,d\varphi \int\limits_0^{\frac{\text{sen}\,\varphi}{\cos^2\varphi}} r\,dr$. **2164.** $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} rf(r\cos\varphi,\ r\,\text{sen}\,\varphi)\,dr + \int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} rf(r(\cos\varphi_1,\ r\,\text{sen}\,\varphi)\,dr$. **2165.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} r^2\,\text{sen}\,\varphi\,dr = \frac{a^3}{12}$.

2166. $\frac{3}{2}\pi a^4$. **2167.** $\frac{\pi a^3}{3}$. **2168.** $\left(\frac{22}{9} + \frac{\pi}{2}\right)a^3$. **2169.** $\frac{\pi a^3}{6}$. **2170.** $\left(\frac{\pi}{3} - \frac{16\sqrt{2} - 20}{9}\right)\frac{a^3}{2}$.
2171. $\frac{2}{3}\pi ab$. **Indicação.** O determinante de Jacob $I = abr$. Os limites de integração: $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant r \leqslant 1$. **2172.** $\int\limits_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}^{\frac{\beta}{1+\beta}} dv \int\limits_0^{\frac{c}{1-v}} f(u - uv,\ uv)\,u\,du$. **Solução.** Temos $x = u(1-v)$ e $y = uv$; o determinante de Jacob $I = u$. Determinamos os limites de u em função de v: $u(1-v) = 0$ quando $x = 0$, donde $u = 0$ (já que $1 - v \neq 0$); $u = \frac{c}{1-v}$ quando $x = c$. Os limites de variação de v: já que $y = \alpha x$, então $uv = \alpha u(1-v)$, donde $v = \frac{\alpha}{1+\alpha}$; para $y = \beta x$ achamos $v = \frac{\beta}{1+\beta}$.

2173. $I = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 du \int_{-u}^{u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv + \int_1^2 du \int_{u-2}^{2-u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv\right] =$
$= \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0} dv \int_{-v}^{2+v} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) du + \int_0^1 dv \int_{v}^{2-v} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) du\right].$
Indicação. Depois de trocar de variáveis, as equações dos lados do quadrado serão $u = v$; $u + v = 2$; $u - v = 2$; $u = -v$. 2174. $ab\left[\left(\frac{a^2}{h^2} - \frac{b^2}{k^2}\right) \operatorname{arctg} \frac{ak}{bh} + \frac{ab}{hk}\right]$.
Solução. A equação da curva é $r^4 = r^2\left(\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi - \frac{b^2}{k^2}\operatorname{sen}^2\varphi\right)$, donde o limite inferior para r é 0 e o superior $r = \sqrt{\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi - \frac{b^2}{k^2}\operatorname{sen}^2\varphi}$. Como r deve ser real, então $\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi - \frac{b^2}{k^2}\operatorname{sen}^2\varphi \geqslant 0$; donde, para o primeiro ângulo coordenado, temos que $\operatorname{tg}\varphi \leqslant \frac{ak}{bh}$. Em consequência da simetria do campo de integração em relação aos eixos, pode-se calcular 1/4 do total da integral, limitando-se ao primeiro quadrante: $\iint_{(S)} dx\,dy = 4\int_0^{\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi - \frac{b^2}{k^2}\operatorname{sen}^2\varphi}} abr\,dr.$
2175. a) $4\frac{1}{2}$; $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx + \int_1^4 dy \int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx$; b) $\frac{\pi a^2}{4} - \frac{a^2}{2}$; $\int_0^a dx \int_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy$. 2176. a) $\frac{9}{2}$; b) $\left(2 + \frac{\pi}{4}\right)a^2$. 2177. $\frac{7a^2}{120}$. 2178. $\frac{10}{3}a^2$. 2179. π. **Indicação.** $-1 \leqslant x \leqslant 1$. 2180. $\frac{16}{3}\sqrt{15}$.
2181. $3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$. 2182. $\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$. 2183. $\frac{5}{4}\pi a^2$. 2184. 6. 2185. 10π. **Indicação.** Trocar de variáveis $x - 2y = u$, $3x + 4y = v$. 2186. $\frac{1}{3}(b - a)\ (\beta - \alpha)$.
2187. $\frac{1}{3}(\beta - \alpha)\ln\frac{b}{a}$. 2188. $v = \int_0^1 dy \int_0^1 (1 - x)\,dx = \int_0^1 dx \int_0^x (1 - x)\,dy$. 2193. $\frac{\pi a^3}{6}$.
2194. $\frac{3}{4}$. 2195. $\frac{1}{6}$. 2196. $\frac{a^3}{3}$. 2197. $\frac{\pi r^4}{4a}$. 2198. $\frac{48\sqrt{6}}{5}$. 2199. $\frac{88}{105}$. 2200. $\frac{a^3}{18}$.
2201. $\frac{abc}{3}$. 2202. $\pi a^3(\alpha - \beta)$. 2203. $\frac{4}{3}\pi a^3(2\sqrt{2} - 1)$. 2204. $\frac{4}{3}\pi a^3(\sqrt{2} - 1)$. 2205. $\frac{\pi a^3}{3}$.
2206. $\frac{4}{3}\pi abc$. 2207. $\frac{\pi a^3}{3}(6\sqrt{3} - 5)$. 2208. $\frac{32}{9}a^3$. 2209. $\pi a(1 - e^{-R^2})$. 2210. $\frac{3\pi ab}{2}$.
2211. $\frac{3\sqrt{3} - 2}{2}$. 2212. $\frac{\sqrt{2}}{3}(2\sqrt{2} - 1)$. **Indicação.** Fazer a troca de variáveis $xy = u$, $\frac{y}{x} = v$. 2213. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$. 2214. $4(m - n)R^2$. 2215. $\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$. **Indicação.** Integrar no plano YOZ. 2216. $4a^2$. 2217. $8a^2 \operatorname{arcsen}\frac{b}{a}$. 2218. $\frac{1}{3}\pi a^2(3\sqrt{3} - 1)$.

2219. $8a^2$. 2220. $3\pi a^2$. **Indicação.** Passar às coordenadas polares. 2220. 1. **Indicaç o.** Projetar a superfície sobre o plano das coordenadas XOY. 2220. 2. $a^2\sqrt{2}$. 2221. $\sigma = \frac{2}{3}\pi a^2\left[\left(1+\frac{R^2}{a^2}\right)^{3/2}-1\right]$. **Indicação.** Passar às coordenadas polares. 2222. $\frac{16}{9}a^3$ e $8a^2$. **Indicação.** Passar às coordenadas polares. 2223. $8a^2 \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{5}$.

Indicação. $\sigma = \int\limits_0^{\frac{a}{2}} dx \int\limits_0^{\frac{a}{2}} \frac{a\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = 8a\int\limits_0^{\frac{a}{2}} \operatorname{arcsen}\frac{a}{2\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$. Integrar por partes e depois fazer a substituição $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} t$; o resultado deve transformar-se. 2224. $\frac{\pi}{4}\left(b\sqrt{b^2+c^2} - a\sqrt{a^2+c^2} + c^2\ln\frac{b+\sqrt{b^2+c^2}}{a+\sqrt{a^2+c^2}}\right)$. **Indicação.** Passar às coordenadas polares. 2225. $\frac{2\pi\delta R^2}{3}$. 2226. $\frac{a^3b}{12}$; $\frac{a^2b^2}{24}$. 2227. $\bar{x} = \frac{12-\pi^2}{3(4-\pi)}$; $\bar{y} = \frac{\pi}{6(4-\pi)}$. 2228. $\bar{x} = \frac{5}{6}a$; $\bar{y} = 0$. 2229. $\bar{x} = \frac{2a\operatorname{sen}\alpha}{3\alpha}$; $\bar{y} = 0$. 2230. $\bar{x} = \frac{2}{5}$; $\bar{y}=0$. 2231. $I_X = 4$. 2232. a) $I_0 = \frac{\pi}{32}(D^4-d^4)$; b) $I_X = \frac{\pi}{64}(D^4-d^4)$. 2233. $I = \frac{2}{3}a^4$. 2234. $\frac{8}{5}a^4$.

Indicação. $I = \int\limits_0^a dx \int\limits_{-\sqrt{ax}}^{\sqrt{ax}} (y+a)^2\,dy$. 2235. $16\ln 2 - 9\frac{3}{8}$. **Indicação.** A distância do ponto (x, y) até a reta $x = y$ é igual a $d = \frac{|x-y|}{\sqrt{2}}$ e é encontrada através de equação normal da reta. 2236. $I = \frac{1}{40}ka^5[7\sqrt{2} + 3\ln(\sqrt{2}+1)]$ onde k é o coeficiente de proporcionalidade. **Indicação.** Colocando a origem das coordenadas no vértice, a partir do qual a distância é proporcional à densidade da lâmina, dirigimos os eixos das coordenadas segundo os lados do quadrado. O momento de inércia é determinado em relação ao eixo OX. Passando às coordenadas polares, teremos:

$$I_x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{a\sec\varphi} kr(r\operatorname{sen}\varphi)^2\, r\,dr + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\operatorname{cosec}\varphi} kr(r\operatorname{sen}\varphi)^2\, r\,dr.$$ 2237. $I_0 = \frac{35}{16}\pi a^4$.

2238. $I_0 = \frac{\pi a^4}{2}$. 2239. $\frac{35}{12}\pi a^4$. **Indicação.** Tomar t e y por variáveis de integração (ver o prob. 2156). 2240. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} f(x, y, z)\,dz$. 2241. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_0^H f(x,y,z)\,dz$.

2242. $\int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{c} f(x, y, z)\,dz$. 2243. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^{1-x^2-y^2} f(x, y, z)\,dz$.

2244. $\frac{8}{15}(31+12\sqrt{2}-27\sqrt{3})$. **2245.** $\frac{4\pi\sqrt{2}}{3}$. **2246.** $\frac{\pi^2 a^2}{8}$. **2247.** $\frac{1}{720}$. **2248.** $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}$. **2249.** $\frac{\pi a^5}{5}\left(18\sqrt{3}-\frac{97}{6}\right)$. **2250.** $\frac{59}{480}\pi R^5$. **2251.** $\frac{\pi abc^2}{4}$. **2252.** $\frac{4}{5}\pi abc$. **2253.** $\frac{\pi h^2R^2}{4}$. **2254.** πR^3. **2255.** $\frac{8}{9}a^2$. **2256.** $\frac{8}{3}r^3\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$. **2257.** $\frac{4}{15}\pi R^5$. **2258.** $\frac{\pi}{10}$. **2259.** $\frac{32}{9}a^2h$.

2260. $\frac{3}{4}\pi a^3$. **Solução.** $v=2\int_0^{2a}dx\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}dy\int_0^{\frac{x^2+y^2}{2a}}dz=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r\,dr\int_0^{\frac{r^2}{2a}}dh=$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}\frac{r^3\,dr}{2a}=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(2a\cos\varphi)^4}{4}d\varphi=\frac{3}{4}\pi a^3$. **2261.** $\frac{2\pi a^3\sqrt{2}}{3}$. **Indicação.** Passar às coordenadas esféricas. **2262.** $\frac{19}{6}\pi$. **Indicação.** Passar às coordenadas cilíndricas. **2263.** $\frac{a^3}{9}(3\pi-4)$. **2264.** πabc. **2264. 1.** $\frac{\pi^2abc}{4\sqrt{2}}$. **2264. 2.** $\frac{4\pi}{3}(\sqrt{2}-1)abc$. **2256.** $\frac{abc}{2}(a+b+c)$. **2266.** $\frac{ab}{24}(6c^2-a^2-b^2)$. **2267.** $\bar{x}=0;\ \bar{y}=0;\ \bar{z}=\frac{2}{5}a$. **Indicação.** Introduzir as coordenadas esféricas. **2268.** $x=\frac{4}{3}$, $\bar{y}=0$, $\bar{z}=0$. **2269.** $\frac{\pi a^2h}{12}(3a^2+4h^2)$. **Indicação.** O eixo do cilindro é tomado como eixo OZ, o plano da base do cilindro como plano XOY. O momento de inércia é calculado em relação ao eixo OX. Depois de passar às coordenadas cilíndricas, o quadrado da distância do elemento $r\,d\varphi\,dr\,dz$ do eixo OX é igual a $r^2\,\text{sen}^2\,\varphi+z^2$. **2270.** $\frac{\pi\rho ha^2}{60}(2h^2+3a^2)$. **Indicação.** A base do cone é tomada como plano XOY; o eixo do cone, como eixo OZ. O momento de inércia é calculado em relação ao eixo OX. Passando às coordenadas cilíndricas, para os pontos da superfície do cone teremos: $r=\frac{a}{h}(h-z)$ e o quadrado da distância do elemento $r\,d\varphi\,dr\,dz$ do eixo OX será igual a $r^2\,\text{sen}^2\,\varphi+z^2$. **2271.** $2\pi k\rho h(1-\cos\alpha)$, onde k é o coeficiente de proporcionalidade e ρ, a densidade. **Solução.** O vértice do cone é tomado como origem das coordenadas e seu eixo, como eixo OZ. Se introduzirmos as coordenadas esféricas, a equação da superfície lateral do cone será $\psi=\frac{\pi}{2}-\alpha$, e a equação do plano da base, $r=\frac{h}{\text{sen}\,\psi}$. Pela simetria se tem que a tensão resultante está dirigida ao longo do eixo OZ. A massa do elemento de volume é $dm=\rho r^2\cos\psi\,d\varphi\,d\psi\,dr$, onde ρ é a densidade. A componente pelo eixo OZ da atração que exerce este elemento sobre a unidade de massa situada, no ponto O, é igual a $\frac{k\,dm}{r^2}\,\text{sen}\,\psi=k\rho\,\text{sen}\,\psi\cos\psi\,d\psi\,d\varphi\,dr$. A atração resultante é igual a

$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha}d\psi\int_0^{h\,\text{cosec}\,\varphi}k\rho\,\text{sen}\,\psi\cos\psi\,dr$. **2272.** **Solução.** Introduzimos as coordenadas

cilíndricas (ρ, φ, z) com origem no centro da esfera e de forma que o eixo OZ passe pelo ponto material, cuja massa se supõe igual a m. A distância deste ponto até o centro da esfera é designada pela ξ. Seja $r = \sqrt{\rho^2 + (\xi - z)^2}$ a distância entre o volume elementar dv e a massa m. A força de atração do volume elementar dv da esfera e do ponto material m, está dirigida ao longo de r e numericamente é iguae a $-k\gamma m \frac{dv}{r^2}$, onde $\gamma = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ é a densidade da esfera e $dv = \rho\, d\varphi\, d\rho\, dz$ o voluml elementar. A projeção desta força sobre o eixo OZ será:

$$dF = -\frac{km\gamma\, dv}{r^2}\cos(\widehat{rz}) = -km\gamma\frac{\xi - z}{r^3}\rho\, d\varphi\, d\rho\, dz.$$

Donde

$$F = -km\gamma\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-R}^{R}(\xi - z)\, dz \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \frac{\rho\, d\rho}{r^3} = km\gamma\frac{4}{3}\pi R^3\frac{1}{\xi 2},$$

porém como $\frac{4}{3}\gamma\pi R^3 = M$, então $F = \frac{kMm}{\xi^2}$. **2273.** $-\int_x^{\infty} y^2 e^{-xy^2} dy - e^{-x^3}$. **2275.** a) $\frac{1}{p}$ $(p > 0)$; b) $\frac{1}{p - \alpha}$ quando $p > \alpha$; c) $\frac{\beta^2}{p^2 + \beta^2}$ $(p > 0)$; d) $\frac{p}{p^2 + \beta^2}$ $(p > 0)$.
2276. $-\frac{1}{n^2}$. **2277.** $\frac{2}{p^3}$. **Indicação.** Derivar duas vezes: $\int_0^{\infty} e^{-pt}\, dt = \frac{1}{p}$. **2278.** $\ln\frac{\beta}{\alpha}$.
2279. $\operatorname{arctg}\frac{\beta}{m} - \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{m}$. **2280.** $\frac{\pi}{2}\ln(1 + \alpha)$ $(\alpha > 0)$. **2281.** $\pi(\sqrt{1 - \alpha^2} - 1)$.
2282. $\operatorname{arcctg}\frac{\alpha}{\beta}$. **2283.** 1. **2284.** $\frac{1}{2}$. **2285.** $\frac{\pi}{4}$. **2286.** $\frac{\pi}{4a^2}$. **Indicação.** Passar às coordenadas polares. **2287.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. **2288.** $\frac{\pi^2}{8}$. **2289.** Converge. **Solução.** Excluimos de S a origem das coordenadas junto com seu entorno de amplitude ε, isto é, examinamos $I_\varepsilon = \iint_{(S_\varepsilon)} \ln\sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$, onde o campo que se exclue é um círculo de raio ε com centro na origem das coordenadas. Passando às coordenadas polares, temos: $I_\varepsilon = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_\varepsilon^1 r\ln r\, dr = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\ln r\Big|_\varepsilon^1 - \frac{1}{2}\int_\varepsilon^1 r\, dr\right] d\varphi = 2\pi\left(\frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{\varepsilon^2}{2}\ln\varepsilon - \frac{1}{4}\right)$.
Donde $\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = -\frac{\pi}{2}$. **2290.** Converge quando $\alpha > 1$. **2291.** Converge. **Indicação.** Rodeamos a reta $y = x$ com uma faixa estreita e supomos $\iint_{(S)} \frac{dx\, dy}{\sqrt[3]{(x - y)^2}} =$
$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^1 dx \int_0^{x-\varepsilon} \frac{dy}{\sqrt[3]{(x - y)^2}} + \lim_{\delta\to 0}\int_0^1 dx \int_{x+\delta}^1 \frac{dy}{\sqrt[3]{(x - y)^2}}$. **2292.** Converge quando $\alpha > \frac{2}{3}$.

2293. 0. **2294.** $\ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}$. **2295.** $\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$. **2296.** $\frac{256}{15}a^3$. **2297.** $\frac{a^2}{3}\left[(1+4\pi^2)^{\frac{3}{2}}-1\right]$. **2298.** $a^5\sqrt{1+m^2}/5m$. **2299.** $a^2\sqrt{2}$. **2300.** $(56\sqrt{7}-1)/54$. **2301.** $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\operatorname{arctg}\frac{2\pi b}{a}$. **2302.** $2\pi a^2$. **2303.** $\frac{16}{27}(10\sqrt{10}-1)$. **Indicação.** $\int\limits_C f(x, y)\,ds$ geometricamente pode ser interpretado como área da superfície cilíndrica que tem a geratriz paralela ao eixo OZ, cuja base é o contorno de integração e as alturas são iguais aos valores da função subintegral. Por isso $S=\int\limits_C x\,ds$, onde C é o arco OA da parábola $y=\frac{3}{8}x^2$, que une os pontos $(0;\ 0)$ e $(4;6)$. **2304.** $a\sqrt{3}$. **2305.** $2\left(b^2+\frac{a^2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)$. **2306.** $\sqrt{a^2+b^2}\left(\pi\sqrt{a^2+4\pi b^2}+\frac{a^2}{2b}\ln\frac{2\pi b+\sqrt{a^2+4\pi^2b^2}}{a}\right)$. **2307.** $(4a/3,\ 4a/3)$. **2308.** $2\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}$. **2309.** $kMmb/\sqrt{(a^2+b^2)^3}$. **2310.** $40\frac{19}{30}$. **2311.** $-2\pi a^2$. **2312.** a) $\frac{4}{3}$; b) 0; c) $\frac{12}{5}$; d) -4; e) 4. **2313.** Em todos os casos, 4. **2314.** -2π. **Indicação.** Utilizar as equações paramétricas da circunferência. **2315.** $\frac{4}{3}ab^2$. **2316.** $-2\operatorname{sen}2$. **2317.** 0. **2318.** a) 8; b) 12; c) 2; d) $\frac{3}{2}$; e) $\ln(x+y)$; f) $\int\limits_{x_1}^{x_2}\varphi(x)\,dx+\int\limits_{y_1}^{y_2}\psi(y)\,dy$. **2319.** a) 62; b) 1; c) $\frac{1}{4}+\ln 2$; d) $1+\sqrt{2}$. **2320.** $\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1+b^2}$. **2322.** a) $x^2+3xy-2y^2+C$; b) $x^3-x^2y+xy^2-y^3+C$; c) $e^{x-y}(x+y)+C$; d) $\ln|x+y|+C$. **2323.** $-2\pi a(a+b)$. **2324.** $-\pi R^2\cos^2\alpha$. **2325.** $\left(\frac{1}{6}+\frac{\pi\sqrt{2}}{16}\right)R^3$, quando $R>0$. **2326.** a) -2; b) $abc-1$; c) $5\sqrt{2}$; d) 0. **2327.** $I=\iint\limits_{(S)}y^2\,dx\,dy$. **2328.** $-4/3$. **2329.** $\pi R^4/2$. **2330.** $-1/3$. **2331.** 0. **2332.** a) 0; b) $2n\pi$. **Indicação.** No caso b) a fórmula de Green é empregada no campo compreendido entre o contorno C e um círculo de raio suficientemente pequeno com centro na origem das coordenadas. **2333. Solução.** Se supormos que a direção da tangente coincide com a direção do percurso positivo do contorno, teremos que $\cos(X, n)=\cos(Y, t)=\frac{dy}{ds}$, portanto, $\oint\limits_C\cos(X, n)\,ds=\oint\limits_C\frac{dy}{ds}\,ds=\oint\limits_C dy=0$. **2334.** $2S$, onde S é a área limitada pelo contorno C. **2335.** -4. **Indicação.** Não se pode empregar a fórmula de Green. A integral dada é imprópria, já que nos pontos de cruzamento do contorno de integração com a reta $x+y=0$ a expressão subintegral toma a forma $\frac{0}{0}$. **2336.** πab. **2337.** $\frac{3}{8}\pi a^2$. **2338.** $6\pi a^2$. **2339.** $\frac{3}{2}a^2$. **Indicação.** Fazer $y=tx$, onde t é um parâmetro. **2340.** $\frac{a^2}{60}$. **2341.** $\pi(R+r)(R+2r)$; $6\pi R^2$ quando $R=r$. **Indicação.** A equação da epiciclóide tem a forma $x=(R+r)\cos t-r\cos\frac{R+r}{r}t$, $y=(R+r)\operatorname{sen}t-$

$-r \operatorname{sen} \dfrac{R+r}{r} t$, onde t é o ângulo de giro do raio de círculo fixo, traçado no ponto de contato. **2342.** $\pi(R-r)(R-2r)$; $\dfrac{3}{8}\pi R^2$ quando $r=\dfrac{R}{4}$. **Indicação.** A equação da hipociclóide é obtida da equação de epiciclóide correspondente (ver o problema 2341), substituindo-se r por $-r$. **2343.** FR. **2344.** $mg(z_1-z_2)$. **2345.** $\dfrac{k}{2}(a^2-b^2)$, onde k é o coeficiente de proporcionalidade. **2346.** a) Potencial $U=-mgz$, o trabalho $mg(z_1-z_2)$; b) potencial $U=\dfrac{\mu}{r}$, o trabalho $\dfrac{\mu}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$; c) potencial $U=-\dfrac{k^2}{2}(x^2+y^2+z^2)$, o trabalho $\dfrac{k^2}{2}(R^2-r^2)$. **2347.** $\dfrac{8}{3}\pi a^4$. **2348.** $\dfrac{2\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}}{3}$. **2349.** 0. **2350.** $\dfrac{4}{3}\pi abc$. **2351.** $\dfrac{\pi a^4}{2}$. **2352.** $\dfrac{3}{4}$. **2353.** $\dfrac{25\sqrt{5}+1}{10(5\sqrt{5}-1)}a$. **2354.** $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}h^4$. **2355.** a) 0; b) $-\iint\limits_{(S)}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\,dS$. **2356.** 0. **2357.** 4π. **2358.** $-\pi a^3$. **2359.** $-a^3$. **2360.** $\dfrac{\partial R}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial z}$, $\dfrac{\partial P}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$. **2361.** 0. **2362.** $2\iiint\limits_{(V)}(x+y+z)\,dx\,dy\,dz$. **2363.** $2\iiint\limits_{(V)}\dfrac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **2364.** $\iiint\limits_{(V)}\left(\dfrac{\partial^2U}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2U}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2U}{\partial z^2}\right)\times$ $\times\,dx\,dy\,dz$. **2365.** $3a^4$. **2366.** $\dfrac{a^3}{2}$. **2367.** $\dfrac{12}{5}\pi a^5$. **2368.** $\dfrac{\pi a^2b^2}{2}$. **2371.** Esferas; cilindros. **2372.** Cones. **2374.** Circunferências $x^2+y^2=c_1^2$, $z=c_2$. **2376.** $\operatorname{grad} U(A)=$ $=9\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$; $|\operatorname{grad} U(A)|=\sqrt{99}=3\sqrt{11}$; $z^2=xy$; $x=y=z$. **2377.** a) $\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$; b) $2\boldsymbol{r}$; c) $-\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$; d) $f'(r)\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$. **2378.** $\operatorname{grad}(\boldsymbol{c}\boldsymbol{r})=\boldsymbol{c}$; as superfícies de nível são planos perpendiculares ao vetor $\boldsymbol{c}$. **2379.** $\dfrac{\partial U}{\partial r}=\dfrac{2U}{r}$, $\dfrac{\partial U}{\partial r}=|\operatorname{grad} U|$ quando $a=b=c$. **2380.** $\dfrac{\partial U}{\partial l}=-\dfrac{\cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{r})}{r^2}$; $\dfrac{\partial U}{\partial l}=0$ quando $\boldsymbol{l}\perp\boldsymbol{r}$. **2382.** $\dfrac{2}{r}$. **2383.** $\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\dfrac{2}{r}f(r)f'(r)$. **2385.** a) $\operatorname{div}\boldsymbol{r}=3$; $\operatorname{rot}\boldsymbol{r}=0$; b) $\operatorname{div}(r\boldsymbol{c})=\dfrac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{c}}{r}$, $\operatorname{rot}(r\boldsymbol{c})=\dfrac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{c}}{r}$; c) $\operatorname{div}(f(r)\boldsymbol{c})=\dfrac{f'(r)}{r}(\boldsymbol{c}\boldsymbol{r})$, $\operatorname{rot}(f(r)\boldsymbol{c})=\dfrac{f'(r)}{r}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{c})$. **2386.** $\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$; $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{\omega}$, onde $\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{k}$. **2387.** $2\omega\boldsymbol{n}^0$, onde $\boldsymbol{n}^0$ é o vetor unitário paralelo ao eixo de rotação. **2388.** $\operatorname{div}\operatorname{grad} U=\dfrac{\partial^2U}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2U}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2U}{\partial z^2}$; $\operatorname{rot}\operatorname{grad} U=0$. **2391.** $3\pi R^2H$. **2392.** a) $\dfrac{1}{10}\pi R^2H(3R^2+2H^2)$; b) $\dfrac{3}{10}\pi R^2H(R^2+2H^2)$. **2393.** $\operatorname{div} F=0$ em todos os pontos, menos a origem das coordenadas. O fluxo é igual a $-4\pi m$. **Indicação.** Ao se calcular o fluxo, aplicar o teorema de Ostrogradski — Gauss. **2394.** $2\pi^2h^2$. **2395.** $\dfrac{-\pi R^6}{8}$. **2396.** $U=\displaystyle\int_{r_0}^{r} rf(r)\,dr$. **2397.** $\dfrac{m}{r}$. **2398.** a) Não há; b) $U=xyz+C$; c) $U=xy+xy+yz+C$. **2400.** Sim.

Capítulo VIII

2401. $\frac{1}{2n-1}$. **2402.** $\frac{1}{2n}$. **2403.** $\frac{1}{2^{n-1}}$. **2404.** $\frac{1}{n^2}$. **2405.** $\frac{n+2}{(n+1)^2}$. **2406.** $\frac{2n}{3n+2}$. **2407.** $\frac{1}{n(n+1)}$. **2408.** $\frac{1\cdot 3\cdot 5 \dots (2n-1)}{1\cdot 4\cdot 7 \dots (3n-2)}$. **2409.** $(-1)^{n+1}$. **2410.** $n^{(n-1)^{n+1}}$. **2416.** Diverge. **2417.** Converge. **2418.** Diverge. **2419.** Diverge. **2420.** Diverge. **2421.** Diverge. **2422.** Diverge. **2423.** Diverge. **2424.** Diverge. **2425.** Converge. **2426.** Converge. **2427.** Converge. **2428.** Converge. **2429.** Converge. **2430.** Converge. **2431.** Converge. **2432.** Converge. **2433.** Converge. **2434.** Diverge. **2435.** Diverge. **2436.** Converge. **2437.** Diverge. **2438.** Converge. **2439.** Converge. **2440.** Converge. **2441.** Diverge. **2442.** Converge. **2443.** Converge. **2444.** Converge. **2445.** Converge. **2446.** Converge. **2447.** Converge. **2448.** Converge. **2449.** Converge. **2450.** Diverge. **2451.** Converge. **2452.** Diverge. **2453.** Converge. **2454.** Diverge. **2455.** Diverge. **2456.** Converge. **2457.** Diverge. **2458.** Converge. **2459.** Diverge. **2460.** Converge. **2461.** Diverge. **2462.** Converge. **2463.** Diverge. **2464.** Converge. **2465.** Converge. **2466.** Converge. **2467.** Diverge. **2468.** Diverge. **Indicação.** $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. **2470.** Converge condicionalmente. **2471.** Converge condicionalmente. **2472.** Converge absolutamente. **2473.** Diverge. **2474.** Converge condicionalmente. **2475.** Converge absolutamente. **2476.** Converge absolutamente. **2477.** Converge absolutamente. **2478.** Converge absolutamente. **2479.** Diverge. **2480.** Converge absolutamente. **2481.** Converge condicionalmente. **2482.** Converge absolutamente. **2484.** a) Diverge; b) converge absolutamente; c) diverge; d) converge condicionalmente. **Indicação.** Nos exemplos a) e d) examinar a série $\sum_{k=1}^{\infty}(a_{2k-1}+a_{2k})$, e nos b) e c) investigar separadamente as séries $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}$ e $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$. **2485.** Diverge. **2486.** Converge absolutamente. **2487.** Converge absolutamente. **2488.** Converge condicionalmente. **2489.** Diverge. **2490.** Converge absolutamente. **2491.** Converge absolutamente. **2492.** Converge absolutamente. **2493.** Sim. **2494.** Não. **2495.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{3^n}$; converge. **2496.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n-1)}$; converge. **2497.** Diverge. **2499.** Converge. **2500.** Converge. **2501.** $|R_4| < \frac{1}{120}$, $|R_5| < \frac{1}{720}$; $R_4 < 0$, $R_5 > 0$. **2502.** $R_n < \frac{a_n}{2n+1} = \frac{1}{2^n(2n+1)n!}$. **Indicação.** O resto da série pode ser avaliado através da soma da progressão geométrica que excede a este resto:

$$R_n = a_n\left[\frac{1}{2}\,\frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots\right] < a_n\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{(n+1)^2} + \dots\right].$$

2503. $R_n < \frac{n+2}{(n+1)(n+1)}$; $R_{10} < 3\cdot 10^{-8}$. **2504.** $\frac{1}{n+1} < R_n < \frac{1}{n}$. **Solução.**

$$R_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots > \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + \dots = \frac{1}{n+1};$$

$$R_n < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots = \frac{1}{n}.$$

2505. Para a série dada é fácil achar o valor exato do resto:

$$R_n = \frac{1}{15}\left(n + \frac{16}{15}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-2}.$$

Solução. $R_n = (n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^{2n} + (n+2)\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+2} + \ldots$

Multiplicamos por $\left(\frac{1}{4}\right)^2$:

$$\frac{1}{16} R_n = (n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+2} + (n+2)\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+4} + \ldots$$

Subtraindo, obtemos:

$$\frac{15}{16} R_n = n\left(\frac{1}{4}\right)^{2n} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2n+2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2n+4} + \ldots =$$

$$= n\left(\frac{1}{4}\right)^{2n} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}}{1 - \frac{1}{16}} = \left(n + \frac{16}{15}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}.$$

Daqui encontramos o valor de R_n dado mais acima. Fazendo $n = 0$, achamos a soma da série $S = \left(\frac{16}{15}\right)^2$. **2506.** 99; 999. **2507.** 2; 3; 5. **2508.** $S = 1$. **Indicação.** $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. **2509.** $S = 1$ quando $x > 0$; $S = -1$ quando $x < 0$; $S = 0$ quando $x = 0$. **2510.** Quando $x > 1$ é absolutamente convergente, quando $x \leqslant 1$, é divergente. **2511.** Quando $x > 1$ converge absolutamente, quando $0 < x \leqslant 1$ converge não absolutamente, quando $x \leqslant 0$ diverge. **2512.** Quando $x > e$ converge absolutamente, quando $1 < x \leqslant e$ converge não absolutamente, quando $x \leqslant 1$ diverge. **2513.** $-\infty < x < \infty$. **2514.** $-\infty < x < \infty$. **2515.** Converge absolutamente quando $x > 0$, diverge quando $x \leqslant 0$. **Solução.** 1) $|a_n| \leqslant \frac{1}{e^{nx}}$ e quando $x > 0$ a série com o termo geral $\frac{1}{e^{nx}}$ converge; 2) $\frac{1}{e^{nx}} \geqslant 1$ quando $x \leqslant 0$ e o $\cos nx$ não tende a zero quando $n \to \infty$, já que do $\cos nx \to 0$ resultaria que $\cos 2nx \to -1$; desta forma, quando $x \leqslant 0$ não é válido o critério necessário de convergência. **2516.** Converge absolutamente quando $2k\pi < x < (2k+1)\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; nos demais pontos diverge. **2517.** Diverge em toda a parte. **2518.** Converge absolutamente quando $x \neq 0$. **2519.** $x > 1$, $x \leqslant -1$. **2520.** $x > 3$, $x < 1$. **2521.** $x \geqslant 1$, $x \leqslant -1$. **2522.** $x \geqslant 5\frac{1}{3}$, $x < 4\frac{2}{3}$. **2533.** $x > 1$, $x < -1$. **2524.** $-1 < x < -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < x < 1$. **Indicação.** Para estes valores de x converge, tanto a série $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$, como a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k x^k}$. Quando $|x| \geqslant 1$ e quando $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ o termo geral da série não tende a zero. **2525.** $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$. **2526.** $-1 < x < 1$. **2527.** $-2 \leqslant x < 2$. **2528.** $-1 < x < 1$. **2529.** $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$. **2530.** $-1 < x \leqslant 1$. **2531.** $-1 < x < 1$. **2532.** $-1 < x < 1$. **2533.** $-\infty < x < \infty$. **2534.** $x = 0$. **2535.** $-\infty < x < \infty$. **2536.** $-4 < x < 4$. **2537.** $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$. **2538.** $-2 < x < 2$. **2539.** $-e < x < e$. **2540.** $-3 \leqslant x < 3$. **2541.** $-1 < x < 1$. **2542.** $-1 < x < 1$. **Solução.** A divergência da série quando $|x| \geqslant 1$ é evidente (é interessante assinalar que a divergência da série nos extremos do intervalo de convergência $x = \pm 1$ pode ser comprovada, não só através do

critério necessário de convergência, mas também com a ajuda do critério D'Alembert). Quando $|x| < 1$, temos $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\,x^{(n+1)!}}{n!\,x^{n!}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}|(n+1)\,x^{n!\,n}| \leqslant \lim\limits_{n\to\infty}(n+1)|x|^n =$ $= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{\left|\frac{1}{x}\right|^n} = 0$ (a última igualdade pode ser facilmente obtida, aplicando-se a regra de L'Hôspital). **2543.** $-1 \leqslant x \leqslant 1$. **Indicação.** Através do critério de D'Alembert não só se pode achar o intervalo de convergência, mas também investigar a convergência da série dada nos extremos deste intervalo. **2544.** $-1 \leqslant x \leqslant 1$. **Indicação.** Através do critério de Cauchy não só se pode achar o intervalo de convergência, mas investigar também a convergência da série dada nos extremos deste intervalo. **2545.** $2 < x \leqslant 8$. **2546.** $-2 \leqslant x < 8$. **2547.** $-2 < x < 4$. **2548.** $1 \leqslant x \leqslant 3$. **2549.** $-4 \leqslant x \leqslant -2$. **2550.** $x = -3$. **2551.** $-7 < x < -3$. **2552.** $0 \leqslant x < 4$. **2553.** $-\frac{5}{4} < x < \frac{13}{4}$. **2554.** $-e-3 < x < e-3$. **2555.** $-2 \leqslant x \leqslant 0$. **2556.** $2 < x < 4$. **2557.** $1 < x \leqslant 3$. **2558.** $-3 \leqslant x \leqslant -1$. **2559.** $1 - \frac{1}{e} < x < 1 + \frac{1}{e}$. **Indicação.** Quando $x = 1 \pm \frac{1}{e}$ a série diverge, já que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n} = \frac{1}{\sqrt{e}} \neq 0$. **2560.** $-2 < x < 0$. **2561.** $1 < x \leqslant 3$. **2562.** $1 \leqslant x < 5$. **2563.** $2 \leqslant x \leqslant 4$. **2564.** $|z| < 1$. **2565.** $|z| < 1$. **2566.** $|z - 2i| < 3$. **2567.** $|z| < \sqrt{2}$. **2568.** $z = 0$. **2569.** $|z| < \infty$. **2570.** $|z| < \frac{1}{2}$. **2576.** $-\ln(1-x)$ $(-1 \leqslant x < 1)$. **2577.** $\ln(1+x)$ $(-1 < x \leqslant 1)$. **2578.** $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ $(|x| < 1)$. **2579.** $\operatorname{arctg} x\,(|x| \leqslant 1)$. **2580.** $\frac{1}{(x-1)^2}$ $(|x| < 1)$. **2581.** $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ $(|x| < 1)$. **2582.** $\frac{2}{(1-x)^3}$ $(|x| < 1)$. **2583.** $\frac{x}{(x-1)^2}$ $(|x| > 1)$. **2584.** $\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}\right)$ $|x| < 1)$. **2585.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$. **Indicação.** Examinar a soma da série $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$ (ver o problema 2579), quando $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **2586.** 3. **2487.** $a^x = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n \ln^n a}{n!}$ $(-\infty < x < \infty)$. **2588.** $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{\frac{n^2-n}{2}}\frac{x^n}{n!} + \ldots\right]$ **2589.** $\cos(x+a) = \cos a - x\operatorname{sen} a - \frac{x^2}{2!}\cos a + \frac{x^3}{3!}\operatorname{sen} a + \frac{x^4}{4!}\cos a + \ldots + \frac{x^n}{n!}\operatorname{sen}\left[a + \frac{(n+1)\pi}{2}\right] + \ldots (-\infty < x < \infty)$. **2590.** $\operatorname{sen}^2 x = \frac{2x^2}{2!} - \frac{2^3x^4}{4!} + \frac{2^5x^6}{6!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!} + \ldots (-\infty < x < \infty)$. **2591.** $\ln(2+x) = \ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2\cdot 2^2} + \frac{x^3}{3\cdot 2^3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n\cdot 2^n} + \ldots (-2 < x \leqslant 2)$. **Indicação.** Ao investigar o resto, utilize o teorema da integração da série

de potências. 2592. $\frac{2x-3}{(x-1)^2} = -\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)x^n(|x|<1)$. 2593. $\frac{3x-5}{x^2-4x+3} = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{2}{3^{n+1}}\right)x^n\ (|x|<1)$. 2594. $xe^{-2x} = x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}x^n}{(n-1)!}\ (-\infty<x<\infty)$. 2595. $e^{x^2} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}\ (-\infty<x<\infty)$. 2596. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ (-\infty<x<\infty)$.
2597. $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}$. 2598. $1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}\ (-\infty<x<\infty)$.
2599. $2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+2)3^{2n}\cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-\infty<x<\infty)$. 2600. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}(-3<x<3)$.
2601. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2^3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\,\frac{x^4}{2^5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\,\frac{x^6}{2^7}+\ldots+\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2n}\,\frac{x^{2n}}{2^{2n+1}}+\ldots\ (-2<x<2)$. 2602. $2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ (|x|<1)$. 2603. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n-1}{n}x^n\left(-\frac{1}{2}<x\leqslant\frac{1}{2}\right)$. 2604. $x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{(n-1)n}\ (|x|\leqslant1)$. 2605. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ (|x|\leqslant1)$.
2606. $x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\,\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2n}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\ (|x|\leqslant1)$.
2607. $x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\,\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2n}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\ (|x|\leqslant1)$.
2608. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{4n-3}x^{2n}}{(2n)!}(-\infty<x<\infty)$. 2609. $1+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n-1}{n!}x^n(-\infty<x<\infty)$. 2610. $8+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n+3^{n-1}}{n!}x^n(-\infty<x<\infty)$. 2611. $2+\frac{x}{2^2\cdot3\cdot1!}-\frac{2\cdot x^2}{2^5\cdot3^3\cdot2!}+\frac{2\cdot5x^3}{2^8\cdot3^3\cdot3!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{2\cdot5\cdot8\ldots(3n-4)x^n}{2^{3n-1}\cdot3^n\cdot n!}+\ldots\ (-\infty<x<\infty)$.
2612. $\frac{1}{6}-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}\right)x^n\ (-2<x<2)$. 2613. $1+\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+3^{2n-1})x^{2n}}{(2n)!}$ $(|x|<\infty)$. 2614. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{4^{n+1}}\ (|x|<\sqrt{2})$. 2615. $\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(1+2^{-n})\frac{x^n}{n}$ $(-1<x\leqslant1)$. 2616. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}(-\infty<x<\infty)$. 2617. $x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}\ (|x|<\infty)$. 2618. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}\ (|x|\leqslant1)$. 2619. $x+\frac{1}{2\cdot5}x^5\,\frac{1\cdot3}{2^2\cdot9\cdot2!}x^9+\ldots+\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2^n(4n+1)n!}\,x^{4n+1}+\ldots\ (|x|<1)$. 2620. $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\ldots$ 2621. $x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}-\ldots$ 2622. $e\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}-\ldots\right)$.
2623. $1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\ldots$. 2624. $-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^6}{45}+\ldots\right)$. 2625. $x+x^2+\frac{1}{3}x^3+\ldots$.

2626. Indicação. Partindo das equações paramétricas da elipse $x = a\cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$, calcular a extensão da elipse e desenvolver a expressão obtida em série de potências ε. **2628.** $x^3 - 2x^2 - 5x - 2 = -78 + 59(x+4) - 14(x+4)^2 + (x+4)^3$ $(-\infty < x < \infty)$. **2629.** $f(x+h) = 5x^3 - 4x^2 - 3x + 2 + (15x^2 - 8x - 3)h + (15x - 4)h^2 + 5h^3$ $(-\infty<x<\infty;\ -\infty<h<\infty)$. **2630.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$ $(0<x\leqslant 2)$.

2631. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$ $(0 < x < 2)$. **2632.** $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(x+1)^n$ $(-2 < x < 0)$.

2633. $\sum_{n=0}^{\infty} (2^{-n-1} - 3^{-n-1})(x+4)^n$ $(-6<x<-2)$. **2634.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+2)^{2n}}{3^{n+1}}$ $(-2-\sqrt{3} < x < -2+\sqrt{3})$. **2635.** $e^{-2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!}\right]$ $(|x|<\infty)$. **2636.** $2+\frac{x-4}{2^2} - \frac{1}{4} \times \frac{(x-4)^2}{2^4} + \frac{1\cdot 3}{4\cdot 6}\cdot\frac{(x-4)^3}{2^6} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{(x-4)^4}{2^8} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{4\cdot 6\cdot 8\ldots 2n} \times \frac{(x-4)^n}{2^{2n}} + \ldots$ $(0\leqslant x\leqslant 8)$. **2637.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!}$ $(|x|<\infty)$. **2648.** $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{n-1}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!}$ $(|x|<\infty)$. **2639.** $-2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{2n+1}$ $(0 < x < \infty)$. **Indicação.** Fazer a substituição $\frac{1-x}{1+x} = t$ e desenvolver $\ln x$ em série de potências de t. **2640.** $\frac{x}{1+x} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n-2)}\left(\frac{x}{1+x}\right)^n + \ldots$ $\left(-\frac{1}{2}\leqslant x<\infty\right)$. **2641.** $|R| < \frac{e}{51} < \frac{1}{40}$.

2642. $|R| < \frac{1}{11}$. **2643.** $\frac{\pi}{6} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5} \approx 0{,}523$. **Indicação.** Para demonstrar que o erro não excede a 0,001 é preciso avaliar o resto da série através da progressão geométrica que excede a este resto. **2644.** Dois termos, isto é, $1-\frac{x^2}{2}$. **2645.** Dois termos, isto é, $x - \frac{x^3}{6}$. **2646.** Oito termos, isto é, $1+\sum_{n=1}^{7}\frac{1}{n!}$. **2647.** 99; 999. **2648.** 1,92. **2649.** $|R| < 0{,}0003$. **2650.** 2,087.

2651. $|x| < 0{,}69$; $|x| < 0{,}39$; $|x| < 0{,}22$. **2652.** $|x| < 0{,}39$; $|x| < 0{,}18$. **2653.** $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^3\cdot 3\cdot 3!} \approx 0{,}4931$. **2654.** 0,7468. **2655.** 0,608. **2656.** 0,621. **2657.** 0,2505.

2658. 0,026. **2659.** $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-y)^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty < x < \infty;\ -\infty < y < \infty)$.

2660. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-y)^{2n} - (x+y)^{2n}}{2\cdot(2n)!}$ $(-\infty < x < \infty;\ -\infty < y < \infty)$.

2661. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x^2+y^2)^{2n-1}}{(2n-1)!}$ $(-\infty<x<\infty;\ -\infty<y<\infty)$. 2662. $1+2\sum_{n=1}^{\infty}(y-x)^n$; $|x-y|<y$. **Indicação.** $\frac{1-x+y}{1+x-y}=-1+\frac{2}{1-(y-x)}$. Utilizar a progressão geométrica. 2663. $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n+y^n}{n}$ $(-1\leqslant x<1;\ -1\leqslant y<1)$. **Indicação.** $1-x-y+xy=(1-x)(1-y)$. 2664. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}+y^{2n+1}}{2n+1}$ $(-1\leqslant x\leqslant 1;-1\leqslant y\leqslant 1)$. **Indicação.** $\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}=\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y$ (quando $|x|\leqslant 1,\ |y|\leqslant 1$). 2665. $f(x+h,\ y+k)=ax^2+2bxy+cy^2+2(ax+by)h+2(bx+cy)k+ah^2+2bhk+ck^2$. 2666. $f(1+h,\ 2+k)-f(1,2)=9h-21k+3h^2+3hk-12k^2+h^3-2k^3$.

2667. $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(x-2)+(y+2)]^n}{n!}$. 2668. $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\left[x+\left(y-\frac{\pi}{2}\right)\right]^{2n}}{(2n)!}$.

2669. $1+x+\frac{x^2-y^2}{2!}+\frac{x^3-3y^2}{3!}+\ldots$. 2670. $1+x+xy+\frac{1}{2}x^2y+\ldots$.

2671. $\frac{c_1+c_2}{2}-\frac{2(c_1-c_2)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{2n+1}$; $S(0)=\frac{c_1+c_2}{2}$; $S(\pm\pi)=\frac{c_1+c_2}{2}$.

2672. $\frac{b-a}{4}\pi-\frac{2(b-a)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}+(a+b)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\operatorname{sen}nx}{n}$; $S(\pm\pi)=\frac{b-a}{2}\pi$. 2673. $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$; $S(\pm\pi)=\pi^2$. 2674. $\frac{2}{\pi}\operatorname{sen h}a\pi\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}(a\cos nx-n\operatorname{sen}nx)\right]$; $S(\pm\pi)=\cos\text{h}\,a\pi$. 2675. $\frac{2\operatorname{sen}a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n\operatorname{sen}nx}{a^2-n^2}$ se a não é número inteiro; $\operatorname{sen}ax$, se a é um número inteiro. $S(\pm\pi)=0$.

2676. $\frac{2\operatorname{sen}a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a\cos nx}{a^2-n^2}\right]$, se a não é número inteiro; $\cos ax$ se a é número inteiro; $S(\pm\pi)=\cos a\pi$. 2677. $\frac{2\operatorname{sen h}a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\operatorname{sen}nx}{a^2+n^2}$; $S(\pm\pi)=0$.

2678. $\frac{2\operatorname{sen h}a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a\cos nx}{a^2+n^2}\right]$; $S(\pm\pi)=\cos\text{h}\,a\pi$. 2679. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}nx}{n}$.

2680. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{2n-1}$; a) $\frac{\pi}{4}$, b) $\frac{\pi}{3}$; c) $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$. 2681. a) $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\operatorname{sen}nx}{n}$; b) $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$; $\frac{\pi^2}{8}$. 2682. a) $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\operatorname{sen}nx$, onde $b_{2k-1}=\frac{2\pi}{2k-1}-\frac{8}{\pi(2k-1)^3}$ e $b_{2k}=-\frac{\pi}{k}$; b) $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$; 1) $\frac{\pi^2}{6}$; 2) $\frac{\pi^2}{12}$.

2683. a) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[1-(-1)^n e^{a\pi}]\frac{n\operatorname{sen} nx}{a^2+n^2}$; b) $\frac{e^{a\pi}-1}{a\pi}+\frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(-1)^n e^{a\pi}-1]\cos nx}{a^2+n^2}$.

2684. a) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\frac{n\pi}{2}}{n}\operatorname{sen} nx$; b) $\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{2}\cos nx$.

2685. a) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{(2n-1)^2}$; b) $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\times\frac{\cos 2(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

2686. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n\operatorname{sen} nx$, onde $b_{2k}=(-1)^{k-1}\frac{1}{2k}$, $b_{2k+1}=(-1)^k\frac{2}{\pi(2k+1)^2}$.

2687. $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{(2n-1)^3}$. **2688.** $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\operatorname{sen} nx}{4n^2-1}$. **2689.** $\frac{2h}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\right.$ $\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nh}{nh}\cos nx\right)$. **2690.** $\frac{2h}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen} nh}{nh}\right)^2\cos nx\right]$. **2691.** $1-\frac{\cos x}{2}+$ $+2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n^2-1}$. **2692.** $\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}\right]$ **2694.** **Solução**

1) $a_{2n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos 2nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cdot\cos 2nx\,dx+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos 2nx\,dx$. Se fizermos a substituição $t=\frac{\pi}{2}-x$ na primeira integral e $t=x-\frac{\pi}{2}$ na segunda, através da suposta identidade $f\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=-f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$ é fácil observar que $a_{2n}=0$ (n = 0, 1, 2 ...); 2) $b_{2n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen} 2nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\operatorname{sen} 2nx\,dx+$ $+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} 2nx\,dx$. A mesma substituição que no caso 1), tendo-se em conta a suposta identidade $f\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$ nos leva a igualdades $b_{2n}=0$ $(n=1, 2, \ldots)$.

2695. $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$. **2696.** $1-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} 2\pi nx}{n}$. **2697.** $\operatorname{sen h} l\left[\frac{1}{l}+\right.$ $\left.+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{l\cos\frac{n\pi x}{l}-\pi n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}}{l^2+n^2\pi^2}\right]$. **2698.** $\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{5}}{n}$.

2699. a) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{sen } 2(n-1)\pi x}{2n-1}$; b) 1. **2700.** a) $\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\text{sen}\frac{n\pi x}{l}}{n}$; b) $\frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n-1)\pi x}{l}}{(2n-1)^2}$. **2701.** a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ sen } \frac{nx}{2}$, onde $b_{2k+1} = \frac{8}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{2k+1} - \frac{4}{(2k+1)^3}\right]$, $b_{2k} = -\frac{4\pi}{k}$; b) $\frac{4\pi^2}{3} - 16\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos\frac{nx}{2}}{n^2}$.

2702. a) $\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\text{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{2}}{(2n+1)^2}$; b) $\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$. **2703.** $\frac{2}{3} - \frac{9}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{3} + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\pi x}{n^2}$.

Capítulo IX

2704. Sim. **2705.** Não. **2706.** Sim. **2707.** Sim. **2708.** Sim. **2709.** a) Sim; b) não. **2710.** Sim. **2714.** $y - xy' = 0$. **2715.** $xy' - 2y = 0$. **2716.** $y - 2xy' = 0$. **2717.** $x\,dx + y\,dy = 0$. **2718.** $y' = y$. **2719.** $3y^2 - x^2 = 2xyy'$. **2720.** $xyy'(xy^2 + 1) = 1$. **2721.** $y = xy' \ln \frac{x}{y}$. **2722.** $2xy'' + y' = 0$. **2723.** $y'' - y' - 2y = 0$. **2724.** $y'' + 4y = 0$. **2725.** $y''' - 2y'' + y' = 0$. **2726.** $y'' = 0$. **2727.** $y''' = 0$. **2728.** $(1 + y'^2)\, y''' - 3y'y''^2 = 0$. **2729.** $y^2 - x^2 = 25$. **2730.** $y = xe^{2x}$. **2731.** $y = -\cos x$. **2732.** $y = \frac{1}{6}(-5e^{-x} + 9e^{x} - 4e^{2x})$. **2738.** 2,593 (valor exato $y = e$). **2739.** 4,780 (valor exato $y = 3(e-1)$). **2740.** 0,946 (valor exato $y = 1$). **2741.** 1,826 (valor exato $y = \sqrt{3}$). **2742.** $\text{ctg}^2 y = \text{tg}^2 x + C$. **2743.** $x = \frac{Cy}{\sqrt{1+y^2}}$; $y = 0$. **2744.** $x^2 + y^2 = \ln Cx^2$. **2745.** $y = \frac{a + Cx}{1 + ax}$ **2746.** $\text{tg } y = C(1 - e^x)^3$; $x = 0$. **2747.** $y = C \text{ sen } x$. **2748.** $2e^{\frac{y^2}{2}} = \sqrt{e}(1 + e^x)$. **2749.** $1 + y^2 = \frac{2}{1 - x^2}$. **2750.** $y = 1$. **2751.** $\text{arctg}(x + y) = x + C$. **2752.** $8x + 2y + 1 = 2\,\text{tg}(4x + C)$. **2753.** $x + 2y + 3\ln[2x + 3y - 7] = C$. **2754.** $5x + 10y + C = 3\ln[10x - 5y + 6]$. **2755.** $\rho = \frac{C}{1 - \cos\varphi}$ ou $y^2 = 2Cx + C^2$. **2756.** $\ln \rho = \frac{1}{2\cos^2\varphi} - \ln[\cos\varphi] + C$ ou $\ln|x| - \frac{y^2}{2x^2} = C$. **2757.** A reta $y = Cx$ ou a hipérbole $y = \frac{C}{x}$. **Indicação.** O segmento da tangente e igual a $\sqrt{y^2 + \left(\frac{y}{y'}\right)^2}$.

2758. $y^2 - x^2 = C$. **2759.** $y = Ce^{\frac{x}{a}}$. **2760.** $y^2 = 2px$. **2761.** $y = ax^2$. **Indicação.**

Pela condição $\frac{\int_0^x xy\,dx}{\int_0^x y\,dx} = \frac{3}{4}x$. Derivando duas vezes em relação a x, obtemos a equação diferencial. **2762.** $y^2 = \frac{1}{3}x$. **2763.** $y = \sqrt{4 - x^2} + 2\ln\frac{2 - \sqrt{4 - x^2}}{|x|}$. **2764.** Feixe de retas, $y = kx$. **2765.** Família de elípses semelhantes $2x^2 + y^2 = C^2$. Família de hipérboles $x^2 - y^2 = C$. **2767.** Família de circunferências $x^2 + (y - b)^2 = b^2$. **2768.** $y = x\ln\left|\frac{C}{x}\right|$. **2769.** $y = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}$. **2770.** $x = Ce^{\frac{x}{y}}$.

2771. $(x - C)^2 - y^2 = C^2$; $(x - 2)^2 - y^2 = 4$; $y = \pm x$. **2772.** $\sqrt{\frac{x}{y}} + \ln|y| = C$.

2773. $y = \frac{C}{2}x^2 - \frac{1}{2C}$; $x = 0$. **2774.** $(x^2 + y^2)^3 (x + y)^2 = C$. **2775.** $y = x\sqrt{1 - \frac{3}{8}x}$. **2776.** $(x + y - 1)^3 = C(x - y + 3)$. **2777.** $3x + y + 2\ln|x + y - 1| = C$. **2778.** $\ln|4x + 8y + 5| + 8y - 4x = C$. **2779.** $x^2 = 1 - 2y$. **2780.** Parabolóide de revolução. **Solução.** Graças à sua simetria, o espelho procurado é uma superfície de revolução. A origem das coordenadas se encontra na fonte luminosa; o eixo OX é a direção do feixe de raios. Se a tangente a qualquer ponto $M(x, y)$ da curva da seção feita pelo plano XOY na superfície procurada forma com o eixo OX um ângulo φ, enquanto que o segmento que une a origem das coordenadas com este ponto $M(x, y)$ forma um ângulo α com o mesmo eixo, teremos que $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}2\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}^2\varphi}$. Porém, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$, $\operatorname{tg}\varphi = y'$. A equação diferencial procurada é $y - yy'^2 = 2xy'$ e sua solução $y^2 = 2Cx + C^2$. A seção plana é uma parábola. A superfície procurada é um parabolóide de revolução. **2781.** $(x - y)^2 - Cy = 0$. **2782.** $x^2 = C(2y + C)$.

2783. $(2y^2 - x^2)^3 = Cx^2$. **Indicação.** Partir de que a área é igual a $\int_a^x y\,dx$. **2784.** $y = Cx - x\ln|x|$. **2785.** $y = Cx + x^2$. **2786.** $y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{C}{x^2}$. **2787.** $x\sqrt{1 + y^2} + \cos y = C$. **Indicação.** A equação é linear em relação a x e $\frac{dx}{dy}$. **2788.** $x = Cy^2 - \frac{1}{y}$.

2789. $y = \frac{e^x}{x} + \frac{ab - e^a}{x}$. **2790.** $y = \frac{1}{2}(x\sqrt{1 - x^2} + \operatorname{arcsen} x)\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$. **2791.** $y = \frac{x}{\cos x}$. **2792.** $y(x^2 + Cx) = 1$. **2793.** $y^2 = x\ln\frac{C}{x}$. **2794.** $x^2 = \frac{1}{y + Cy^2}$.

2795. $y^3(3 + Ce^{\cos x}) = x$. **2797.** $xy = Cy^2 + a^2$. **2798.** $y^2 + x + ay = 0$. **2799.** $x = y\ln\frac{y}{a}$. **2800.** $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$. **2801.** $x^2 + y^2 - Cy + a^2 = 0$. **2802.** $\frac{x^2}{2} + xy + y^2 = C$.

2803. $\frac{x^3}{3} + xy^2 + x^2 = C$. **2804.** $\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + 2x + \frac{y^3}{3} = C$. **2805.** $x^2 + y^2 - 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C$.

2806. $x^2 - y^2 = Cy^3$. **2807.** $\frac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} = 2$. **2808.** $\ln|x| - \frac{y^2}{x} = C$. **2809.** $\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C$.

2810. $\frac{1}{y}\ln x + \frac{1}{2}y^2 = C$. **2811.** $(x \operatorname{sen} y + y\cos y - \operatorname{sen} y)e^x = C$. **2812.** $(x^2C^2 + 1 - 2Cy)(x^2 + C^2 - 2Cy) = 0$; a integral singular é $x^2 - y^2 = 0$. **2813.** A integral geral é $(y + C)^2 = x^3$; não há integral singular. **2814.** A integral geral é $\left(\frac{x^2}{2} - y + C\right)\left(x - \frac{y^2}{2} + C\right) = 0$; não há integral singular. **2815.** A integral geral é $y^2 + C = 2Cx$; a integral singular é $x^2 - y^2 = 0$. **2816.** $x = \frac{1}{2}\cos x \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} x$.

2817. $\begin{cases} x = \operatorname{sen} p + \ln p, \\ y = p\operatorname{sen} p + \cos p + p + C. \end{cases}$ **2818.** $\begin{cases} x = e^p + pe^p + C, \\ y + p^2e^p. \end{cases}$ Solução singular $y = 0$. **2819.** $\begin{cases} x = 2p - \frac{2}{p} + C, \\ y = p^2 + 2\ln p. \end{cases}$ **2820.** $4y = x^2 + p^2$, $\ln|p - x| = C + \frac{x}{p - x}$.

2821. $\ln\sqrt{p^2 + y^2} + \operatorname{arctg}\frac{p}{y} = C$, $x = \ln\frac{y^2 + p^2}{2p}$. Solução singular $y = e^x$.

2822. $y = C + \frac{x^2}{C}$; $y = \pm 2x$. **2823.** $\begin{cases} x = \ln|p| - \operatorname{arcsen} p + C, \\ y = p + \sqrt{1 - p^2}. \end{cases}$

2824. $\begin{cases} x = Ce^{-p} - 2p + 2, \\ y = C(1 + p)e^{-p} - p^2 + 2. \end{cases}$ **2825.** $\begin{cases} x = \frac{1}{3}\left(Cp^{-\frac{1}{2}} - p\right), \\ y = \frac{1}{6}\left(Cp^{\frac{1}{2}} + p^2\right). \end{cases}$ Indicação. A equação diferencial, da qual se determina x como função de p, é homogênea. **2826.** $y = Cx + C^2$; $y = -\frac{x^2}{4}$. **2827** $y = Cx + C$; não há solução singular. **2828.** $y = Cx + \sqrt{1 + C^2}$; $x^2 + y^2 = 1$. **2829.** $y = Cx + \frac{1}{C}$; $y^2 = 4x$. **2830.** $xy = C$. **2831.** Uma circunferência e sua família de tangentes. **2832.** O astróide $x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}$. **2833.** a) Homogênea; $y = xu$; b) linear em relação a x; $x = uv$; c) linear em relação a y; $y = uv$; d) equação de Bernoulli; $y = uv$; e) com variáveis separáveis; f) equação de Clairaut; reduzi-la à forma $y = xy' \pm \sqrt{y'^3}$; g) equação de Langrange; derivà-la em relação a x; h) equação de Bernoulli; $y = uv$; i) redutível a uma equação com variáveis separáveis; $u = x + y$; j) equação de Lagrange, derivá-la em relação a x; l) equação de Bernoulli em relação a x; $x = uv$; m) equação em diferenciais exatas; n) linear; $y = uv$; o) equação de Bernoulli; $y = uv$. **2834.** a) $\operatorname{sen}\frac{y}{x} = -\ln|x| + C$; b) $x = y \cdot e^{Cy+1}$. **2835.** $x^2 + y^4 = Cy^2$. **2836.** $y = \frac{x}{x^2 + C}$.

2837. $xy\left(C - \frac{1}{2}\ln^2 x\right) = 1$. **2838.** $y = Cx + C\ln C$; a solução singular é $y = -e^{-(x+1)}$. **2839.** $y = Cx + \sqrt{-aC}$; a solução singular é $y = \frac{a}{4x}$. **2840.** $3y + \ln\frac{|x^3 - 1|}{(y + 1)^6} = C$. **2841.** $\frac{1}{2}e^{2x} - e^y - \operatorname{arctg} y - \frac{1}{2}\ln(1 + y^2) = C$. **2842.** $y =$

$= x^2\left(1 + Ce^{\frac{1}{x}}\right)$. **2843.** $x = y^2(C - e^{-y})$. **2844.** $y = Ce^{-\operatorname{sen} x} + \operatorname{sen} x - 1$. **2845.** $y = ax + C|1 - x^2|$. **2846.** $y = \frac{x}{x+1}(x + \ln|x| + C$. **2847.** $x = Ce^{\operatorname{sen} y} - 2a(1 + \operatorname{sen} y)$.

2848. $\frac{x^2}{2} + 3x + y + \ln([x-3)^{10}|y-1|^3] = C$. **2849.** $2 \operatorname{arctg} \frac{y-1}{2x} = \ln Cx$.

2850. $x^2 = 1 - \frac{2}{y} + Ce^{-\frac{2}{y}}$. **2851.** $x^3 = Ce^y - y - 2$. **2852.** $\sqrt{\frac{y}{x}} + \ln|x| = C$.

2853. $y = x \operatorname{arcsen}(Cx)$. **2854.** $y^2 = Ce^{-2x} + \frac{2}{5}\operatorname{sen} x + \frac{4}{5}\cos x$. **2855.** $xy = C(y-1)$,

2856. $x = Ce^y \frac{1}{2}(\operatorname{sen} y + \cos y)$. **2857.** $py = C(p-1)$. **2858.** $x^4 = Ce^{4y} - y^3 - \frac{3}{4}y^2 - \frac{3}{8}y - \frac{3}{32}$. **2859.** $(xy + C)(x^2y + C) = 0$. **2860.** $\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x}{y} = C$.

2861. $xe^y - y^2 = C$. **2862.** $\begin{cases} x = \frac{C}{p^2} - \frac{\sqrt{1+p^2}}{2p} + \frac{1}{2p^2}\ln(p + \sqrt{1+p^2}), \\ y = 2px + \sqrt{1+p^2}. \end{cases}$

2863. $y = xe^{Cx}$. **2864.** $2e^x - y^4 = Cy^2$. **2865.** $\ln|y+2| + 2 \operatorname{arctg} \frac{y+2}{x-3} = C$.

2866. $y^2 + Ce^{-\frac{y^2}{2}} + \frac{1}{x} - 2 = 0$. **2867.** $x^2 \cdot y = Ce^{\frac{y}{a}}$. **2868.** $x + \frac{x}{y} = C$. **2869.** $y = \frac{C - x^4}{4(x^2-1)^{3/2}}$. **2870.** $y = C \operatorname{sen} x - a$. **2871.** $y = \frac{a^2 \ln(x + \sqrt{a^2+x^2}) + C}{x + \sqrt{a^2+x^2}}$.

2872. $(y - Cx)(y^2 - x^2 + C) = 0$. **2873.** $y = Cx + \frac{1}{C^2}$, $y = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2x^2}$. **2874.** $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 = C$. **2875.** $p^2 + 4y^2 = Cy^3$. **2876.** $y = x - 1$. **2877.** $y = x$. **2878.** $y = 2$. **2879.** $y = 0$. **2880.** $y = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x)$. **2881.** $y = \frac{1}{4}(2x^2 + 2x + 1)$. **2882.** $y = e^{-x} + 2x - 2$. **2883.** a) $y = x$; b) $y = Cx$, onde C é arbitrária; o ponto $(0;0)$ é o ponto singular da equação diferencial. **2884.** a) $y^2 = x$; b) $y^2 = 2px$; $(0;0)$ é o ponto singular. **2885.** a) $(x-C)^2 + y^2 = C^2$; b) não tem solução; c) $x^2 + y^2 = x$; $(0;0)$ é o ponto singular. **2886.** $y = e^{\frac{x}{y}}$. **2887.** $y = (\sqrt{2a} \pm \sqrt{x})^2$. **2888.** $y^2 = 1 - e^{-x}$. **2889.** $r = Ce^{a\varphi}$. **Indicação.** Passar às coordenadas polares. **2890.** $3y^2 - 2x = 0$. **2891.** $r = k\varphi$. **2892.** $x^2 + (y-b)^2 = b^2$. **2893.** $y^2 + 16x = 0$. **2894.** A hipérbole $y^2 - x^2 = C$ ou a circunferência $x^2 + y^2 = C^2$ **2895.** $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. **Indicação.** Partir de que a área é igual a $\int_0^x y\,dx$ e a extensão do arco $\int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,dx$.

2896. $x = \frac{a^2}{y} + Cy$. **2897.** $y^2 = 4C(C + a - x)$. **2898.** **Indicação.** Aplicar o fato de ser a resultante da força de gravidade e da centrífuga, normal à superfície. Tomando o eixo de rotação como eixo OY e designando por ω a velocidade

angular de rotação ,obtemos para a seção plana axial da superfície procurada a equação diferencial $g\frac{dy}{dx} = \omega^2 x$. **2899.** $p = e^{-0,000167h}$. **Indicação.** A pressão em cada nível da coluna vertical de ar pode ser considerada como dependente exclusivamente das capas que descansam mais acima. Emprega-se a lei de Boyle-Mariotte, segundo a qual a densidade é proporcional à pressão. A equação diferencial procurada é $dp = -kp\,dh$. **2900.** $s = \frac{1}{2}kl\omega$. **Indicação.** Equação $ds = k\omega\cdot\frac{l-x}{l}dx$. **2901.** $s = \left(p + \frac{1}{2}w\right)kl$. **2902.** $T = a + (T_0 - a)e^{-kt}$. **2903.** Em uma hora. **2904.** $\omega = 100\left(\frac{3}{5}\right)^t$ r.p.m. **2905.** Em 100 anos desintegra-se 4,2% da quantidade inicial Q_0. **Indicação.** Equação $\frac{dQ}{dt} = -kQ$; $Q = Q_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}$. **2906.** $t \approx 35{,}2$ s. **Indicação.** Equação $\pi(h^2 - 2h)\,dh = \pi\left(\frac{1}{10}\right)^2 v\,dt$. **2907.** $\frac{1}{1\,024}$. **Indicação.** Equação $dQ = -kQ\,dh$; $Q = Q_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h}{3}}$. **2908.** $v \to \sqrt{\frac{gm}{k}}$ quando $t \to \infty$ (k é o coeficiente de proporcionalidade). **Indicação.** Equação $m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2$; $v = \sqrt{\frac{gm}{k}}\,\mathrm{tgh}\left(t\sqrt{\frac{gk}{m}}\right)$. **2909.** 18,1 kg. **Indicação.** Equação $\frac{dx}{dt} = k\left(\frac{1}{3} - \frac{x}{300}\right)$. **2910.** $i = \frac{E}{R^2 + L^2\omega^2}\left[(R\,\mathrm{sen}\,\omega t - I\omega\cos\omega t) + L\omega e^{-\frac{R}{L}t}\right]$. **Indicação.** Equação $Ri + L\frac{di}{dt} = E\,\mathrm{sen}\,\omega t$. **2911.** $y = x\ln|x| + C_1x + C_2$. **2912.** $1 + C_1y^2 = \left(C_2 + \frac{C_1x}{\sqrt{2}}\right)^2$. **2913.** $y = \ln|e^{2x} + C_1| - x + C_2$. **2914.** $y = C_1 + C_2\ln|x|$. **2915.** $y = C_1e^{C_2x}$. **2916.** $y = \pm\sqrt{C_1x + C_2}$. **2917.** $y = (1 + C_1^2)\ln|x + C_1| - C_1x + C_2$. **2918.** $(x - C_1) = a\ln\left|\mathrm{sen}\,\frac{y - C_2}{a}\right|$ quando $a \neq 0$; $y = C$ quando $a = 0$. **2919.** $y = \frac{1}{2}(\ln|x|)^2 + C_1\ln|x| + C_2$. **2920.** $x = \frac{1}{C_1}\ln\left|\frac{y}{y + C_1}\right| + C_2$; $y = C$. **2921.** $y = C_1e^{C_2x} + \frac{1}{C_2}$. **2922.** $y = \pm\frac{1}{2}\left[x\sqrt{C_1^2 - x^2} + C_1^2\,\mathrm{arcsen}\,\frac{x}{C_1}\right] + C_2$. **2923.** $y = (C_1e^x + 1)x + C_2$. **2924.** $y = (C_1x - C_1^2)\,e^{\frac{x}{C_1}+1} + C_2$; $y = \frac{e}{2}x^2 + C$ (solução singular). **2925.** $y = C_1x(x - C_1) + C_2$; $y = \frac{x^3}{3} + C$ (solução singular). **2926.** $y = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + C_1x\ln|x| + C_2x + C_3$. **2927.** $y = \mathrm{sen}(C_1 + x) + C_2x + C_3$. **2928.** $y = x^3 + 3x$. **2929.** $y = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$. **2930.** $y = x + 1$. **2931.** $y = Cx^2$. **2932.** $y = C_1\frac{1 + C_2e^x}{1 - C_2e^x}$; $y = C$.

2933. $x = C_1 + \ln\left|\frac{y - C_2}{y + C_2}\right|$. **2934.** $x = C_1 - \frac{1}{C_2}\ln\left|\frac{y}{y + C_2}\right|$. **2935.** $x = C_1y^2 + y\ln y + C_2$. **2936.** $2y^2 - 4x^2 = 1$. **2937.** $y = x + 1$. **2938.** $y = \frac{x^2 - 1}{2(e^2 - 1)} - \frac{e^2 - 1}{4}\ln|x|$ ou $y = \frac{1 - x^2}{2(e^2 + 1)} + \frac{e^2 + 1}{4}\ln|x|$. **2939.** $y = \frac{1}{2}x^2$. **2940.** $y = \frac{1}{2}x^2$. **2941.** $y = 2e^x$. **2942.** $x = -\frac{3}{2}(y + 2)^{\frac{2}{3}}$. **2943.** $y = e^x$. **2944.** $y^2 = \frac{e}{e - 1} + \frac{e^{-x}}{1 - e}$. **2945.** $y = \frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{3}$. **2946.** $y = \frac{3e^{3x}}{2 + e^{3x}}$. **2947.** $y = \sec^2 x$. **2948.** $y = \operatorname{sen} x + 1$. **2949.** $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}$. **2950.** $x = -\frac{1}{2}e^{-y^2}$. **2951.** Não tem solução. **2952.** $y = e^x$. **2953.** $y = 2\ln|x| - \frac{2}{x}$. **2954.** $y = \frac{(x + C_1^2 + 1)^2}{2} + \frac{4}{3}C_1(x + 1)^{\frac{3}{2}} + C_2$. Solução singular $y = C$. **2955.** $y = C_1\frac{x^2}{2} + (C_1 - C_1^2)x + C_2$. Solução singular $y = \frac{(x + 1)^3}{12} + C$. **2956.** $y = \frac{1}{12}(C_1 + x)^4 + C_2x + C_3$. **2957.** $y = C_1 + C_2e^{C_1x}$; $y = 1 - e^x$; $y = -1 + e^{-x}$; sloução singular $y = \frac{4}{C - x}$. **2958.** Circunferências. **2959.** $(x - C_1)^2 - C_2y^2 + kC_2^2 = 0$. **2960.** A catenária $y = a\cos\text{h}\frac{x - x_0}{2}$. A circunferência $(x - x_0)^2 + y^2 = a^2$. **2961.** A parábola $(x - x_0)^2 = 2ay - a^2$. A ciclóide $x - x_0 = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$. **2962.** $e^{ay + C_2} = \sec(ax + C_1)$. **2963.** Parábola. **2964.** $y = \frac{C_1}{2}\frac{H}{q}e^{\frac{q}{H}x} + \frac{1}{2C_1}\frac{H}{q}e^{-\frac{q}{H}x} + C_2$ ou $y = a\cos\text{h}\frac{x + C}{a} + C_2$, onde H é a tensão horizontal constante, e $\frac{H}{q} = a$. **Indicação.** A equação diferencial é $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{H}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$. **2965.** A equação do movimento é $\frac{d^2s}{dt^2} = g(\operatorname{sen}\alpha - \cos\mu\alpha)$. A lei do movimento é $s = \frac{gt^2}{2}(\operatorname{sen}\alpha - \mu\cos\alpha)$. **2966.** $s = \frac{m}{k}\ln\cos\text{h}\left(t\sqrt{g\frac{k}{m}}\right)$. **Indicação.** A equação do movimento é $m\frac{d^2s}{dt^2} = mg - k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$. **2967.** Dentro de 6,45 s. **Indicação.** A equação do movimento é $\frac{300}{g}\frac{d^2x}{dt^2} = -10v$. **2968.** Não; b) sim; c) sim; d) sim; e) não; f) não; g) não; h) sim. **2969.** a) $y'' + y = 0$; b) $y'' - 2y' + y = 0$; c) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$; d) $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0$. **2970.** $y = 3x - 5x^2 + 2x^3$. **2971.** $y = \frac{1}{x}(C_1\operatorname{sen} x + C_2\cos x)$. **Indicação.** Empregar a substituição, $y = y_1u$. **2972.** $y = C_1x + C_2\ln x$. **2973.** $y = A + Bx^2 + x^3$. **2974.** $y = \frac{x^2}{3} + Ax + \frac{B}{x}$. **Indicação.** As soluções particulares da

equação homogênea são $y_1 = x$, $y_2 = \frac{1}{x}$. Pelo método das variações das constantes arbitrárias, achamos: $C_1 = \frac{x}{2} + A$; $C_2 = -\frac{x^3}{6} + B$. **2975.** $y = A + B\operatorname{sen} x + C\cos x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + \operatorname{sen} x \ln|\cos x| - x\cos x$. **2976.** $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$. **2977.** $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x}$. **2978.** $y = C_1 + C_2 e^{x}$. **2979.** $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$. **2980.** $y = e^{x}(C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x)$. **2981.** $y = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x)$. **2982.** $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$. **2983.** $y = e^{2x}\left(C_1 e^{x\sqrt{2}} + C_2 e^{-x\sqrt{2}}\right)$. **2984.** Se $k > 0$, $y = C_1 e^{x\sqrt{k}} + C_2 e^{-x\sqrt{k}}$; se $k < 0$, $y = C_1 \cos\sqrt{-k}x + C_2 \operatorname{sen}\sqrt{-k}x$. **2985.** $y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 e^{\frac{\sqrt{5}}{2}x} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{5}}{2}x}\right)$. **2986.** $y = e^{\frac{x}{6}}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{11}}{6}x + C_2 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{11}}{6}x\right)$. **2987.** $y = 4e^{x} + e^{4x}$. **2988.** $y = e^{-x}$. **2989.** $y = \operatorname{sen} 2x$. **2990.** $y = 1$. **2991.** $y = a\cosh\frac{x}{a}$. **2992.** $y = 0$. **2993.** $y = C\operatorname{sen}\pi x$. **2994.** a) $xe^{2x}(Ax^2 + Bx + C)$; b) $A\cos 2x + B\operatorname{sen} 2x$; c) $A\cos 2x + B\operatorname{sen} 2x + Cx^2 e^{2x}$; d) $e^{x}(A\cos x + B\operatorname{sen} x)$; e) $e^{x}(Ax^2 + Bx + C) + xe^{2x}(Dx + E)$; f) $xe^{x}[(Ax^2 + Bx + C)\cos 2x + (Dx^2 + Ex + F)\operatorname{sen} 2x]$. **2995.** $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + \frac{1}{8}(2x^2 + 4x + 3)$. **2996.** $y = e^{\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + C_2 \operatorname{sen}\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + x^3 + 3x^2$. **2997.** $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + \frac{1}{9}e^{2x}$. **2998.** $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{7x} + 2$. **2999.** $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}xe^{x}$. **3000.** $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}x\operatorname{sen} x$. **3001.** $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} - \frac{2}{5}(3\operatorname{sen} 2x + \cos 2x)$. **3002.** $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + x\left(\frac{x}{10} - \frac{1}{25}\right)e^{2x}$. **3003.** $y = (C_1 + C_2 x)e^{x} + \frac{1}{2}\cos x + \frac{x^2}{4}e^{x} - \frac{1}{8}e^{-x}$. **3004.** $y = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{20}(2\cos 2x - \operatorname{sen} 2x)$. **3005.** $y = e^{x}(C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x) + \frac{x}{4}e^{x}\operatorname{sen} 2x$. **3006.** $y = \cos 2x + \frac{1}{3}(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x)$. **3007.** 1) $x = C_1 \cos\omega t + C_2 \operatorname{sen}\omega t + \frac{A}{\omega^2 - p^2}\operatorname{sen} pt$; 2) $x = C_1 \cos\omega t + C_2 \operatorname{sen}\omega t - \frac{A}{2\omega}t\cos\omega t$. **3008.** $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} - xe^{4x}$. **3009.** $y = C_1 + C_2 e^{2x} + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6}$. **3010.** $y = e^{x}(C_1 + C_2 x + x^2)$. **3011.** $y = C_1 + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{5}{2}x$. **3012.** $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{4x} - \frac{1}{9}e^{x} + \frac{1}{5}(3\cos 2x + \operatorname{sen} 2x)$. **3013.** $y = C_1 + C_2 e^{-x} + e^{x} + \frac{5}{2}x^2 - 5x$. **4014.** $y = C_1 + C_2 e^{x} + 3xe^{x} - x - x^2$. **3015.** $y = (C_1 + C_2 x + \frac{1}{2}x^2)e^{-x} + \frac{1}{4}e^{x}$. **3016.** $y = (C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x)e^{x} + \frac{1}{37}(\operatorname{sen} 3x + 6\cos 3x) + \frac{e^{x}}{9}$. **3017.** $y = (C_1 + C_2 x + x^2)e^{2x} + \frac{x+1}{8}$. **3018.** $y = C_1 + C_2 e^{3x} - \frac{1}{10}(\cos x + 3\operatorname{sen} x) - \frac{x^2}{6} - \frac{x}{9}$

3019. $y = \frac{1}{8} e^{2x}(4x + 1) - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}$. 3020. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} - x \operatorname{sen} x - \cos x$. 3021. $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} - \frac{e^{2x}}{20}(\operatorname{sen} 2x + 2\cos 2x)$. 3022. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x - \frac{x}{4}(3 \operatorname{sen} 2x + 2\cos 2x) + \frac{1}{4}$. 3023. $y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x - 2x \cos x)$.

3024. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{4}(x^2 - x)e^x$. 3025. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x + \frac{1}{4} x \operatorname{sen} x - \frac{1}{16}\cos x + \frac{1}{54}(3x - 1)e^{3x}$. 3026. $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} + \frac{1}{9}(2 - 3x) + \frac{1}{16}(2x^2 - x)e^{3x}$. 3027. $y = C_1 + C_2e^{2x} - 2xe^x - \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}x^2$. 3028. $y = \left(C_1 + C_2x + \frac{x^3}{6}\right)e^{2x}$. 3029. $y = C_1e^{-3x} + C_2e^x - \frac{1}{8}(2x^2 + x)e^{-3x} + \frac{1}{16}(2x^2 + 3x)e^x$. 3030. $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + \frac{x}{4}\cos x + \frac{x^2}{4}\operatorname{sen} x - \frac{x}{8}\cos 3x + \frac{3}{32}\operatorname{sen} 3x$. **Indicação.** Transformar o produto de cossenos em soma de cossenos.

3031. $y = C_1e^{-x\sqrt{2}} + C_2e^{x\sqrt{2}} + xe^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x$. 3032. $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + \cos x \cdot \ln\left|\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$. 3033. $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cdot \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.
3034. $y = (C_1 + C_2x)e^x + xe^x \ln|x|$. 3035. $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + xe^{-x}\ln|x|$. 3036. $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + x \operatorname{sen} x + \cos x \ln|\cos x|$. 3037. $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x - x\cos x + \operatorname{sen} x \ln|\operatorname{sen} x|$. 3038. a) $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + (e^x + e^{-x})\operatorname{arctg} e^x$; b) $y = C_1e^{x\sqrt{2}} + C_2e^{-\sqrt{2}} + e^{x^2}$. 3040. A equação do movimento é $\frac{2}{g}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = 2 - k(x + 2)$ $(k = 1)$; $T = 2\pi\sqrt{\frac{2}{g}}$s. 3041. $x = \frac{2g \operatorname{sen} 30t - 60\sqrt{g}\operatorname{sen}\sqrt{g}\,t}{g - 900}$ cm. **Indicação.** Se contarmos x a partir da posição de repouso da carga, então $\frac{4}{g}x'' = 4 - k(x_0 + x - y - l)$, onde x_0 é a distância do ponto de repouso da carga até o ponto inicial de suspensão da mola, l é o comprimento da mola em estado de repouso; portanto $k(x_0 - l) = 4$, donde, $\frac{4}{g}\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - y)$, onde $k = 4$, $g = 981$ cm/s².

3042. $m\frac{d^2x}{dt^2} = k(b - x) - k(b + x)$, $x = c\cos\left(t\sqrt{\frac{2k}{m}}\right)$ 3043. $6\frac{d^2s}{dt^2} = gs$; $t = \sqrt{\frac{6}{g}}\ln(6 + \sqrt{35})$. 3044. a) $r = \frac{a}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})$; b) $r = \frac{v_0}{2\omega}(e^{\omega t} - e^{-\omega t})$. **Indicação.** A equação diferencial do movimento é $\frac{d^2r}{dt^2} = \omega^2 r$. 3045. $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{12x}$. 3046. $y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^x$. 3047. $y = C_1e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$. 3048. $y = C_1 + C_2x + C_3e^{x\sqrt{2}} + C_4e^{-x\sqrt{2}}$. 3049. $y = e^x(C_1 + C_2x + C_3x^2)$. 3050. $y = e^x(C_1\cos x + C_2\operatorname{sen} x) + e^{-x}(C_3\cos x + C_4\operatorname{sen} x)$.

3051. $y = (C_1 + C_2x)\cos 2x + (C_3 + C_4x)\operatorname{sen} 2x$. **3052.** $y = C_1 + C_2e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}\left(C_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_4\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$. **3053.** $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + (C_3 + C_4x)e^{x}$. **3054.** $y = C_1e^{ax} + C_2e^{-ax} + C_3\cos ax + C_4\operatorname{sen} ax$. **3055.** $y = (C_1 + C_2x)e^{\sqrt{3}x} + (C_3 + C_4x)e^{-\sqrt{3}x}$. **3056.** $y = C_1 + C_2x + C_3\cos ax + C_4\operatorname{sen} ax$. **3057.** $y = C_1 + C_2x + (C_3 + C_4x)e^{-x}$. **3058.** $y = (C_1+C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\operatorname{sen} x$. **3059.** $y = e^{-x}(C_1 + C_2x + \ldots + C_nx^{n-1})$. **3060.** $y = C_1 + C_2x + \left(C_3 + C_4x + \frac{x^2}{2}\right)e^{x}$. **3061.** $y = C_1 + C_2x + 12x^2 + 3x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + (C_3 + C_4x)e^{x}$. **3062.** $y = C_1e^{x} + e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - x^3 - 5$. **3063.** $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{-x} + \frac{1}{1\,088}(4\cos 4x - \operatorname{sen} 4x)$. **3064.** $y = C_1e^{-x} + C_2 + C_3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + e^{x}\left(\frac{3}{2}x - \frac{15}{4}\right)$. **3065.** $y = C_1e^{-x} + C_2\cos x + C_3\operatorname{sen} x + e^{x}\left(\frac{x}{4} - \frac{3}{8}\right)$. **3066.** $y = C_1 + C_2\cos x + C_3\operatorname{sen} x + \sec x + \cos x\ln|\cos x| - \operatorname{tg} x\cdot\operatorname{sen} x + x\operatorname{sen} x$. **3067.** $y = e^{-x} + e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + x - 2$. **3068.** $y = (C_1 + C_2\ln x)\frac{1}{x}$, $x>0$. **3069.** $y = C_1x^3 + \frac{C_2}{x}$. **3070.** $y = C_1\cos(2\ln x) + C_2\operatorname{sen}(2\ln x)$, $x > 0$. **3071.** $y = C_1x + C_2x^2 + C_3x^3$. **3072.** $y = C_1 + C_2(3x + 2) - 4/3$. **3073.** $y = C_1x^2 + \frac{C_2}{x}$. **3074.** $y = C_1\cos(\ln x) + C_2\operatorname{sen}(\ln x)$, $x > 0$. **3075.** $y = C_1x^3 + C_2x^2 + \frac{1}{2}x$. **3076.** $y = (x + 1)^2[C_1 + C_2\ln(x + 1)] + (x + 1)^3$, $x > -1$. **3077.** $y = x(\ln x + \ln^2 x)$, $x > 0$. **3078.** $y = C_1\cos x + C_2\operatorname{sen} x$, $z = C_2\cos x - C_1\operatorname{sen} x$. **3079.** $y = e^{-x}(C_1\cos x + C_2\operatorname{sen} x)$, $z = \frac{1}{5}e^{-x})[(C_2 - 2C_1)\cos x - (C_1 + 2C_2)\operatorname{sen} x]$. **3080.** $y = (C_1 - C_2 - C_1x)e^{-2x}$, $z = (C_1x + C_2)e^{-2x}$.

3081. $x = C_1e^{t} + e^{-\frac{t}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + C_3\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$,

$$y = C_1e^{t} + e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{C_3\sqrt{3} - C_2}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{C_2\sqrt{3} + C_3}{2}\times\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t\right),$$

$$z = C_1e^{t} + e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{-C_3\sqrt{3} - C_2}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{C_2\sqrt{3} - C_3}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

3082. $x = C_1e^{-t} + C_2e^{2t}$, $y = C_3e^{-t} + C_2e^{2t}$, $z = -(C_1 + C_3)e^{-t} + C_2e^{2t}$.

3083. $y = C_1 + C_2e^{2x} - \frac{1}{4}(x^2 + X)$, $z = C_2e^{2x} - C_1 + \frac{1}{4}(x^2 - x - 1)$.

3084. $y = C_1 + C_2x + 2\operatorname{sen} x$, $z = -2C_1 - C_2(2x + 1) - 3\operatorname{sen} x - 2\cos x$.
3085. $y = (C_2 - 2C_1 - 2C_2x)e^{-x} - 6x + 14$, $z = (C_1 + C_2x)e^{-x} + 5x - 9$; $C_1 = 9$; $C_2 = 4$, $y = 14(1 - e^{-x}) - 2x(3 + 4e^{-x})$, $z = -9(1 - e^{-x}) + x(5 + 4e^{-x})$.
3086. $x = 10e^{2t} - 8e^{3t} - e^{t} + 6t - 1$; $y = -20e^{2t} + 8e^{3t} + 3e^{t} + 12t + 10$.

3087. $y = \frac{2C_1}{(C_2 - x)^2}$, $z = \frac{C_1}{C_2 - x}$. **3088*.** a) $\frac{(x^2 + y^2)y}{x^2} + C_1$, $\frac{z}{y} = C_2$; b) $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + C_1$, $\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = C_2$. **Indicação.** Integrando a equação homogênea $\frac{dx}{x - y} = \frac{dy}{x + y}$, achamos a primeira integral $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + C_1$. A seguir, utilizando as propriedades das proporções das derivadas, teremos $\frac{dz}{z} = \frac{x\,dx}{x(x - y)} = \frac{y\,dy}{y(x + y)} = \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2}$. Donde $\ln z^2 = \ln(x^2 + y^2) + \ln C_2^2$ e, portanto, $\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = C_2$; c) $x + y + z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 6$. **Indicação.** Utilizando as propriedades das proporções derivadas, teremos: $\frac{dx}{y - z} = \frac{dy}{z - x} = \frac{dz}{x - y} = \frac{dx + dy + dz}{0}$; donde $dx + dy + dz = 0$, e, portanto, $x + y + z = C_1$. Analogamente $\frac{x\,dx}{x(y - z)} = \frac{y\,dy}{y(z - x)} = \frac{z\,dz}{z(x - y)} = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{0}$; $x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$ e $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$. Isto é, as curvas integrais são as circunferências $x + y + z = C_1$, $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$. Das condições iniciais $x = 1$, $y = 1$, $z = -2$, teremos que $C_1 = 0$, $C_2 = 6$.

3089. $y = C_1 x^2 + \frac{C_2}{x} - \frac{x^2}{18}(3\ln^2 x - 2\ln x)$,

$$z = 1 - 2C_1 x + \frac{C_2}{x^2} + \frac{x}{9}(3\ln^2 x + \ln x - 1).$$

3090. $y = C_1 e^{x\sqrt{2}} + C_2 e^{-x\sqrt{2}} + C_3\cos x + C_4 \operatorname{sen} x + e^x - 2x$,

$$z = -C_1 e^{x\sqrt{2}} - C_2 e^{-x\sqrt{2}} - \frac{C_3}{4}\cos x - \frac{C_4}{4}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}e^x + x.$$

3091. $x = \frac{v_0 m\cos\alpha}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$, $y = \frac{m_2}{k}(kv_0\operatorname{sen}\alpha + mg)\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) - \frac{mgt}{k}$.

Solução. $m\frac{dv_x}{dt} = -kv_x$; $m\frac{dv_y}{dt} = -kv_y - mg$, quando as condições iniciais são $x_0 = y_0 = 0$, $v_{x_0} = v_0\cos\alpha$, $v_{y_0} = v_0\operatorname{sen}\alpha$ quando $t = 0$. Integrando, obtemos: $v_x = v_0\cos\alpha e^{-\frac{k}{m}t}$, $kv_y + mg = (kv_0\operatorname{sen}\alpha + mg)e^{-\frac{k}{m}t}$. **3092.** $x = \alpha\cos\frac{k}{\sqrt{m}}t$, $y = \frac{v_0\sqrt{m}}{k}\operatorname{sen}\frac{k}{\sqrt{m}}t$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2y^2}{mv_0^2} = 1$. **Indicação.** As equações diferenciais do movimento são: $m\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x$; $m\frac{d^2y}{dt^2} = -k^2y$. **3093.** $y = -2 - 2x - x^2$.

3094. $y = \left(y_0 + \frac{1}{4}\right)e^{2(x-1)} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$. **3095.** $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \frac{9}{32}x^4 + \frac{21}{320}x^5 + \ldots$ **3096.** $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{7\cdot 9}x^7 + \frac{2}{7\cdot 11\cdot 27}x^{11} - \ldots$

3097. $y = x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{3\cdot 4} + \ldots$; a série é convergente quando $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

3098. $y = x - \frac{x^2}{(1!)^2 \cdot 2} + \frac{x^3}{(2!)^2 \cdot 3} - \frac{x^4}{(3!)^2 \cdot 4} + \dots$; a série converge quando $-\infty < x < +\infty$. **Indicação.** Emprega-se o método dos coeficientes indeterminados. **3099.** $y = 1 - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1 \cdot 4}{6!} x^6 - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{9!} x^9 + \dots$; a série é convergente quando $-\infty < x < +\infty$. **3100.** $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$. **Indicação.** Emprega-se o método dos coeficientes indeterminados. **3101.** $y = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$; a série é convergente quando $|x| < +\infty$. **Indicação.** Emprega-se o método dos coeficientes indeterminados. **3102.** $x = a\left(1 - \frac{1}{2!} t^2 + \frac{2}{4!} t^4 - \frac{9}{6!} t^6 + \frac{55}{8!} t^8 - \dots\right)$.
3103. $u = A \cos \frac{a\pi t}{l} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}$. **Indicação.** Usar as condições: $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$, $u(x, 0) = A \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0$. **3104.** $u = \frac{2l}{\pi^2 a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi a t}{l} \times$ $\times \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi x}{l}$. **Indicação.** Usar as condições: $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$, $u(x, 0) = 0$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 1$. **3105.** $u \frac{8h}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi a t}{l} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}$. **Indicação.** Usar as condições:

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} \frac{2hx}{l} & \text{para } 0 < x \leqslant \frac{l}{2}. \\ 2h\left(1 - \frac{x}{l}\right) & \text{para } \frac{l}{2} < x < l. \end{cases}$$

3106. $u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{(2n+1) a\pi t}{2l} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$, onde os coeficientes $A_n =$ $= \frac{2}{l} \int_0^l \frac{x}{l} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx = \frac{8(-1)^n}{(2n+1)^2 \pi^2}$. **Indicação.** Usar as condições:

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0, \quad u(x, 0) = \frac{x}{l}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

3107. $u = \frac{400}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} (1 - \cos n\pi) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{100} \cdot e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2 t}{100^2}}$. **Indicação.** Usar as condições: $u(0, t) = 0$, $u(100, t) = 0$, $u(x, 0) = 0{,}01x(100 - x)$.

Capítulo X

3108. a) $\leqslant 1''$; $\leqslant 0{,}0023\%$; b) $\leqslant 1$ mm; $\leqslant 0{,}26\%$; c) $\leqslant 1$ g; $\leqslant 0{,}0016\%$. **3109.** a) $\leqslant 0{,}05$; $\leqslant 0{,}021\%$; b) $\leqslant 0{,}0005$; $\leqslant 1{,}45\%$; c) $\leqslant 0{,}005$; $\leqslant 0{,}16\%$. **3110.** a) 2 cifras; $48 \cdot 10^3$ ou $49 \cdot 10^3$, já que o número está compreendido entre 47 877 e 48 845; b) 2 cifras; 15; c) 1 cifra; $6 \cdot 10^2$. Praticamente, o resultado deve ser escrito na forma $(5{,}9 \pm 0{,}1) \cdot 10^2$. **3111.** a) 29,5; b) $1{,}6 \cdot 10^2$; c) 43,2. **3112.** a) 84,2; b) 18,5 ou 18, $47 \pm 0{,}01$; c) o resultado da substração não tem cifras exatas, já que a diferença é igual a um centésimo e o valor possível do erro absoluto é também un centésimo. **3113*.** $1{,}8 \pm 0{,}3$ cm². **Indicação.** Utilizar a fórmula do acréscimo da área do quadrado.

3114. a) $30,0 \pm 0,2$; b) $43,7 \pm 0,1$; c) $0,3 \pm 0,1$. **3115.** $19,9 \pm 0,1$ m². **3116.** a) $1,1295 \pm 0,0002$; b) $0,120 \pm 0,006$; c) o quociente pode oscilar entre 48 e 62. Portanto, na anotação do quociente não se pode considerar exata nenhuma cifra decimal. **3117.** 0,480. A última cifra pode oscilar em uma unidade. **3118.** a) 0,1729; b) $277 \cdot 10^3$; c) 2. **3119.** $(2,05 \pm 0,01) \cdot 10^3$ cm². **3120.** a) 1,648; b) $4,025 \pm 0,001$; c) $9,006 \pm 0,003$. **3121.** $4,01 \cdot 10^3$ cm². O erro absoluto é 6,5 cm². O erro relativo 0,16%. **3122.** O cateto é igual a $13,8 \pm 0,2$ cm; $\operatorname{sen} \alpha = 0,44 \pm 0,01$; $\alpha = 26°15' \pm 35'$. **3123.** $2,7 \pm 0,1$. **3124.** 0,27 ampère. **3125.** O comprimento do pêndulo deve ser medido com precisão de até 0,3 cm; os números π e q devem ser tomados com três cifras (segundo o princípio das influências iguais). **3126.** Os raios e a geratriz devem ser medidos com um erro relativo de 1/300. O número π deve ser tomado com três cifras (segundo o princípio das influências iguais). **3127.** A grandeza l deve ser medida com precisão de 0,2% e s com precisão de 0,7% (segundo o princípio das influências iguais).

3128.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
1	3	7	−2	−6	14	−23
2	10	5	−8	8	−9	
3	15	−3	0	−1		
4	12	−3	−1			
5	9	−4				
6	5					

3129.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1	−4	−12	32	48
3	−16	20	80	48
5	4	100	128	48
7	104	228	176	
9	332	404		
11	736			

3130.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	0	−4	−42	−24	24
1	−4	−46	−66	0	24
2	−50	−112	−66	24	24
3	−162	−178	−42	48	24
4	−340	−220	6	72	24
5	−560	−214	78	96	24
6	−774	−136	174	120	24
7	−910	38	294	144	
8	−872	332	438		
9	−540	770			
10	230				

Indicação. Calcular os primeiros cinco valores de y e, uma vez obtido $\Delta^4 y_0 = 24$, repitir este número 24 por toda a coluna das quatro diferenças. A seguir, preencher o restante da tabela mediante operações de soma (avançando da direita para a esquerda). **3131.** a) 0,211; 0,389; 0,490; 0,660; b) 0,229; 0,399; 0,491; 0,664. **3132.** 0,1822; 0,1993; 0,2165; 0,2334; 0,2503. **3133.** $1 + x + x^2 + x^3$. **3134.** $y = \frac{1}{96}x^4 - \frac{11}{48}x^3 + \frac{65}{24}x^2 - \frac{85}{12}x + 8$; $y \approx 22$ quando $x = 5{,}5$; $y = 20$ quando $x \approx 5{,}2$. **Indicação.** Ao calcular x para $y = 20$ fazer $y_0 = 11$. **3135.** O polinômio de interpolação é $y = x^2 - 10x + 1$; $y = 1$ quando $x = 0$. **3136.** 158 kgf (aproximadamente). **3137.** a) $y(0{,}5) = -1$, $y(2) = 11$; b) $y(0{,}5) = -\frac{15}{16}$, $y(2) = -3$. **3138.** $-1{,}325$. **3139.** 1,01. **3140.** $-1{,}86$; $-0{,}25$; 2,11. **3141.** 2,09. **3142.** 2,45; 0,019. **3143.** 0,31; 4. **3144.** 2,506. **3145.** 0,02. **3146.** 0,24. **3147.** 1,27. **3148.** $-1{,}88$; 0,35; 1,53. **3149.** 1,84. **3150.** 1,31; $-0{,}67$. **3151.** 7,13. **3152.** 0,165. **3153.** $\pm 1{,}73$ e 0. **3154.** 1,72. **3155.** 1,38. **3156.** $x = 0{,}83$; $y = 0{,}56$; $x = -0{,}83$; $y = -0{,}56$. **3157.** $x = 1{,}67$; $y = 1{,}22$. **3158.** 4,493. **3159.** $\pm 1{,}1997$. **3160.** Pela fórmula dos trapézios; 11, 625; pela fórmula de Simpson: 11,417. **3161.** $-0{,}995$; -1; 0,005; 0,5%; $\Delta = 0{,}005$. **3162.** 0,3068; $\Delta = 1{,}3 \cdot 10^{-5}$. **3163.** 0,69. **3164.** 0,79. **3165.** 0,84. **3166.** 0,28. **3167.** 0,10. **3168.** 1,61. **3169.** 1,85. **3170.** 0,09. **3171.** 0,67. **3172.** 0,75. **3173.** 0,79. **3174.** 4,93. **3175.** 1,29. **Indicação.** Utilizar as equações paramétricas da elipse $x = \cos t$, $y = 0{,}6222 \operatorname{sen} t$ e transformar a fórmula do comprimento do arco na forma $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t} \cdot dt$, onde ε é a excentricidade da elipse. **3176.** $y_1(x) = \frac{x^3}{3}$, $y_2(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}$, $y_3(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2\,079} + \frac{x^{15}}{59\,535}$. **3177.** $y_1(x) = \frac{x^2}{2} - x + 1$, $y_2(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} - x + 1$, $y_3(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} - x + 1$; $z_1(x) = 3x - 2$, $z_2(x) = \frac{x^3}{6} - 2x^2 + 3x - 2$, $z_3(x) = \frac{7x^3}{6} - 2x^2 + 3x - 2$. **3178.** $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x - \frac{x^3}{6}$, $y_3(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$. **3179.** $y(1) = 3{,}36$. **3180.** $y(2) = 0{,}80$. **3181.** $y(1) = 3{,}72$; $z(1) = 2{,}72$. **3182.** $y = 1{,}80$. **3183.** 3,15. **3184.** 0,14. **3185.** $y(0{,}5) = 3{,}15$; $z(0{,}5) = -3{,}15$. **3186.** $y(0{,}5) = 0{,}55$; $z(0{,}5) = -0{,}18$. **3187.** 1,16. **3188.** 0,87. **3189.** $x(\pi = 3{,}58$; $x'(\pi) = 0{,}79$. **3190.** $429 + 1739 \cos x - 1037 \operatorname{sen} x - 6321 \cos 2x + 1263 \operatorname{sen} 2x - 1242 \cos 3x - 33 \operatorname{sen} 3x$. **3191.** $6{,}49 - 1{,}96 \cos x + 2{,}14 \operatorname{sen} x - 1{,}68 \cos 2x + 0{,}53 \operatorname{sen} 2x - 1{,}13 \cos 3x + 0{,}04 \operatorname{sen} 3x$. **3192.** $0{,}960 + 0{,}851 \cos x + 0{,}915 \operatorname{sen} x + 0{,}542 \cos 2x + 0{,}620 \operatorname{sen} 2x + 0{,}271 \cos 3x + 0{,}100 \operatorname{sen} 3x$. **3193.** a) $0{,}608 \operatorname{sen} x + 0{,}076 \operatorname{sen} 2x + 0{,}022 \operatorname{sen} 3x$; b) $0{,}338 + 0{,}414 \cos x + 0{,}111 \cos 2x + 0{,}056 \cos 3x$.

APÊNDICES

I. Alfabeto grego

Αα	alfa	Ηη	eta	Νν	ni	Ττ	tau
Ββ	beta	Θθ	teta	Ξξ	csi	Υυ	ípsilon
Γγ	gama	Ιι	iota	Οο	ômicron	Φφ	fi
Δδ	delta	Κκ	capa	Ππ	pi	Χχ	qui
Εε	epsílon	Λλ	lambda	Ρρ	ro	Ψψ	psi
Ζζ	zeta	Μμ	mi	Σσ	sigma	Ωω	ômega

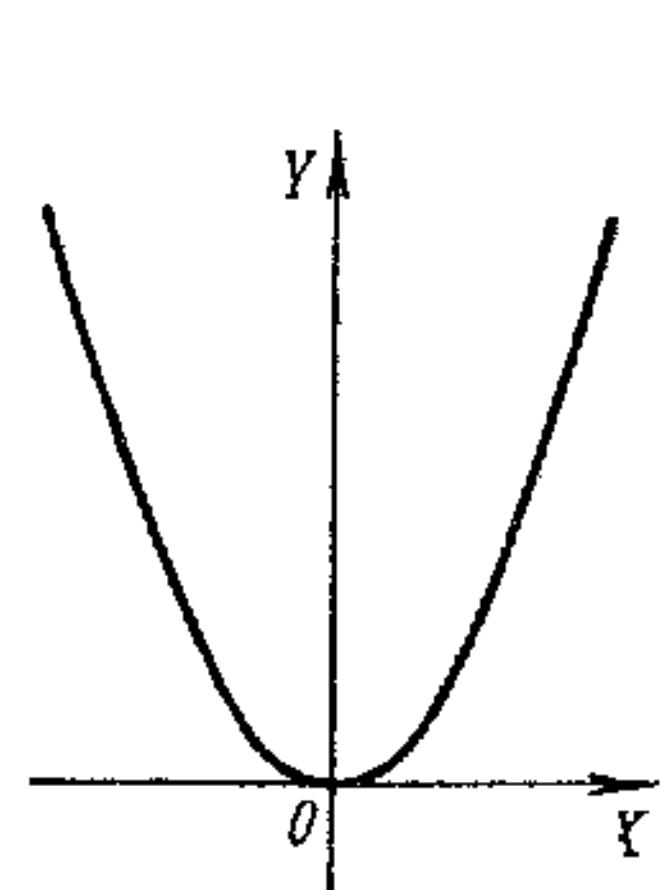
II. Algumas constantes

Grandeza	x	lg x	Grandeza	x	lg x
π	3,14159	0,49715	$\frac{1}{e}$	0,36788	$\bar{1}$,56571
2π	6,28318	0,79818	e^2	7,38906	0,86859
$\frac{\pi}{2}$	1,57080	0,19612	$\sqrt{e}$	1,64872	0,21715
$\frac{\pi}{4}$	0,78540	$\bar{1}$,89509	$\sqrt[3]{e}$	1,39561	0,14476
$\frac{1}{\pi}$	0,31831	$\bar{1}$,50285	$M = \lg e$	0,43429	$\bar{1}$,63778
π^2	9,86960	0,99430	$\frac{1}{M} = \ln 10$	2,30258	0,36222
$\sqrt{\pi}$	1,77245	0,24857	1 rad.	57°17′45″	
$\sqrt[3]{\pi}$	1,46459	0,16572	arc 1°	0,01745	$\bar{2}$,24188
e	2,71828	0,43429	g	9,81	0,99167

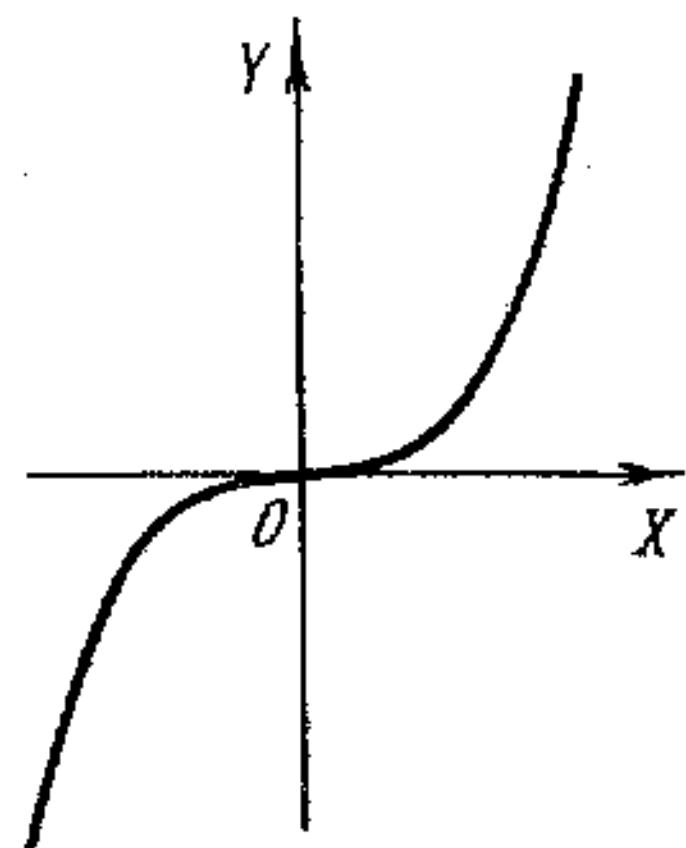
III. Valores inversos, potências, raizes e logaritmos

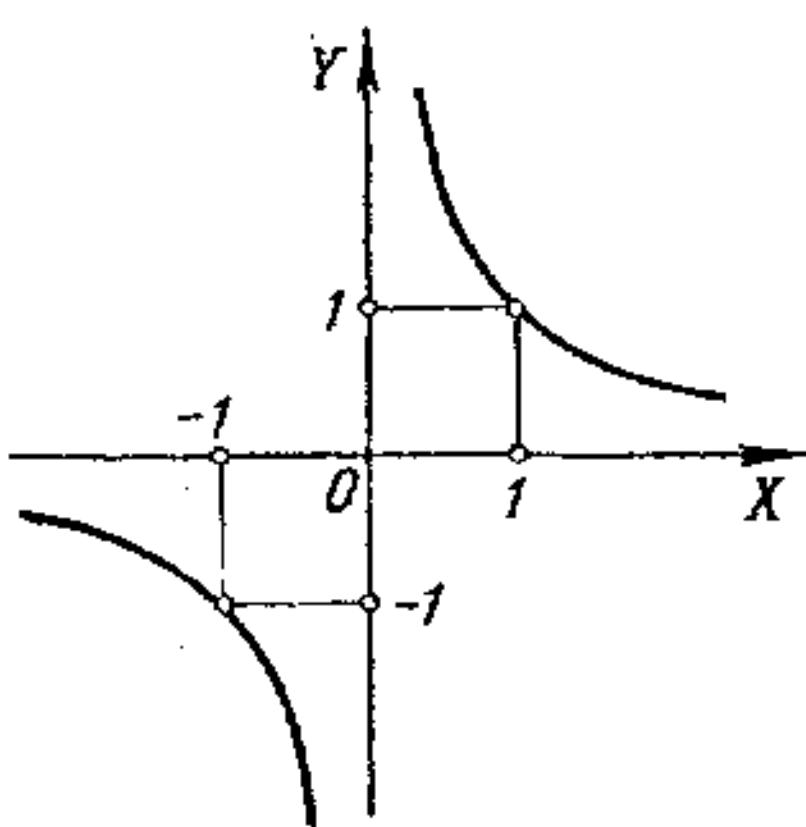
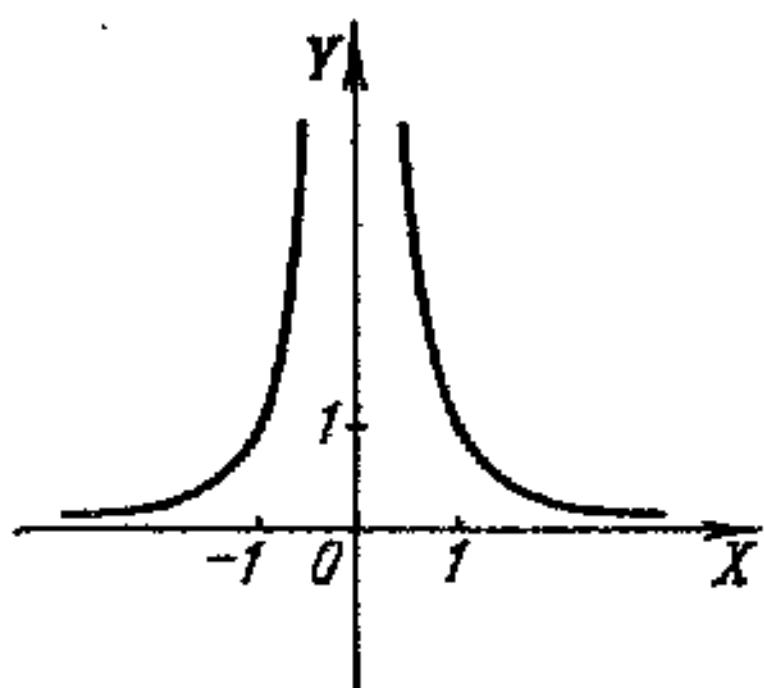
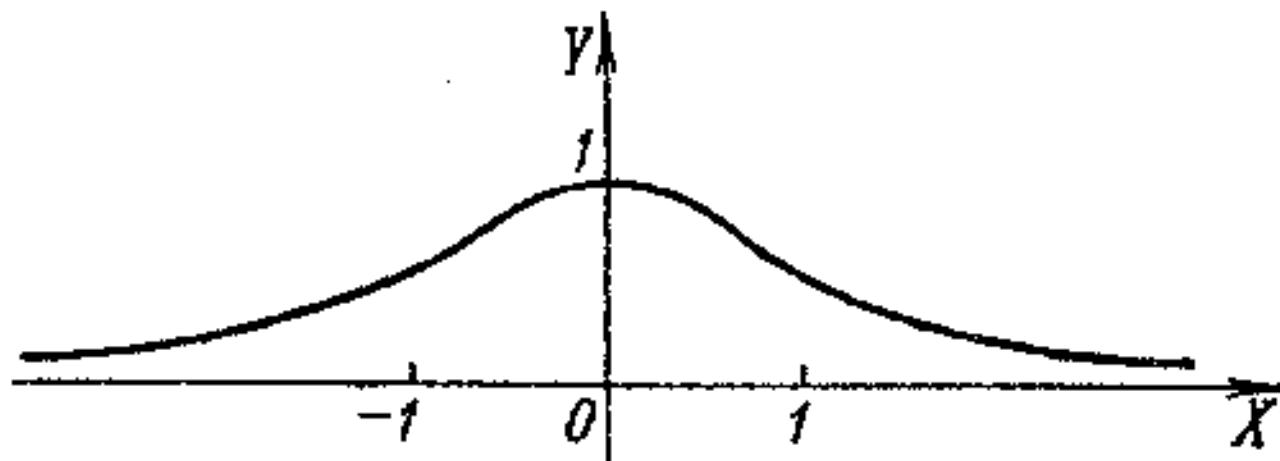
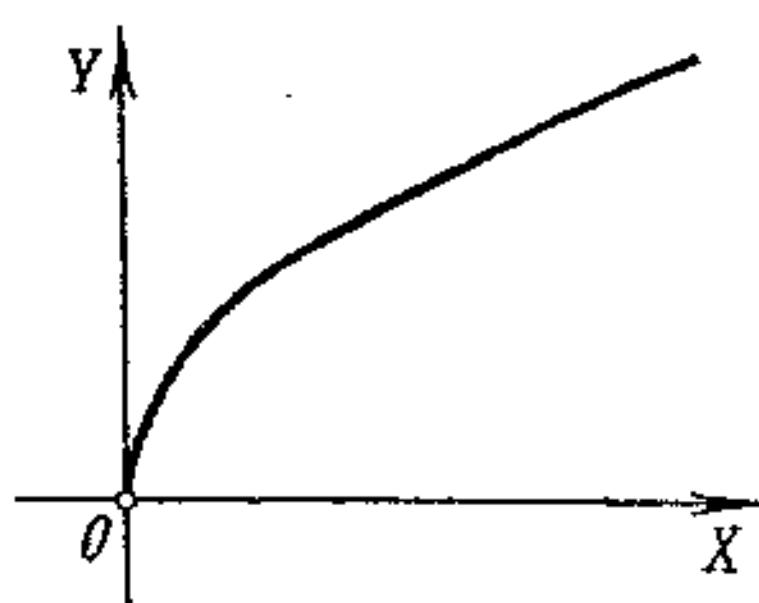
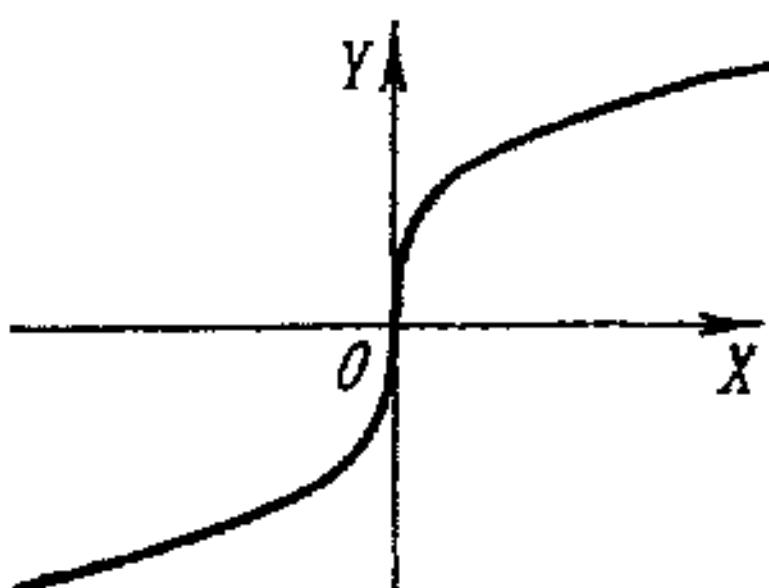
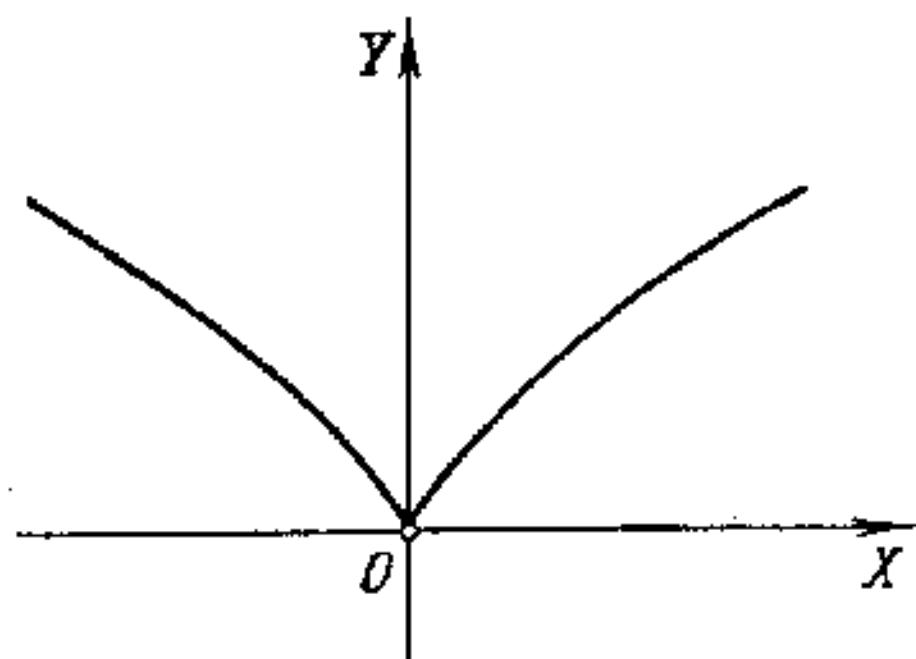
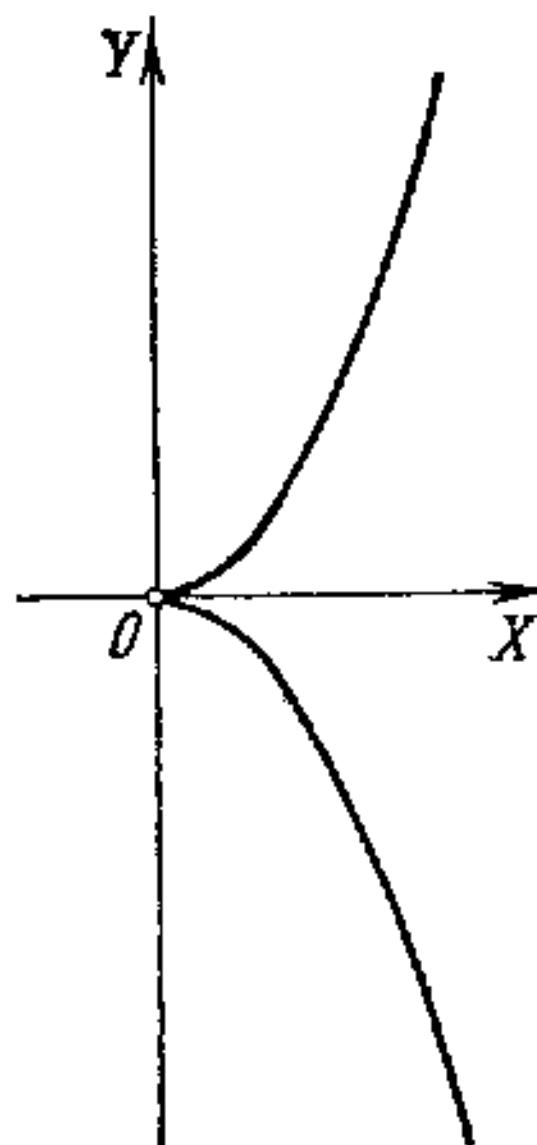
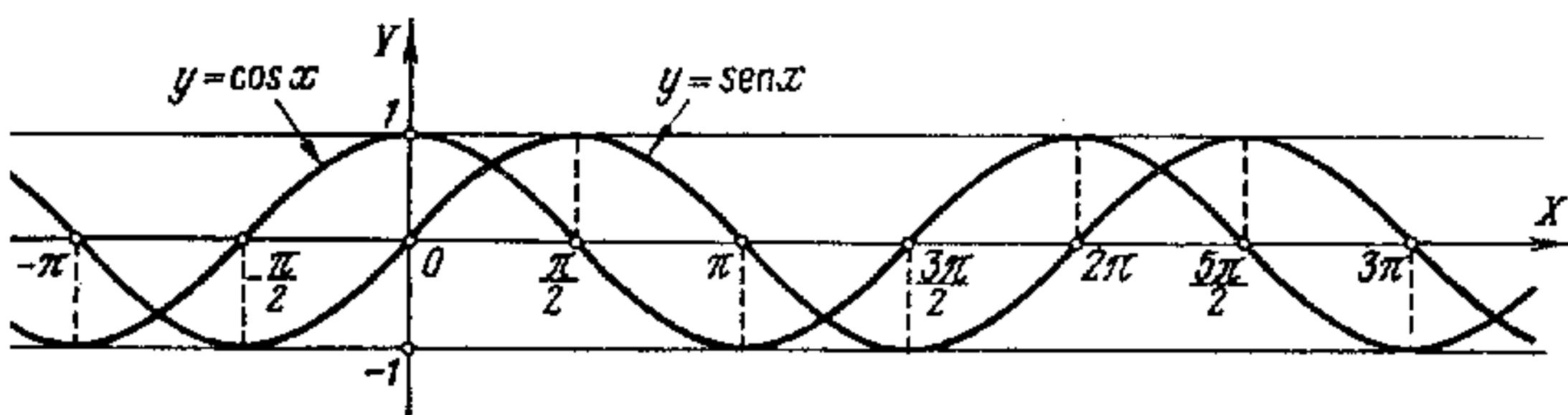
x	$\frac{1}{x}$	x^2	x^3	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{10x}$	$\sqrt[3]{100x}$	lg x (mantissas)	ln x
1,0	1,000	1,000	1,000	1,000	3,162	1,000	2,154	4,642	0000	0,0000
1,1	0,909	1,210	1,331	1,049	3,317	1,032	2,224	4,791	0414	0,0953
1,2	0,833	1,440	1,728	1,095	3,464	1,063	2,289	4,932	0792	0,1823
1,3	0,769	1,690	2,197	1,140	3,606	1,091	2,351	5,066	1139	0,2624
1,4	0,714	1,960	2,744	1,183	3,742	1,119	2,410	5,192	1461	0,3365
1,5	0,667	2,250	3,375	1,225	3,873	1,145	2,466	5,313	1761	0,4055
1,6	0,625	2,560	4,096	1,265	4,000	1,170	2,520	5,429	2041	0,4700
1,7	0,588	2,890	4,913	1,304	4,123	1,193	2,571	5,540	2304	0,5306
1,8	0,556	3,240	5,832	1,342	4,243	1,216	2,621	5,646	2553	0,5878
1,9	0,526	3,610	6,859	1,378	4,359	1,239	2,668	5,749	2788	0,6419
2,0	0,500	4,000	8,000	1,414	4,472	1,260	2,714	5,848	3010	0,6931
2,1	0,476	4,410	9,261	1,449	4,583	1,281	2,759	5,944	3222	0,7419
2,2	0,454	4,840	10,65	1,483	4,690	1,301	2,802	6,037	3424	0,7885
2,3	0,435	5,290	12,17	1,517	4,796	1,320	2,844	6,127	3617	0,8329
2,4	0,417	5,760	13,82	1,549	4,899	1,339	2,884	6,214	3802	0,8755
2,5	0,400	6,250	15,62	1,581	5,000	1,357	2,924	6,300	3979	0,9163
2,6	0,385	6,760	17,58	1,612	5,099	1,375	2,962	6,383	4150	0,9555
2,7	0,370	7,290	19,68	1,643	5,196	1,392	3,000	6,463	4314	0,9933
2,8	0,357	7,840	21,95	1,673	5,292	1,409	3,037	6,542	4472	1,0296
2,9	0,345	8,410	24,39	1,703	5,385	1,426	3,072	6,619	4624	1,0647
3,0	0,333	9,000	27,00	1,732	5,477	1,442	3,107	6,694	4771	1,0986
3,1	0,323	9,610	29,79	1,761	5,568	1,458	3,141	6,768	4914	1,1314
3,2	0,312	10,24	32,77	1,789	5,657	1,474	3,175	6,840	5051	1,1632
3,3	0,303	10,89	35,94	1,817	5,745	1,489	3,208	6,910	5185	1,1939
3,4	0,294	11,56	39,30	1,844	5,831	1,504	3,240	6,980	5315	1,2238
3,5	0,286	12,25	42,88	1,871	5,916	1,518	3,271	7,047	5441	1,2528
3,6	0,278	12,96	46,66	1,897	6,000	1,533	3,302	7,114	5563	1,2809
3,7	0,270	13,69	50,65	1,924	6,083	1,547	3,332	7,179	5682	1,3083
3,8	0,263	14,44	54,87	1,949	6,164	1,560	3,362	7,243	5798	1,3350
3,9	0,256	15,21	59,32	1,975	6,245	1,574	3,391	7,306	5911	1,3610
4,0	0,250	16,00	64,00	2,000	6,325	1,587	3,420	7,368	6021	1,3863
4,1	0,244	16,81	68,92	2,025	6,403	1,601	3,448	7,429	6128	1,4110
4,2	0,238	17,64	74,09	2,049	6,481	1,613	3,476	7,489	6232	1,4351
4,3	0,233	18,49	79,51	2,074	6,557	1,626	3,503	7,548	6335	1,4586
4,4	0,227	19,36	85,18	2,098	6,633	1,639	3,530	7,606	6435	1,4816
4,5	0,222	20,25	91,12	2,121	6,708	1,651	3,557	7,663	6532	1,5041
4,6	0,217	21,16	97,34	2,145	6,782	1,663	3,583	7,719	6628	1,5261
4,7	0,213	22,09	103,8	2,168	6,856	1,675	3,609	7,775	6721	1,5476
4,8	0,208	23,04	110,6	2,191	6,928	1,687	3,634	7,830	6812	1,5686
4,9	0,204	24,01	117,6	2,214	7,000	1,698	3,659	7,884	6902	1,5892
5,0	0,200	25,00	125,0	2,236	7,071	1,710	3,684	7,937	6990	1,6094
5,1	0,196	26,01	132,7	2,258	7,141	1,721	3,708	7,990	7076	1,6292
5,2	0,192	27,04	140,6	2,280	7,211	1,732	3,733	8,041	7160	1,6487
5,3	0.189	28,09	148,9	2,302	7,280	1,744	3,756	8,093	7243	1,6677
5,4	0,185	29,16	157,5	2,324	7,348	1,754	3,780	8,143	7324	1,6864

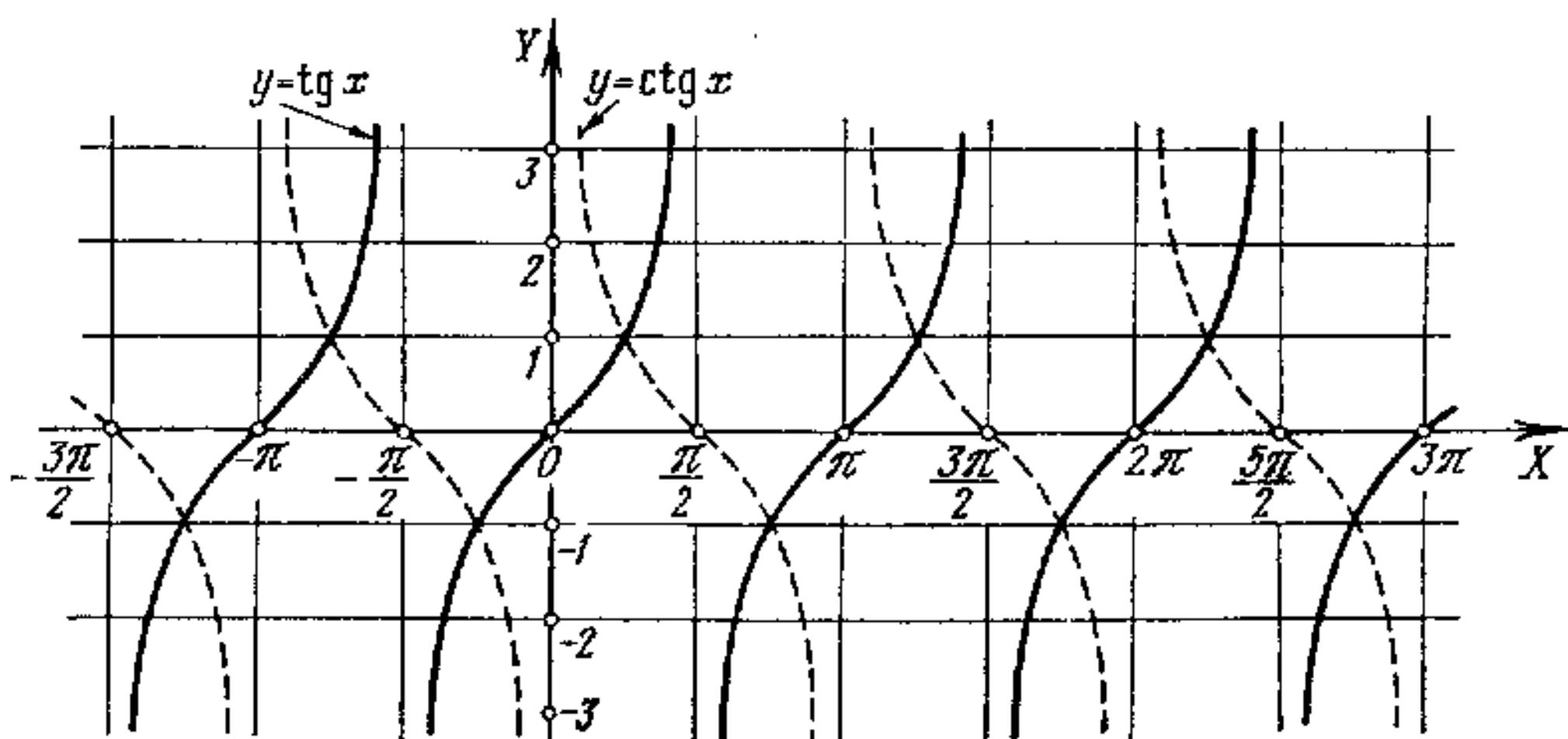
Continuação

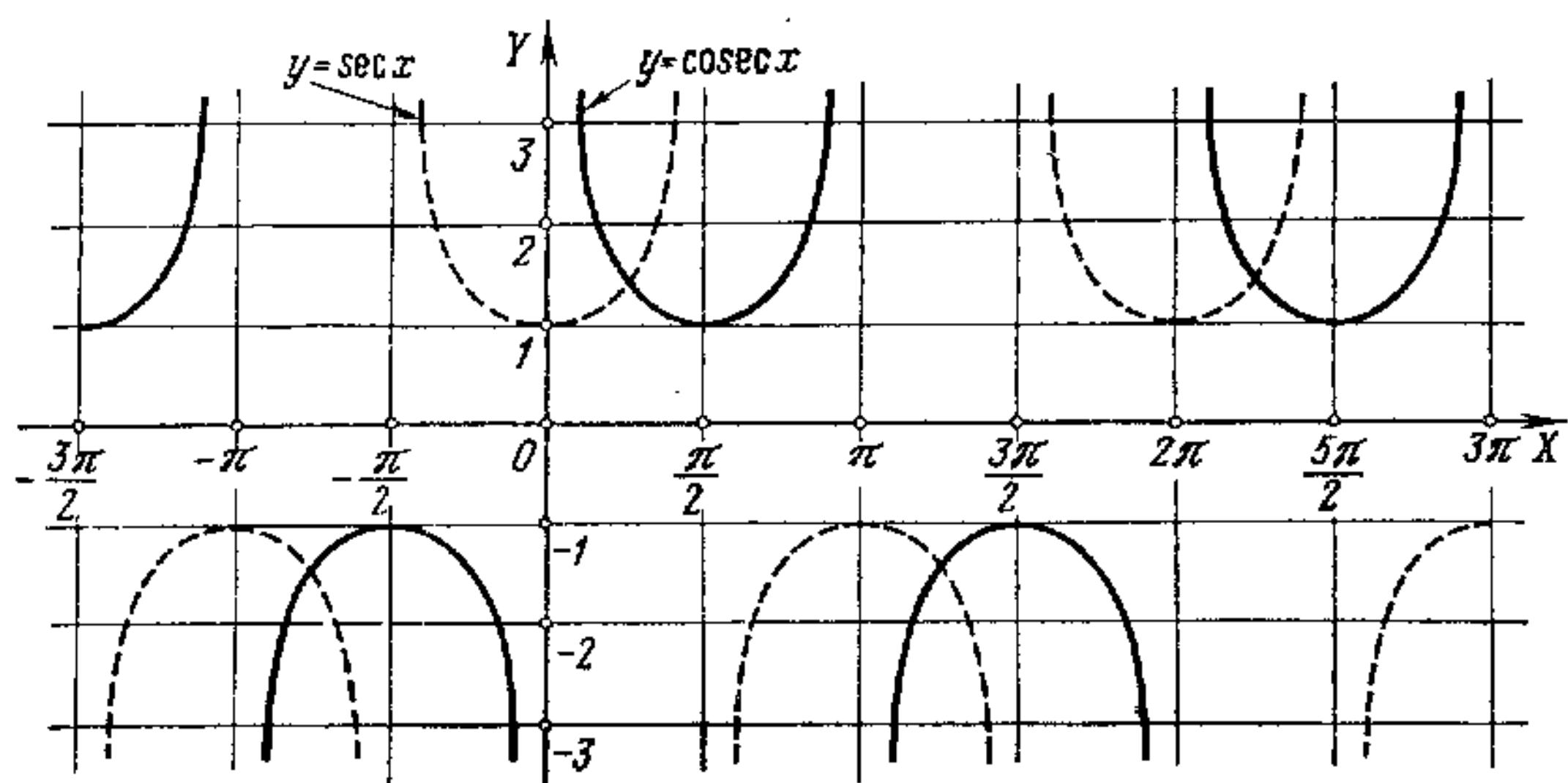
x	$\frac{1}{x}$	x^2	x^3	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{10x}$	$\sqrt[3]{100x}$	lg x (mantissas)	ln x
5,5	0,182	30,25	166,4	2,345	7,416	1,765	3,803	8,193	7404	1,7047
5,6	0,179	31,36	175,6	2,366	7,483	1,776	3,826	8,243	7482	1,7228
5,7	0,175	32,49	185,2	2,387	7,550	1,786	3,849	8,291	7559	1,7405
5,8	0,172	33,64	195,1	2,408	7,616	1,797	3,871	8,340	7634	1,7579
5,9	0,169	34,81	205,4	2,429	7,681	1,807	3,893	8,387	7709	1,7750
6,0	0,167	36,00	216,0	2,449	7,746	1,817	3,915	8,434	7782	1,7918
6,1	0,164	37,21	227,0	2,470	7,810	1,827	3,936	8,481	7853	1,8083
6,2	0,161	38,44	238,3	2,490	7,874	1,837	3,958	8,527	7924	1,8245
6,3	0,159	39,69	250,0	2,510	7,937	1,847	3,979	8,573	7993	1,8405
6,4	0,156	40,96	262,1	2,530	8,000	1,857	4,000	8,618	8062	1,8563
6,5	0,154	42,25	274,6	2,550	8,062	1,866	4,021	8,662	8129	1,8718
6,6	0,151	43,56	287,5	2,569	8,124	1,876	4,041	8,707	8195	1,8871
6,7	0,149	44,89	300,8	2,588	8,185	1,885	4,062	8,750	8261	1,9021
6,8	0,147	46,24	314,4	2,608	8,246	1,895	4,082	8,794	8325	1,9169
6,9	0,145	47,61	328,5	2,627	8,307	1,904	4,102	8,837	8388	1,9315
7,0	0,143	49,00	343,0	2,646	8,367	1,913	4,121	8,879	8451	1,9459
7,1	0,141	50,41	357,9	2,665	8,426	1,922	4,141	8,921	8513	1,9601
7,2	0,139	51,84	373,2	2,683	8,485	1,931	4,160	8,963	8573	1,9741
7,3	0,137	53,29	389,0	2,702	8,544	1,940	4,179	9,004	8633	1,9879
7,4	0,135	54,76	405,2	2,720	8,602	1,949	4,198	9,045	8692	2,0015
7,5	0,133	56,25	421,9	2,739	8,660	1,957	4,217	9,086	8751	2,0149
7,6	0,132	57,76	439,0	2,757	8,718	1,966	4,236	9,126	8808	2,0281
7,7	0,130	59,29	456,5	2,775	8,775	1,975	4,254	9,166	8865	2,0412
7,8	0,128	60,84	474,6	2,793	8,832	1,983	4,273	9,205	8921	2,0541
7,9	0,127	62,41	493,0	2,811	8,888	1,992	4,291	9,244	8976	2,0669
8,0	0,125	64,00	512,0	2,828	8,944	2,000	4,309	9,283	9031	2,0794
8,1	0,123	65,61	531,4	2,846	9,000	2,008	4,327	9,322	9085	2,0919
8,2	0,122	67,24	551,4	2,864	9,055	2,017	4,344	9,360	9138	2,1041
8,3	0,120	68,89	571,8	2,881	9,110	2,025	4,362	9,398	9191	2,1163
8,4	0,119	70,56	592,7	2,898	9,165	2,033	4,380	9,435	9243	2,1282
8,5	0,118	72,25	614,1	2,915	9,220	2,041	4,397	9,473	9294	2,1401
8,6	0,116	73,96	636,1	2,933	9,274	2,049	4,414	9,510	9345	2,1518
8,7	0,115	75,69	658,5	2,950	9,327	2,057	4,431	9,546	9395	2,1633
8,8	0,114	77,44	681,5	2,966	9,381	2,065	4,448	9,583	9445	2,1748
8,9	0,112	79,21	705,0	2,983	9,434	2,072	4,465	9,619	9494	2,1861
9,0	0,111	81,00	729,0	3,000	9,487	2,080	4,481	9,655	9542	2,1972
9,1	0,110	82,81	753,6	3,017	9,539	2,088	4,498	9,691	9590	2,2083
9,2	0,109	84,64	778,7	3,033	9,592	2,095	4,514	9,726	9638	2,2192
9,3	0,108	86,49	804,4	3,050	9,644	2,103	4,531	9,761	9685	2,2300
9,4	0,106	88,36	830,6	3,066	9,695	2,110	4,547	9,796	9731	2,2407
9,5	0,105	90,25	857,4	3,082	9,747	2,118	4,563	9,830	9777	2,2513
9,6	0,104	92,16	884,7	3,098	9,798	2,125	4,579	9,865	9823	2,2618
9,7	0,103	94,09	912,7	3,114	9,849	2,133	4,595	9,899	9868	2,2721
9,8	0,102	96,04	941,2	3,130	9,899	2,140	4,610	9,933	9912	2,2824
9,9	0,101	98,01	970,3	3,146	9,950	2,147	4,626	9,967	9956	2,2925
10,0	0,100	100,00	1000,0	3,162	10,000	2,154	4,642	10,000	0000	2,3026

IV. Funções trigonométricas

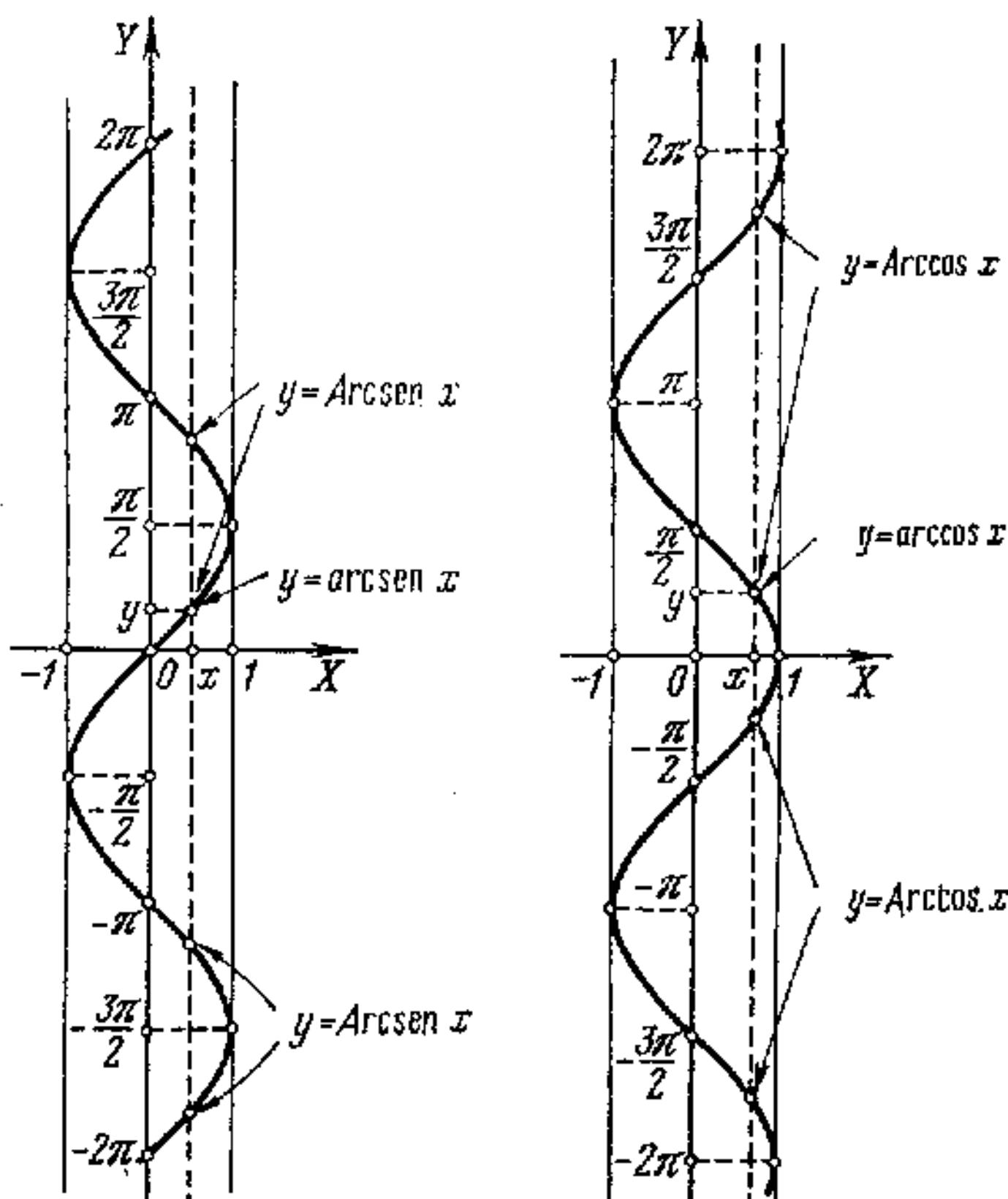
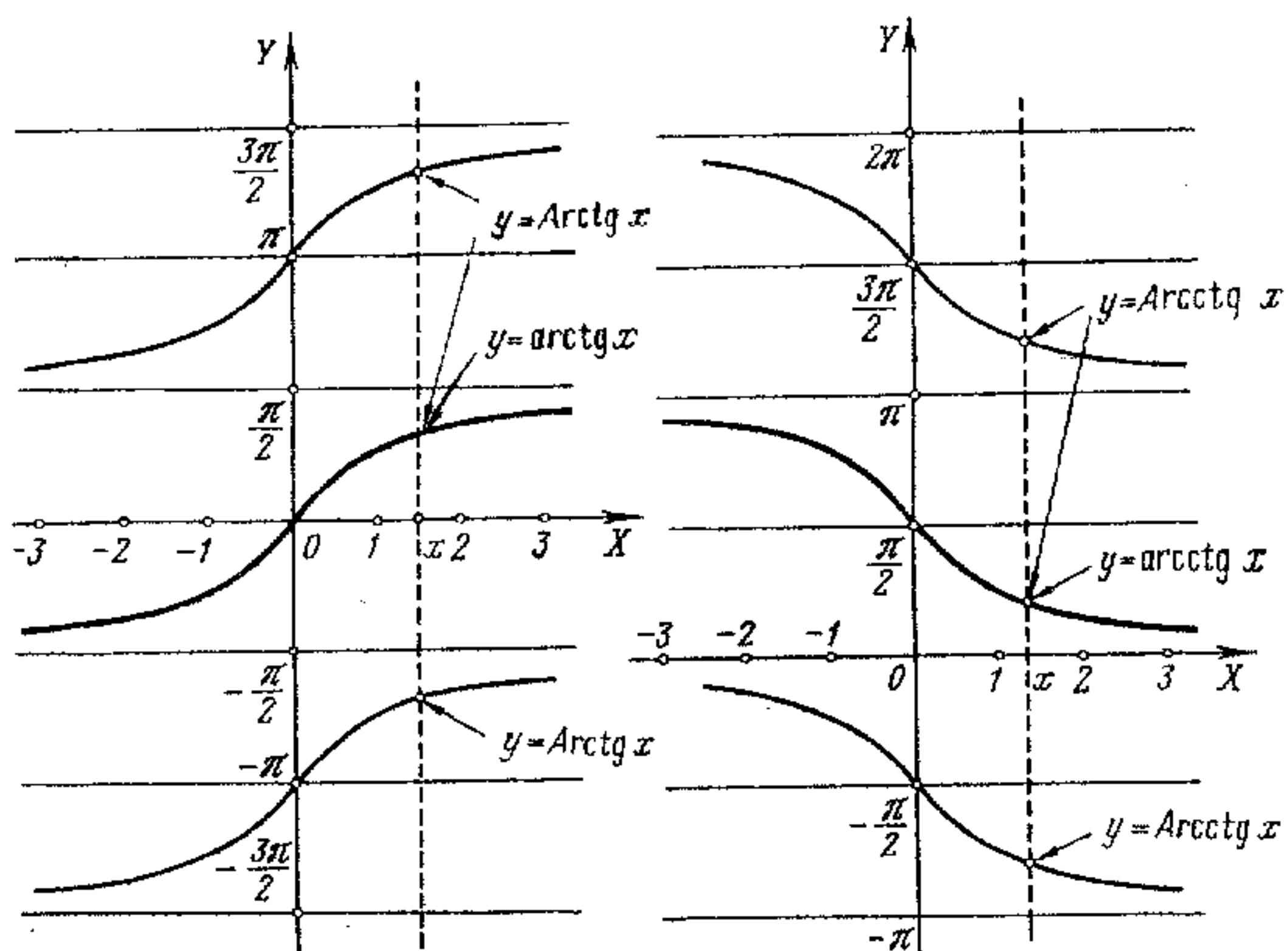
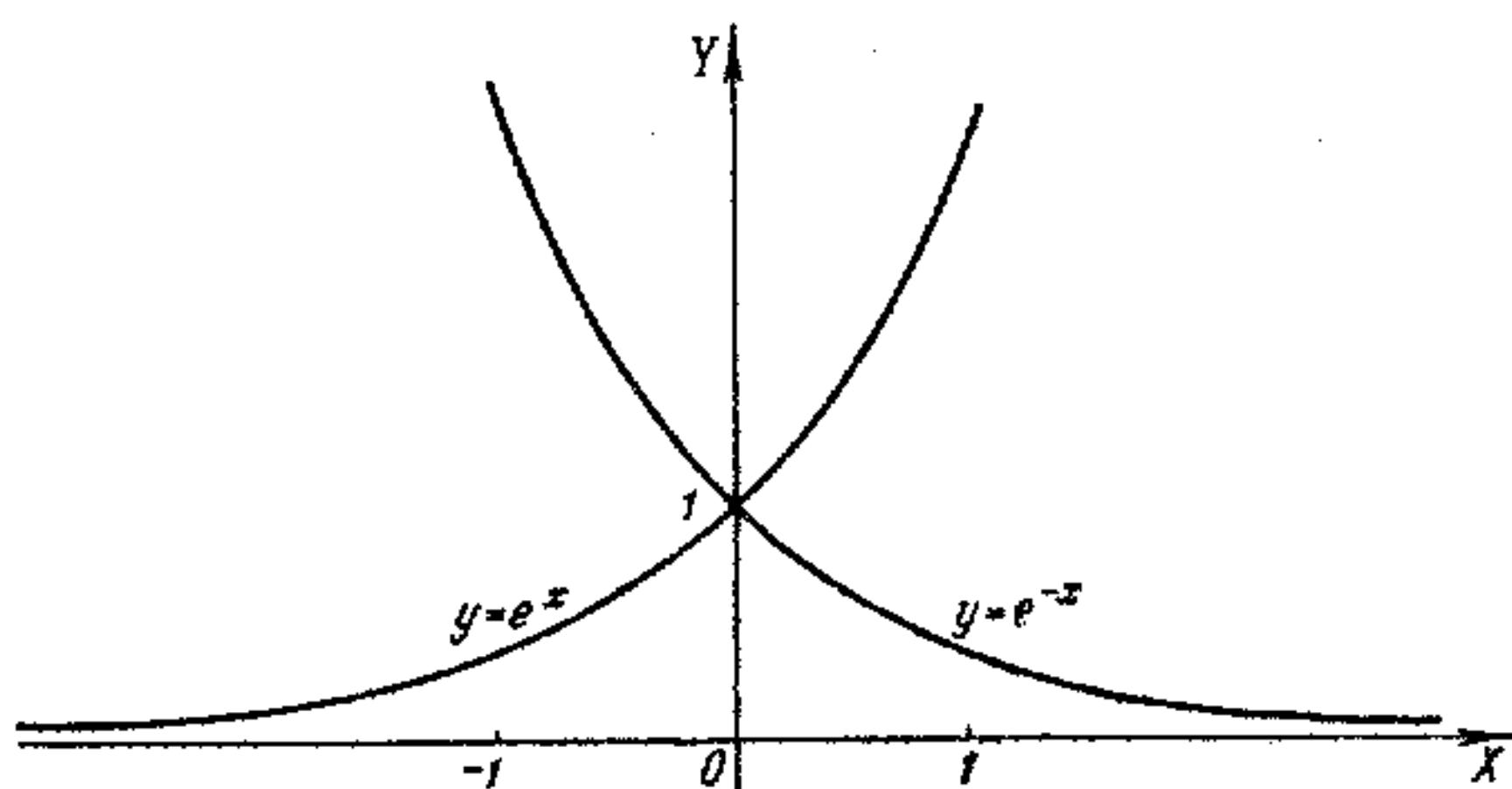
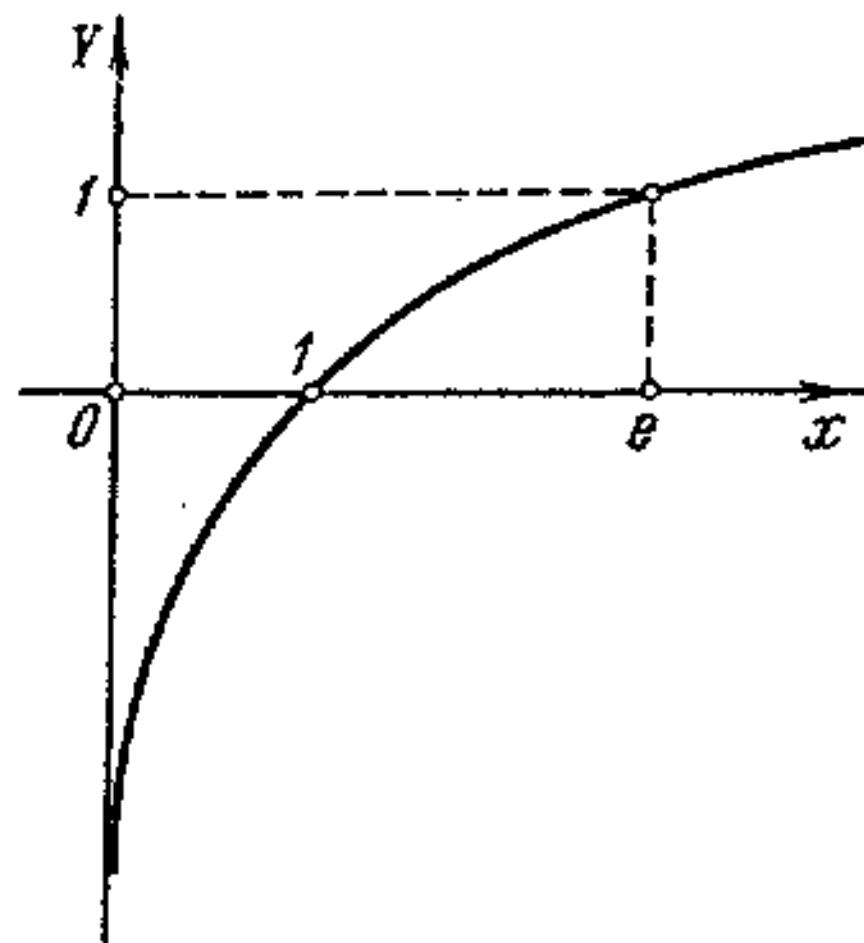
x^0	x = arc x^0 (radianos)	sen x	tg x	ctg x	cos x		
0	0,0000	0,0000	0,0000	∞	1,0000	1,5708	90
1	0,0175	0,0175	0,0175	57,29	0,9998	1,5533	89
2	0,0349	0,0349	0,0349	28,64	0,9994	1,5359	88
3	0,0524	0,0523	0,0524	19,08	0,9986	1,5184	87
4	0,0698	0,0698	0,0699	14,30	0,9976	1,5010	86
5	0,0873	0,0872	0,0875	11,43	0,9962	1,4835	85
6	0,1047	0,1045	0,1051	9,514	0,9945	1,4661	84
7	0,1222	0,1219	0,1228	8,144	0,9925	1,4486	83
8	0,1396	0,1392	0,1405	7,115	0,9903	1,4312	82
9	0,1571	0,1564	0,1584	6,314	0,9877	1,4137	81
10	0,1745	0,1736	0,1763	5,671	0,9848	1,3963	80
11	0,1920	0,1908	0,1944	5,145	0,9816	1,3788	79
12	0,2094	0,2079	0,2126	4,705	0,9781	1,3614	78
13	0,2269	0,2250	0,2309	4,331	0,9744	1,3439	77
14	0,2443	0,2419	0,2493	4,011	0,9703	1,3265	76
15	0,2618	0,2588	0,2679	3,732	0,9659	1,3090	75
16	0,2793	0,2756	0,2867	3,487	0,9613	1,2915	74
17	0,2967	0,2924	0,3057	3,271	0,9563	1,2741	73
18	0,3142	0,3090	0,3249	3,078	0,9511	1,2566	72
19	0,3316	0,3256	0,3443	2,904	0,9455	1,2392	71
20	0,3491	0,3420	0,3640	2,747	0,9397	1,2217	70
21	0,3665	0,3584	0,3839	2,605	0,9336	1,2043	69
22	0,3840	0,3746	0,4040	2,475	0,9272	1,1868	68
23	0,4041	0,3907	0,4245	2,356	0,9205	1,1694	67
24	0,4189	0,4067	0,4452	2,246	0,9135	1,1519	66
25	0,4363	0,4226	0,4663	2,145	0,9063	1,1345	65
26	0,4538	0,4384	0,4877	2,050	0,8988	1,1170	64
27	0,4712	0,4540	0,5095	1,963	0,8910	1,0996	63
28	0,4887	0,4695	0,5317	1,881	0,8829	1,0821	62
29	0,5061	0,4848	0,5543	1,804	0,8746	1,0647	61
30	0,5236	0,5000	0,5774	1,732	0,8660	1,0472	60
31	0,5411	0,5150	0,6009	1,6643	0,8572	1,0297	59
32	0,5585	0,5299	0,6249	1,6003	0,8480	1,0123	58
33	0,5760	0,5446	0,6494	1,5399	0,8387	0,9948	57
34	0,5934	0,5592	0,6745	1,4826	0,8290	0,9774	56
35	0,6109	0,5736	0,7002	1,4281	0,8192	0,9599	55
36	0,6283	0,5878	0,7265	1,3764	0,8090	0,9425	54
37	0,6458	0,6018	0,7536	1,3270	0,7986	0,9250	53
38	0,6632	0,6157	0,7813	1,2799	0,7880	0,9076	52
39	0,6807	0,6293	0,8098	1,2349	0,7771	0,8901	51
40	0,6981	0,6428	0,8391	1,1918	0,7660	0,8727	50
41	0,7156	0,6561	0,8693	1,1504	0,7547	0,8552	49
42	0,7330	0,6691	0,9004	1,1106	0,7431	0,8378	48
43	0,7505	0,6820	0,9325	1,0724	0,7314	0,8203	47
44	0,7679	0,6947	0,9657	1,0355	0,7193	0,8029	46
45	0,7854	0,7071	1,0000	1,0000	0,7071	0,7854	45
		cos x	ctg x	tg x	sen x	x = arc x^0 (radianos)	x^0

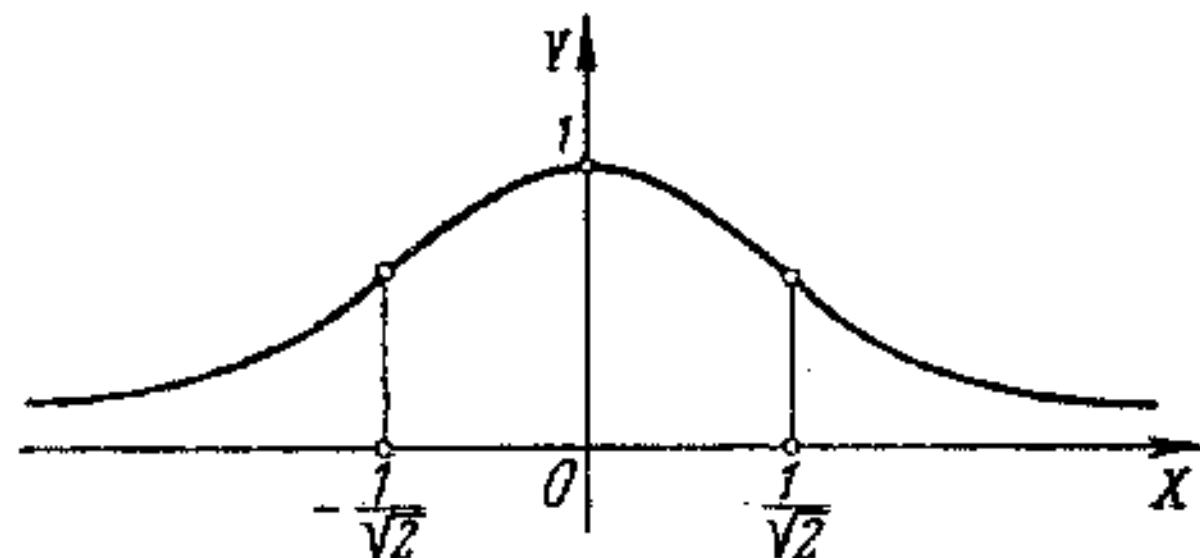
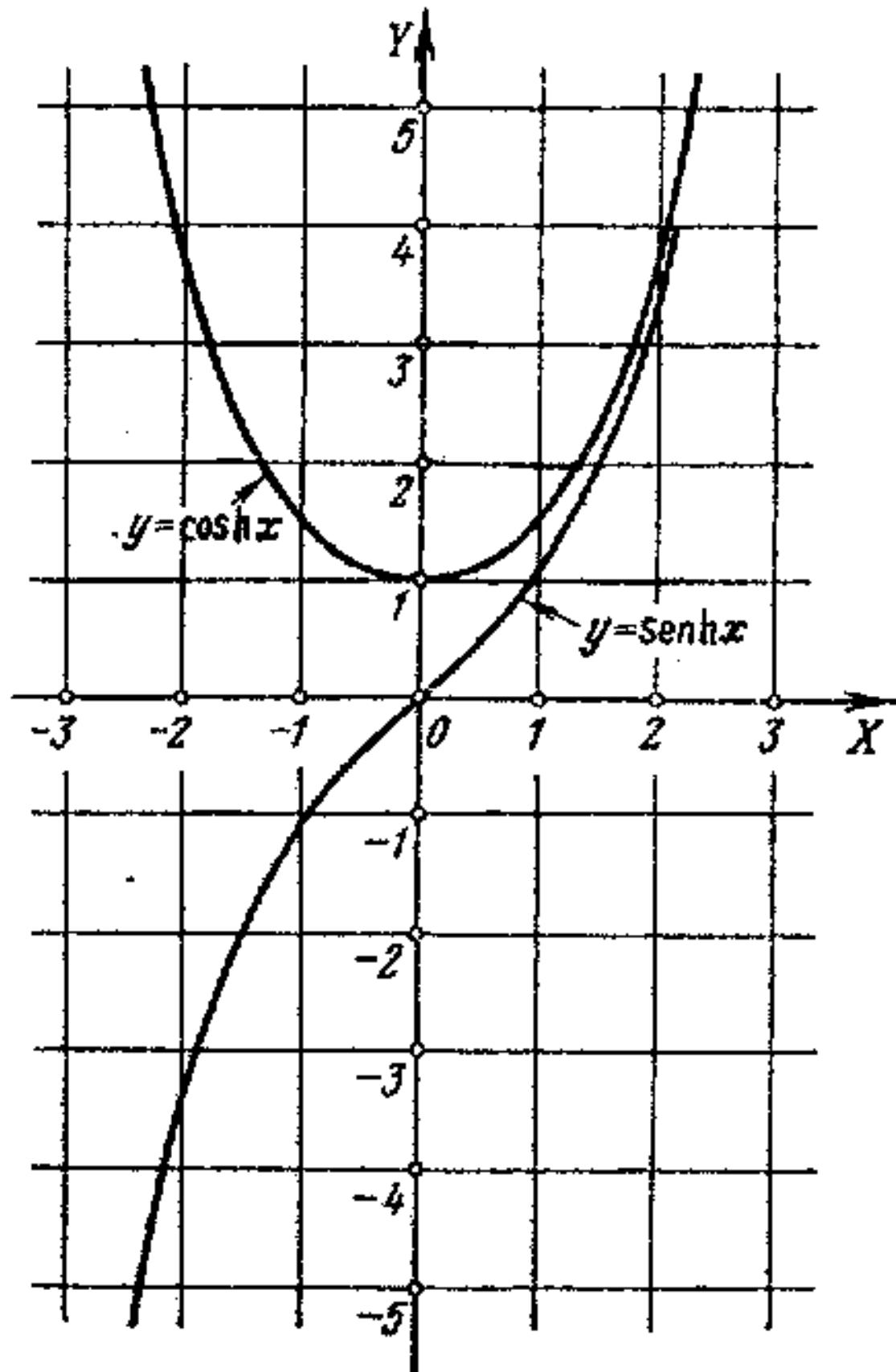
V. Funções exponenciais, hiperbólicas e trigonométricas

x	e^x	e^{-x}	sen h x	cos h x	tg h x	sen x	cos x
0,0	1,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000
0,1	1,1052	0,9048	0,1002	1,0050	0,0997	0,0998	0,9950
0,2	1,2214	0,8187	0,2013	1,0201	0,1974	0,1987	0,9801
0,3	1,3499	0,7408	0,3045	1,0453	0,2913	0,2955	0,9553
0,4	1,4918	0,6703	0,4108	1,0811	0,3799	0,3894	0,9211
0,5	1,6487	0,6065	0,5211	1,1276	0,4621	0,4794	0,8776
0,6	1,8221	0,5488	0,6367	1,1855	0,5370	0,5646	0,8253
0,7	2,0138	0,4966	0,7586	1,2552	0,6044	0,6442	0,7648
0,8	2,2255	0,4493	0,8881	1,3374	0,6640	0,7174	0,6967
0,9	2,4596	0,4066	1,0265	1,4331	0,7163	0,7833	0,6216
1,0	2,7183	0,3679	1,1752	1,5431	0,7616	0,8415	0,5403
1,1	3,0042	0,3329	1,3356	1,6685	0,8005	0,8912	0,4536
1,2	3,3201	0,3012	1,5095	1,8107	0,8337	0,9320	0,3624
1,3	3,6693	0,2725	1,6984	1,9709	0,8617	0,9636	0,2675
1,4	4,0552	0,2466	1,9043	2,1509	0,8854	0,9854	0,1700
1,5	4,4817	0,2231	2,1293	2,3524	0,9051	0,9975	0,0707
1,6	4,9530	0,2019	2,3756	2,5775	0,9217	0,9996	−0,0292
1,7	5,4739	0,1827	2,6456	2,8283	0,9354	0,9917	−0,1288
1,8	6,0496	0,1653	2,9422	3,1075	0,9468	0,9738	−0,2272
1,9	6,6859	0,1496	3,2682	3,4177	0,9562	0,9463	−0,3233
2,0	7,3891	0,1353	3,6269	3,7622	0,9640	0,9093	−0,4161
2,1	8,1662	0,1225	4,0219	4,1443	0,9704	0,8632	−0,5048
2,2	9,0250	0,1108	4,4571	4,5679	0,9757	0,8085	−0,5885
2,3	9,9742	0,1003	4,9370	5,0372	0,9801	0,7457	−0,6663
2,4	11,0232	0,0907	5,4662	5,5569	0,9837	0,6755	−0,7374
2,5	12,1825	0,0821	6,0502	6,1312	0,9866	0,5985	−0,8011
2,6	13,4637	0,0743	6,6947	6,7690	0,9890	0,5155	−0,8569
2,7	14,8797	0,0672	7,4063	7,4735	0,9910	0,4274	−0,9041
2,8	16,4446	0,0608	8,1919	8,2527	0,9926	0,3350	−0,9422
2,9	18,1741	0,0550	9,0596	9,1146	0,9940	0,2392	−0,9710
3,0	20,0855	0,0498	10,0179	10,0677	0,9950	0,1411	−0,9900
3,1	22,1979	0,0450	11,0764	11,1215	0,9959	0,0416	−0,9991
3,2	24,5325	0,0408	12,2459	12,2366	0,9967	−0,0584	−0,9983
3,3	27,1126	0,0369	13,5379	13,5748	0,9973	−0,1577	−0,9875
3,4	29,9641	0,0334	14,9654	14,9987	0,9978	−0,2555	−0,9668
3,5	33,1154	0,0302	16,5426	16,5728	0,9982	−0,3508	−0,9365

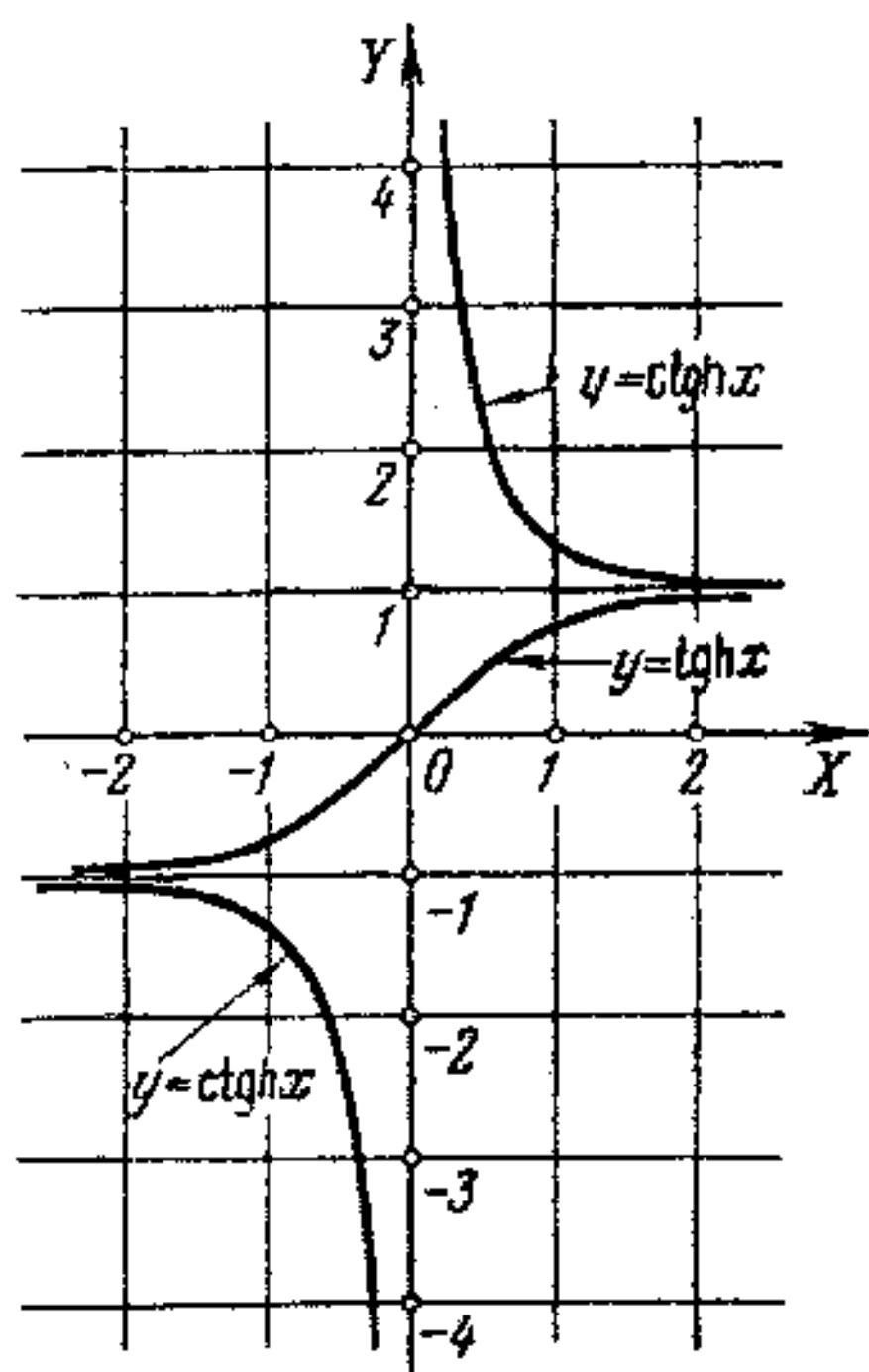
VI. Algumas curvas (para consulta)

1. Parábola
$y = x^2$.

2. Parábola cúbica
$y = x^3$

3. Hipérbole equiaxial
$y = \frac{1}{x}$.

4. Gráfico da função fracionária $y = \frac{1}{x^2}$.

5. Curva de Agnesi
$y = \frac{1}{1 + x^2}$.

6. Parábola (ramo superior)
$y = \sqrt{x}$.

7. Parábola cúbica
$y = \sqrt[3]{x}$.

8a. Parábola de Neile

$y = x^{\frac{2}{3}}$ ou $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2. \end{cases}$

8b. Parábola semicúbica

$y^2 = x^3$ ou $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3. \end{cases}$

9. Sinusóide e co-sinusóide

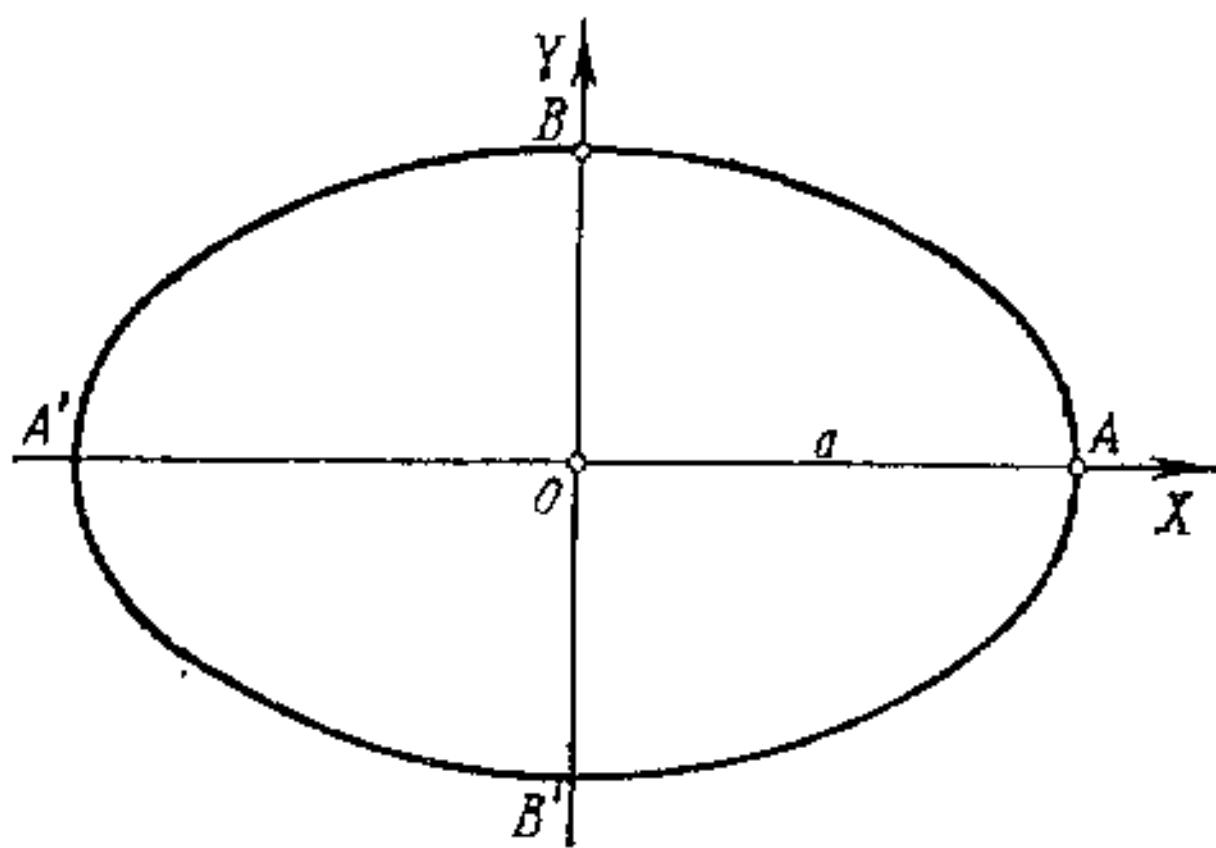
$y = \text{sen } x$ e $y = \cos x$.

10. Tangentóide e co-tangentóide

$y = \text{tg } x$ e $y = \text{ctg } x$.

11. Gráficos das funções $y = \sec x$ e $y = \operatorname{cosec} x$.

12. Gráficos das funções trigonométricas inversas
$y = \operatorname{Arcsen} x$ e $y = \operatorname{Arccos} x$.

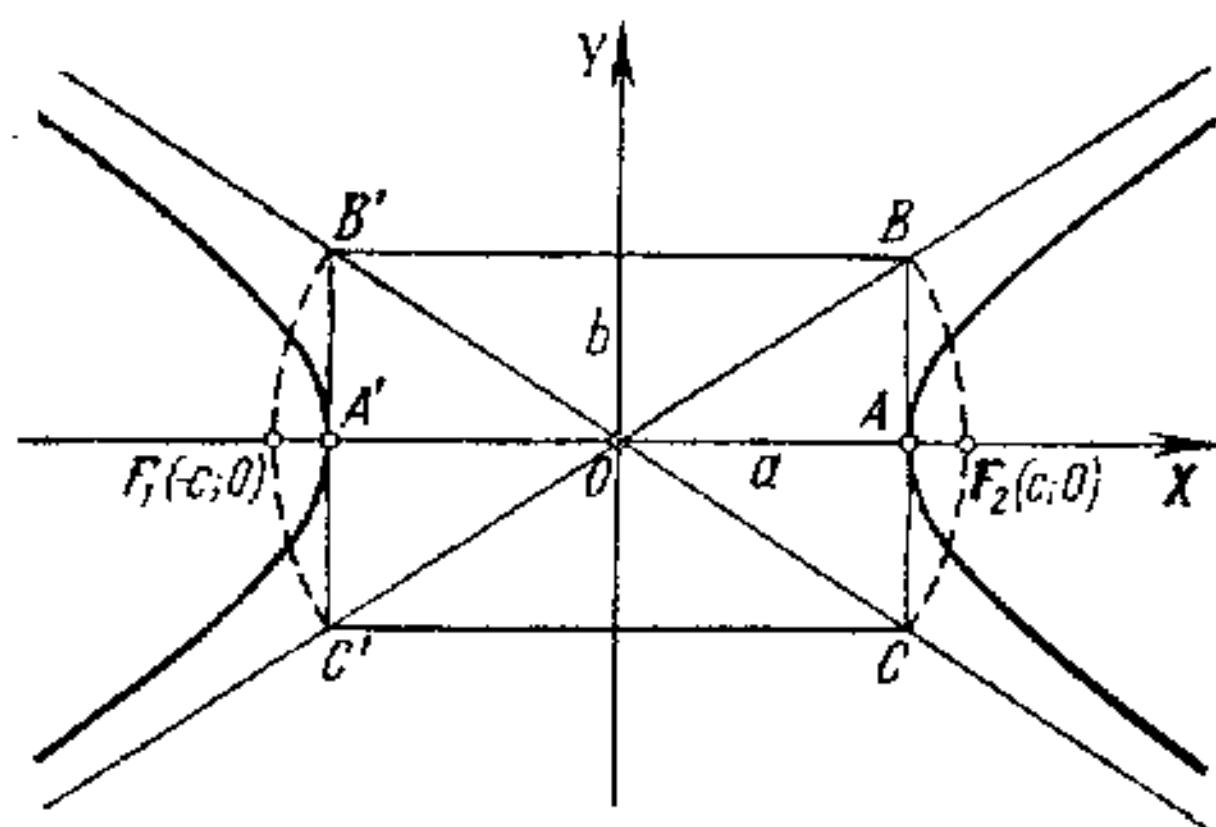
13. Gráficos das funções trigonométricas inversas
$y = \text{Arctg}\, x$ e $y = \text{Arcctg}\, x$.

14. Gráficos das funções exponenciais
$y = e^x$ e $y = e^{-x}$.

15. Curva logarítmica
$y = \ln x.$

16. Curva de Gauss
$y = e^{-x^2}$

17. Gráficos das funções hiperbólicas

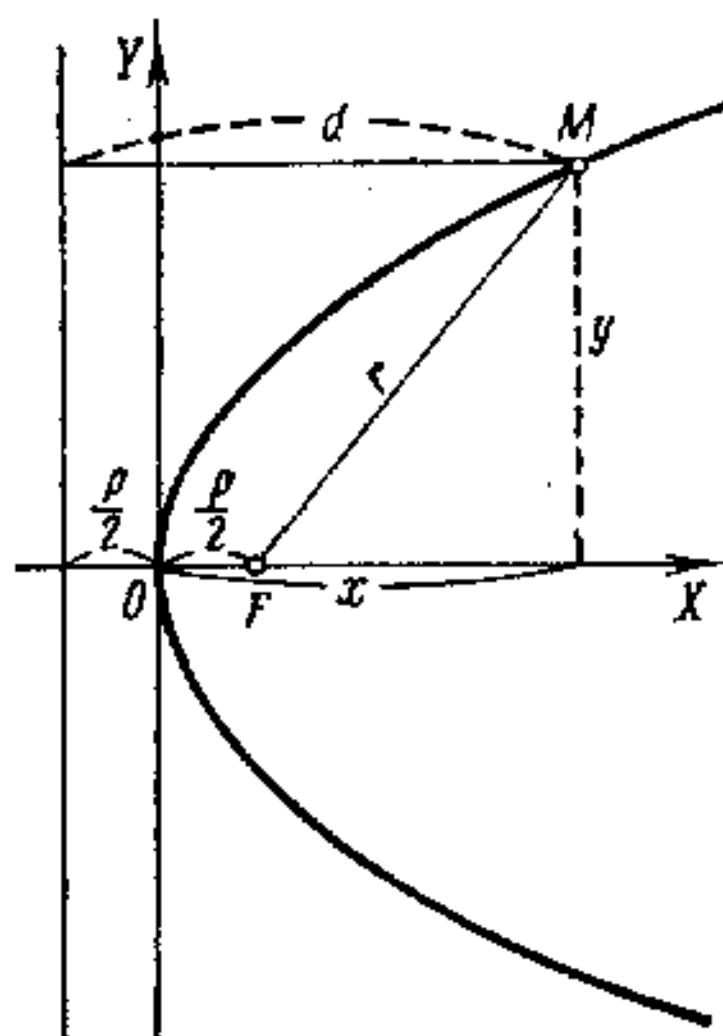
$$y = \text{sen h } x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

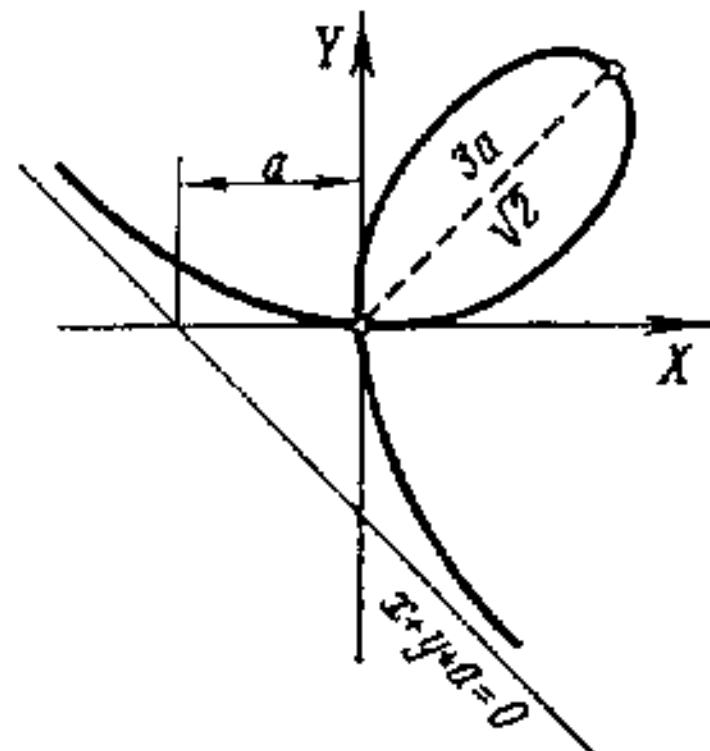
e

$$y = \cos \text{h } x \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(catenária)

18. Gráfico das funções hiperbólicas

$$y = \text{tg h } x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

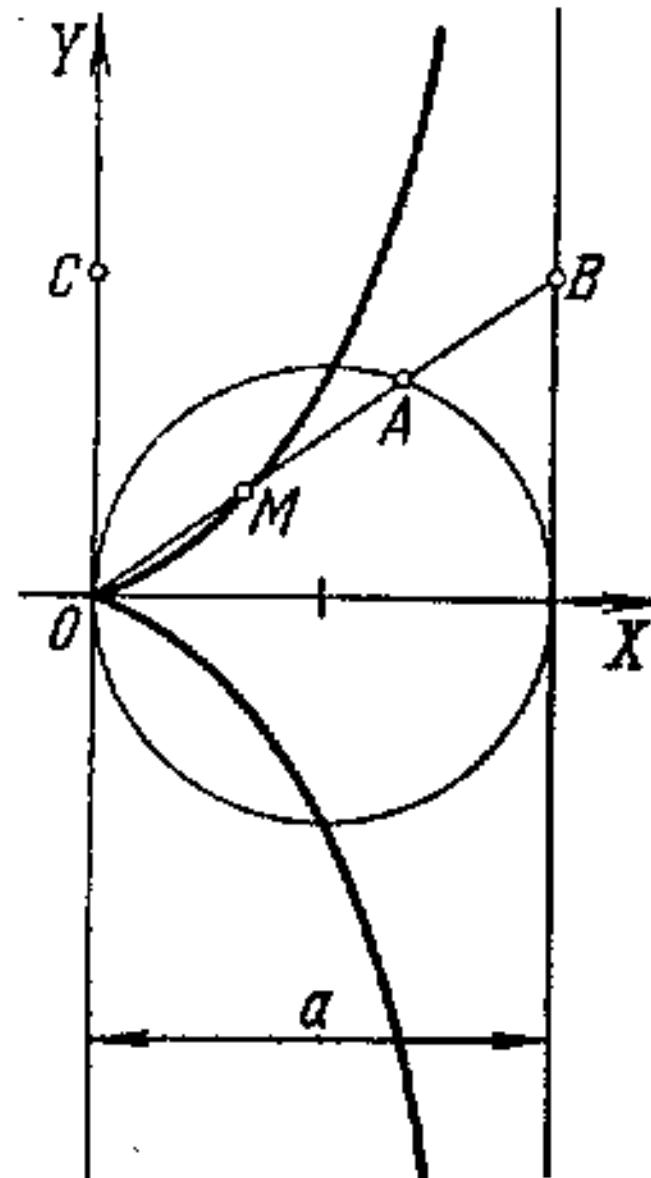
e

$$y = \text{ctg h } x \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

19. Elipse

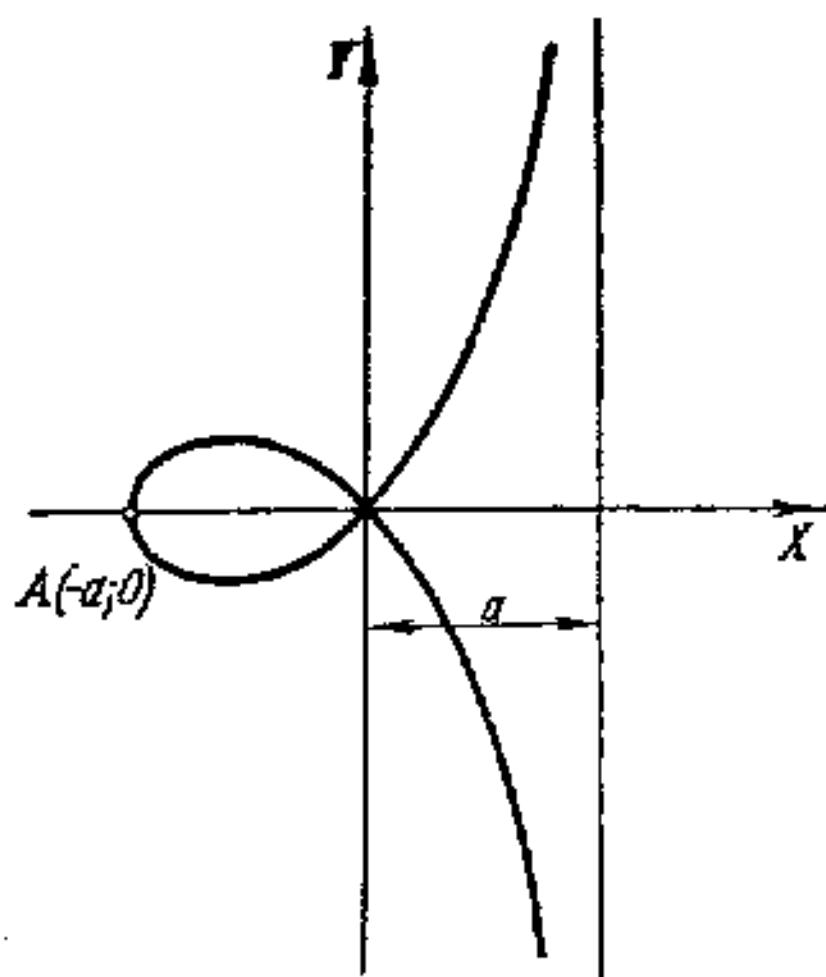
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b \operatorname{sen} t. \end{cases}$$

20. Hipérbole

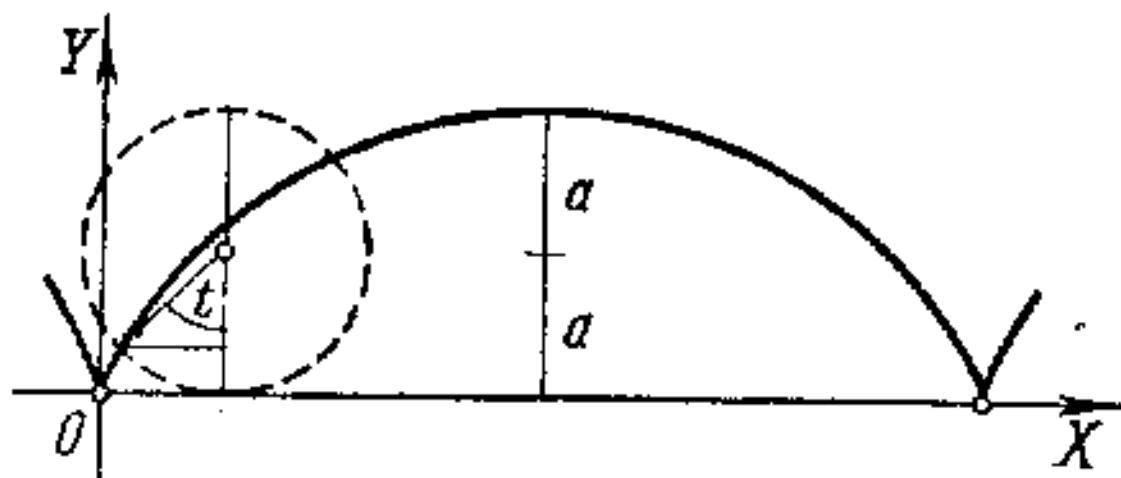
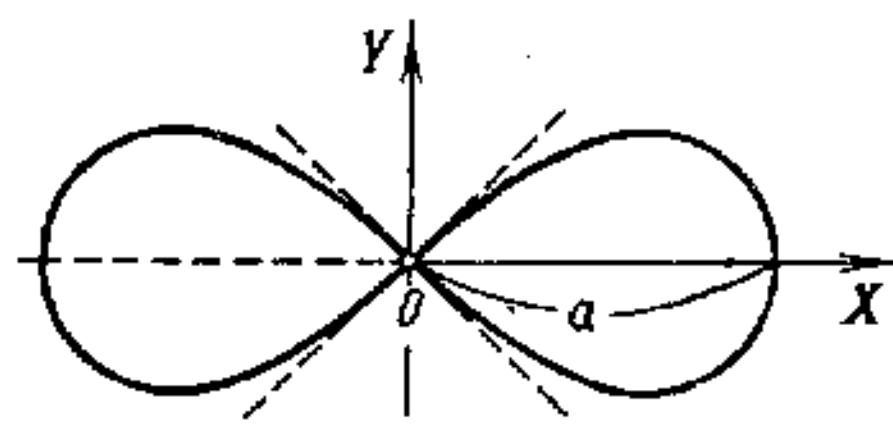
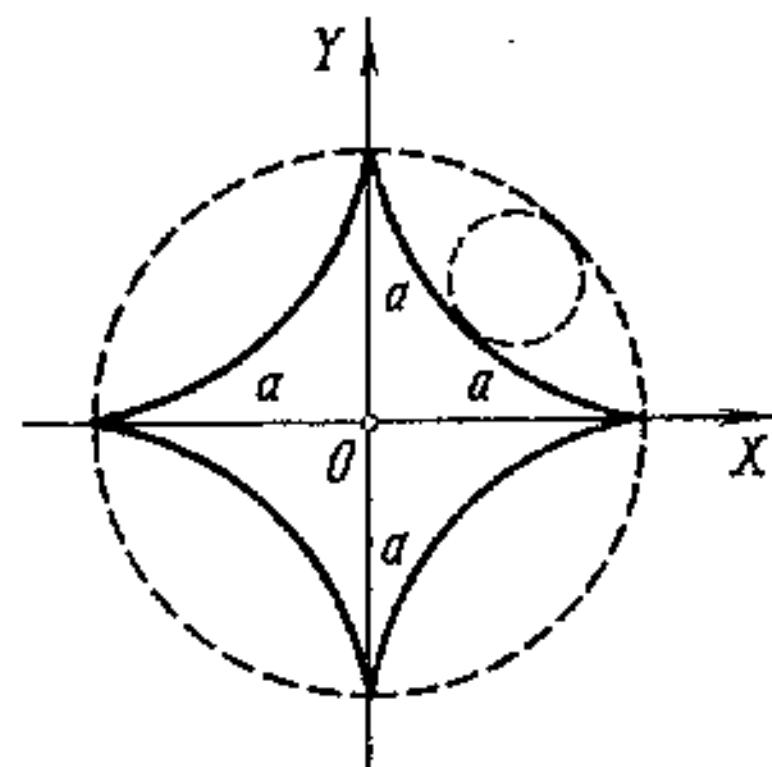
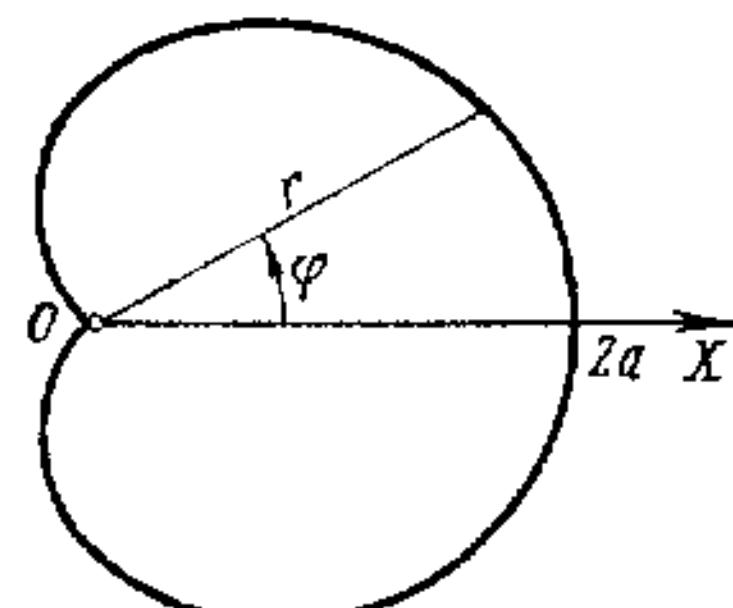
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = a\cosh t, \\ y = b \operatorname{sen h} t \end{cases}$$

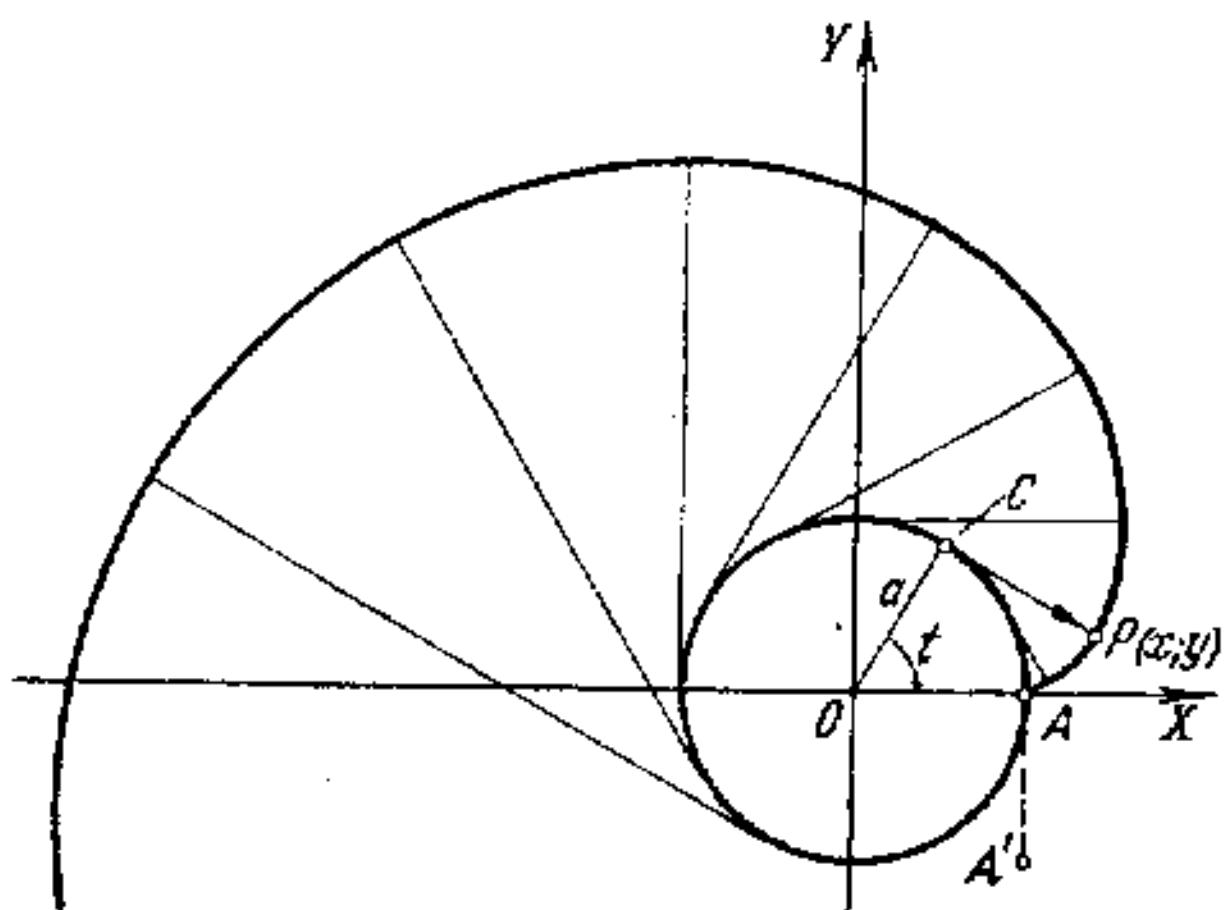
(para o ramo direito).

21. Parábola

$$y^2 = 2\,px.$$

22. Folha de Descartes

$$x^3+y^3-3axy=0 \quad \text{ou}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$$

23. Cissóide de Diocles

$$y^2=\frac{x^3}{a-x} \quad \text{ou}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{at^2}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{at^3}{1+t^2}. \end{cases}$$

24. Estrofóide

$$y^2 = x^2 \frac{a+x}{a-x}.$$

25. Lemniscata de Bernoulli

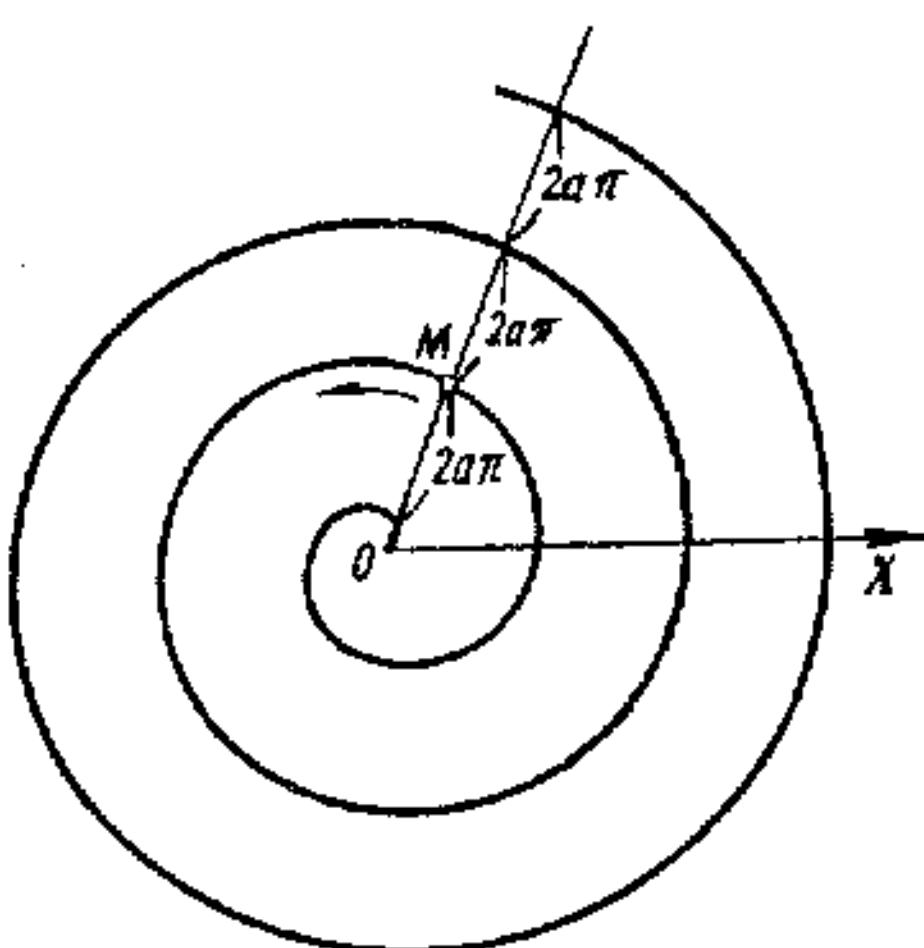
$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ ou

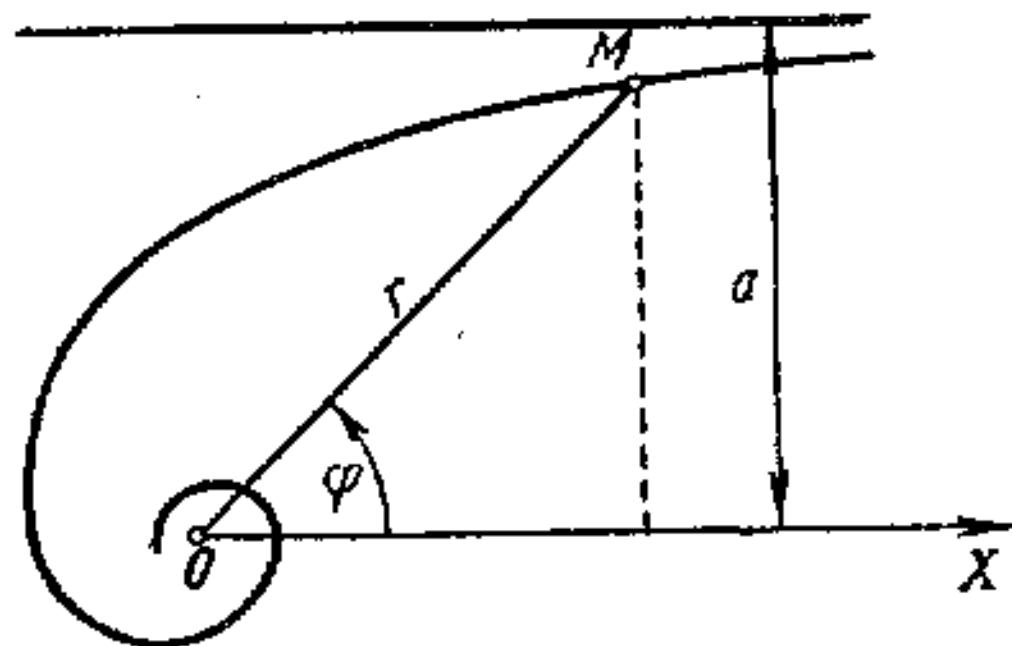
$r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

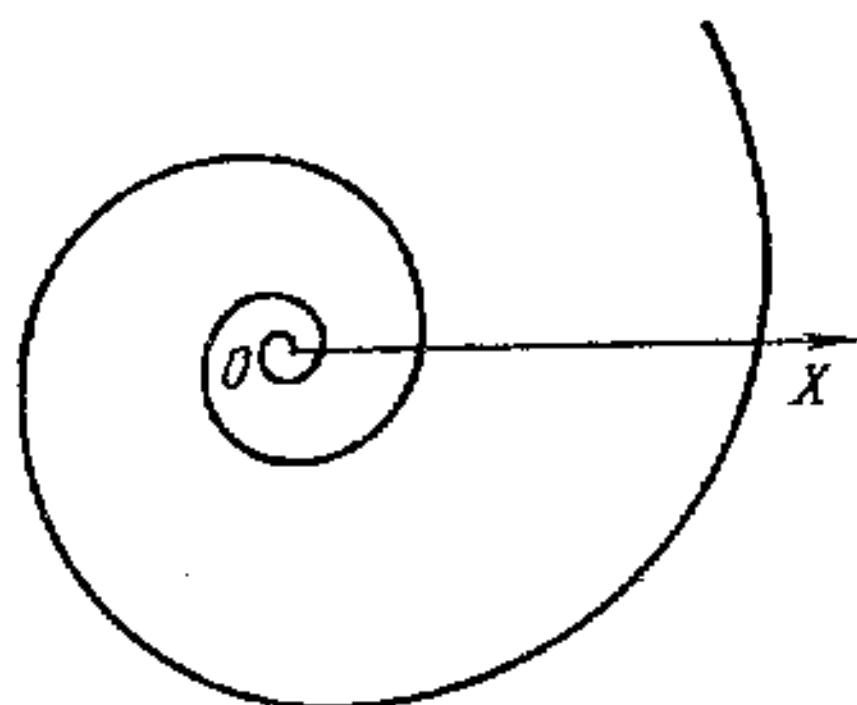
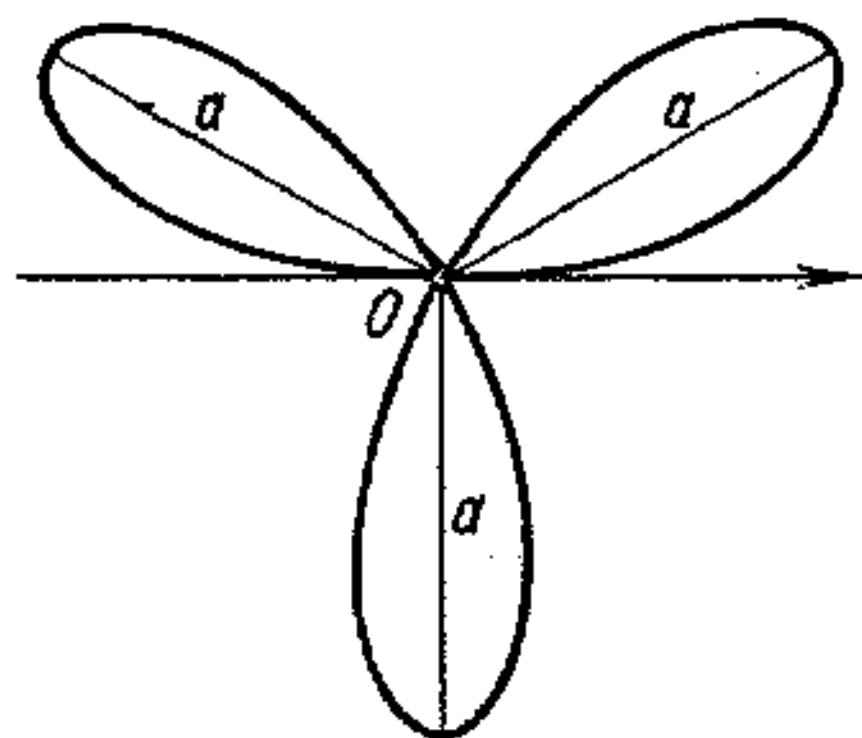
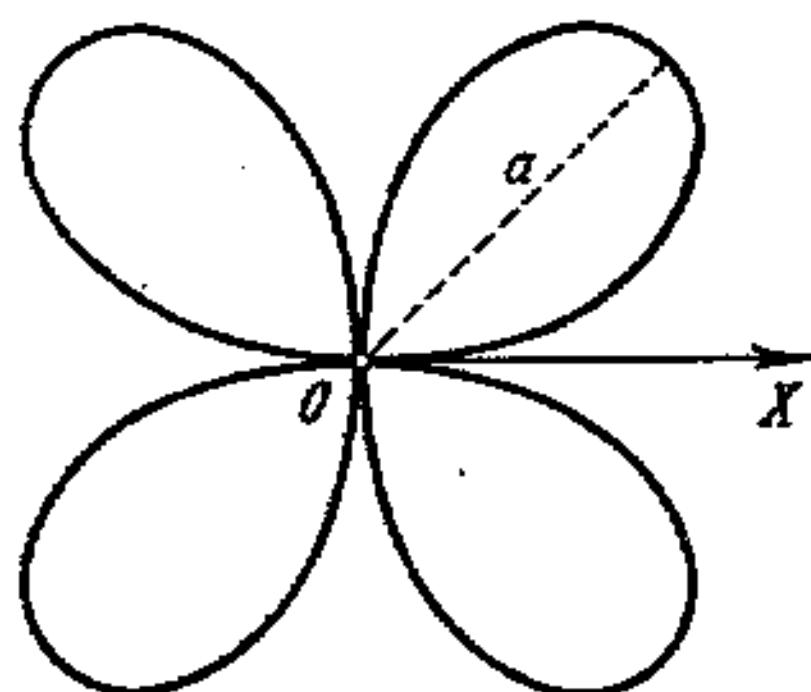
26. Ciclóide $\begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

27. Hipociclóide (astróide)

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \operatorname{sen}^3 t \end{cases}$$

ou $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

28. Cardióide

$r = a(1 + \cos \varphi)$.

29. Evolvente (desenvolvimento) da circunferência

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t), \\ y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t). \end{cases}$$

30. Espiral de Arquimedes
$r = a\varphi (r \geqslant 0)$.

31. Espiral hiperbólica
$r = \frac{a}{\varphi} (r > 0)$.

32. Espiral logarítmica
$r = e^{a\varphi}$.

33. Rosa de três pétalas
$r = a \operatorname{sen} 3\varphi (r \geqslant 0)$.

34. Rosa de quatro pétalas
$r = a \,|\operatorname{sen} 2\varphi\,|$.